УДК 517.958:519.63

М. Г. БЕРДНИК., І. Г. ГУЛІНА
Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ І МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗАДАЧІ НЕЙМАНА ТЕПЛООБМІНУ ПАРАБОЛОЇДА ОБЕРТАННЯ

В даний час недостатньо вивчені питання про розподіл температурних полів в заготовках при новому способу нагрівання, що здійснюється шляхом обертання заготовок в магнітному полі постійного струму, який створюється у збудниках з надпровідними обмотками, без знання яких неможливо здійснити його технічну реалізацію з високими техніко-економічними показниками. При цьому невелике число наукових робіт присвячено дослідженням електромагнітних і теплових явищ всередині заготовки при її обертанні в магнітному полі постійного струму. Тому вельми актуальною є задача розробки математичних методів моделювання температурних полів в заготовках при індукційному нагріву металу з використанням інноваційної технології, розв'язанню якої присвячена ця робота. В статті побудована нова узагальнена просторова математична модель розрахунку температурних полів в заготовках у вигляді параболоїда обертання, що обертається з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла у вигляді крайової задачі математичної фізики, а також знаходження розв'язків отриманої крайової задачі. Вперше побудована математична модель розрахунку полів температури в параболоїді обертання, який обертається, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, у вигляді крайової задачі математичної фізики для гіперболічного рівняння теплопровідності з граничними умовами Неймана. Побудоване інтегральне перетворення для двовимірного кінцевого простору, із застосуванням якого знайдено температурне поле у вигляді збіжних рядів по функціям Фур'є. Знайдений розв'язок узагальненої крайової задачі теплообміну параболоїда обертання, який обертається, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла, може знайти застосування при моделюванні температурних полів, які виникають при індукційному нагріві, що здійснюється шляхом обертання заготовок в магнітному полі постійного струму, який створюється у збудниках з надпровідними обмотками.

Ключові слова: комплексний ряд Фур'є, крайова задача Неймана, інтегральне перетворення Лапласа, час релаксації.

М. Г. БЕРДНИК., И. Г. ГУЛИНА
Национальный технический университет «Днепровская политехника

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ТЕПЛООБМЕНА ПАРАБОЛОИДА ВРАЩЕНИЯ

В настоящее время недостаточно изучены вопросы о распределении температурных полей в заготовках при новом способе нагрева, который осуществляется путем вращения заготовок в магнитном поле постоянного тока, создаваемого в возбудителях со сверхпроводящими обмотками, без знания которых невозможно осуществить его техническую реализацию с высокими технико-экономическими показателями. При этом небольшое число научных работ посвящено исследованию электромагнитных и тепловых явлений внутри заготовки при ее вращении в магнитном поле постоянного тока. Поэтому весьма актуальной является задача разработки математических методов моделирования температурных полей в заготовках при индукционном нагреве металла с использованием инновационной технологии, решению которой посвящена эта работа. В статье построена новая обобщенная пространственная математическая модель расчета температурных полей в заготовках в виде параболоида вращения, который вращается с постоянной угловой скоростью, с учетом конечной скорости распространения тепла, в виде краевой задачи математической физики, а также нахождение решений полученной краевой задачи. Впервые построена математическая модель расчета полей температуры в параболоиде вращения, который вращается, с учетом конечной скорости распространения тепла, в виде краевой задачи математической физики для гиперболического уравнения теплопроводности с граничными условиями Неймана. Построено интегральное преобразование для двумерного конечного пространства, с применением которого найдено температурное поле в виде сходящихся рядов по функциям Фурье. Найденное решение обобщенной краевой задачи теплообмена параболоида вращения, который вращается, с учетом конечности величины скорости распространения тепла, может найти применение при моделировании температурных полей, возникающих при *индукционном нагреве, который осуществляется путем вращения заготовок в магнитном поле постоянного тока, создаваемого в возбудителях со сверхпроводящими обмотками.*

Ключевые слова: комплексный ряд Фурье, краевая задача Неймана, интегральное преобразование Лапласа, время релаксации.

M. H. BERDNYK, I. G. HULINA
National Technical University Dnipro Polytechnic

MATHEMATICAL MODEL AND METHOD OF SOLVING THE GENERALIZED NEYMAN PROBLEM OF HEAT EXCHANGE OF PARABOLOID OF ROTATION

Currently insufficiently studied the distribution of temperature fields in the workpieces with a new method of heating, carried out by rotating the workpieces in a magnetic field of direct current, which is created in exciters with superconducting windings without knowledge of which it is impossible to implement its technical implementation with high technical and economic performance. A small number of scientific papers are devoted to the study of electromagnetic and thermal phenomena inside the workpiece during its rotation in a magnetic field of direct current. Therefore, the task of developing mathematical methods for modeling temperature fields in workpieces during induction heating of metal using innovative technology, the solution of which is devoted to this work, is very important. The article constructs a new generalized spatial mathematical model for calculating temperature fields in workpieces, in the form of a paraboloid of rotation rotating at a constant angular velocity, taking into account the finite velocity of heat propagation as a boundary value problem of mathematical physics, and finding solutions to the boundary value problem. For the first time, a mathematical model for calculating temperature fields in a paraboloid of rotation, taking into account the finite velocity of rotating heat, is constructed as a boundary value problem of mathematical physics for hyperbolic equations of thermal conductivity with Neumann boundary conditions. An integral transformation for a two-dimensional finite space is constructed, using which the temperature field is found in the form of convergent series by Fourier functions. The solution of the generalized boundary value problem of heat exchange of a rotating paraboloid, taking into account the finiteness of the value of heat propagation, can be used to modulate the temperature fields arising from induction heating by rotating the workpieces in a magnetic field of direct current generated in the excitation. with superconducting windings.

Keywords: complex Fourier series, Neumann boundary value problem, Laplace integral transformation, relaxation time.

Постановка проблеми

В даний час в різних областях промисловості значно розширилася сфера застосування електротехнологічних процесів. Одним з великомасштабних електротехнологічних процесів, що застосовуються в кольоровій металургії, є процес індукційного нагріву металу, призначений для термообробки металів під пластичну деформацію, загартування.

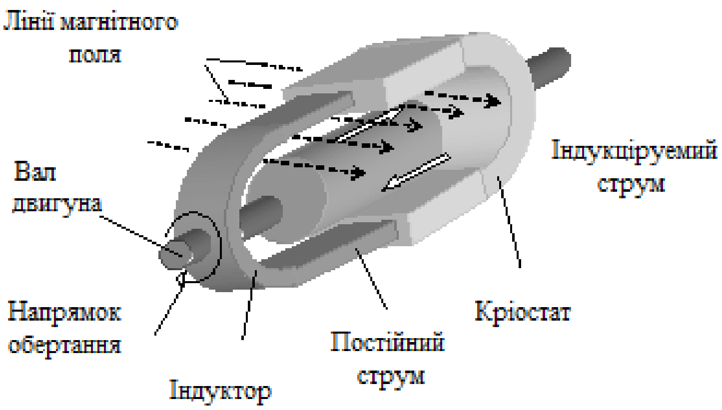

Рис. 1. Індукційний нагрів заготовки в магнітному полі

Різке підвищення енергетичної ефективності забезпечує принципово нова енергозберігаюча технологія індукційного нагріву [1], що здійснюється шляхом обертання заготовок в магнітному полі постійного струму, який створюється у збудниках з надпровідними обмотками (рис. 1).

Аналіз останніх досліджень і публікацій

В даний час недостатньо вивчені питання про розподіл температурних полів в заготовках при новому способу нагрівання, без знання яких неможливо здійснити його технічну реалізацію з високими техніко-економічними показниками. Температурні поля в заготовках можуть бути отримані і досліджені шляхом побудови адекватних математичних моделей процесу технології індукційного нагріву на базі сучасної методології чисельного моделювання.

Відомі теоретичні дослідження інноваційної технології нагріву заготовок, які обертаються в магнітному полі постійного струму, пов'язані, в основному, з питаннями енергозбереження та явищем надпровідності [1]. При цьому невелике число наукових робіт присвячено дослідженням електромагнітних і теплових явищ всередині заготовки при її обертанні в магнітному полі постійного струму. Тому вельми актуальною є задача розробки математичних методів моделювання температурних полів в заготовках при індукційному нагріві металу з використанням інноваційної технології, розв’язанню якої присвячена ця робота.

Мета дослідження

Метою статті є побудова нової узагальненої просторової математичної моделі розрахунку температурних полів в заготовках у вигляді параболоїда обертання, що обертається з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, у вигляді крайової задачі математичної фізики для гіперболічного рівняння теплопровідності, а також знаходження рішень отриманої крайової задачі.

Викладення основного матеріалу дослідження

Розглянемо розрахунок температурного поля $T(\rho,\varphi,z,t)$ параболоїда обертання (рис. 2) з твірною лінією $r^2 = 2pz$ в циліндричній системі координат (r,φ,z).

Нехай параболоїд обертається навколо осі OZ з постійною кутовою швидкістю ω, а швидкість поширення тепла є відомою величиною. Теплофізичні властивості параболоїда не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні. У початковий момент часу температура тіла постійна G_0, а на бічній поверхні тіла відоме значення теплового потоку $V(\varphi,z)$. При $z=h$ відоме значення теплового потоку $G_1(r,\varphi)$.

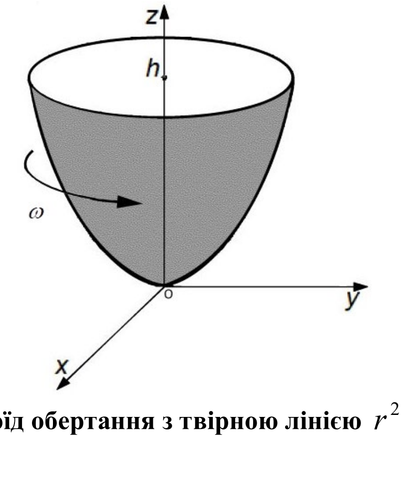

Рис. 2. Параболоїд обертання з твірною лінією $r^2 = 2pz$

В [2] отримано узагальнене рівняння переносу енергії для рушійного елемента суцільного середовища, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла. Згідно [2], узагальнене рівняння балансу енергії твердого тіла, яке обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі *OZ*, і теплофізичні властивості якого не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні, в циліндричній системи координат набуває вигляду:

$$\gamma\, \mathrm{c}\left\{\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{t}}+\omega\frac{\partial T}{\partial\varphi}+\tau_r\left[\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\omega\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi\partial t}\right]\right\}=\lambda\left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right], \tag{1}$$

де γ – щільність середовища; c – питома теплоємність; $T(\rho,\varphi,z,t)$ – температура середовища; λ – коефіцієнт теплопровідності; t – час; τ_r – час релаксації.

Математично, задача визначення температурного поля тіла полягає в інтегруванні диференціального рівняння теплопровідності (1) в області $D=\left\{(\rho,\varphi,z,t)\middle| r\in\left(0,\sqrt{2ph}\right), \varphi\in(0,2\pi), \mathrm{z}\in(0,h), \mathrm{t}\in(0,\infty)\right\}$, що з урахуванням прийнятих допущень запишеться у вигляді:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\omega\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}+\tau_r\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}+\tau_r\omega\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi\partial t}=a\left[\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right] \tag{2}$$

з початковими умовами

$$\theta(r,\varphi,z,0)=0,\quad \frac{\partial\theta(r,\varphi,z,0)}{\partial t}=0 \tag{3}$$

і граничними умовами

$$\int_0^t \left.\frac{\partial\theta}{\partial r}\right|_{r=\sqrt{2ph}} e^{\frac{r-t}{\tau_r}}\,dr=G(\varphi,z),\qquad \int_0^t \left.\frac{\partial\theta}{\partial z}\right|_{z=h} e^{\frac{z-t}{\tau_r}}\,dz=\Lambda(r,\varphi), \tag{4}$$

де $\theta=\dfrac{T(r,\varphi,z,t)-G_0}{T_{\max}-G_0}$ – відносна температура тіла; $G(\varphi,z)=\dfrac{V(\varphi,z)\,\tau_r}{\lambda(T_{\max}-G_0)}$; $\Lambda(r,\varphi)=\dfrac{G_1(r,\varphi)\tau_r}{\lambda(T_{\max}-G_0)}$; $G(\varphi,z),\Lambda(r,\varphi)\in \mathrm{C}(0,2\pi)$; $a=\dfrac{\lambda}{c\,\gamma}$ – коефіцієнт теплопровідності.

Тоді розв’язок крайової задачі (2)–(4) $\theta(r,\varphi,z,t)$ є двічі неперервно диференційованим за r,φ,z, один раз за t в області D і неперервним на $\overline{D}$ [3], тобто $\theta(r,\varphi,z,t)\in C^{2,1}(D)\cap C(\overline{D})$, а функції $G(\varphi,z),\Lambda(r,\varphi)$, $\theta(r,\varphi,z,t)$ можуть бути розкладені в комплексний ряд Фур'є [3]

$$\begin{Bmatrix}\theta(r,\varphi,z,t)\\ G(\varphi,z)\\ \Lambda(r,\varphi)\end{Bmatrix}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\begin{Bmatrix}\theta_n(r,z,t)\\ G_n(z)\\ \Lambda_n(r)\end{Bmatrix}\cdot\exp(\mathrm{i}n\varphi), \tag{5}$$

де $\begin{Bmatrix} \theta_n(r,z,t) \\ G_n(z) \\ \Lambda_n(r,) \end{Bmatrix} = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\begin{Bmatrix} \theta(r,\varphi,z,t) \\ G(\varphi,z) \\ \Lambda(r,\varphi) \end{Bmatrix}\cdot \exp(-\mathrm{i}n\varphi)d\varphi;\ \Lambda_n(\rho) = \Lambda_n^{(1)}(\rho) + \mathrm{i}\Lambda_n^{(2)}(\rho);$

$$\theta_n(\rho,z,t) = \theta_n^{(1)}(\rho,z,t) + \mathrm{i}\theta_n^{(2)}(\rho,z,t);\ \ \mathrm{G}_n(z) = G_n^{(1)}(z) + \mathrm{i}G_n^{(2)}(z).$$

З огляду на те, що $\theta(r,\varphi,z,t)$ функція дійсна, надалі обмежимося розглядом $\theta_n(r,z,t)$ для n=0, 1, 2,…, тому що $\theta_n(r,z,t)$ і $\theta_{-n}(r,z,t)$ будуть комплексно спряженими [3]. Підставляючи значення функцій з (5) у (2)–(4), в результаті одержимо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial\theta_n^{(i)}}{\partial t} + \vartheta_n^{(i)}\theta_n^{(m_i)} + \tau_r\frac{\partial^2\theta_n^{(i)}}{\partial t^2} + \tau_r\vartheta_n^{(i)}\frac{\partial\theta_n^{(m_i)}}{\partial t} = a\left[\frac{\partial^2\theta_n^{(i)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\theta_n^{(i)}}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2}\theta_n^{(i)} + \frac{\partial^2\theta_n^{(i)}}{\partial z^2}\right] \tag{6}$$

з початковими умовами

$$\theta_n^{(i)}(\rho,z,0) = 0, \qquad \frac{\partial\theta_n^{(i)}(\rho,z,0)}{\partial t} = 0 \tag{7}$$

і граничними умовами

$$\int\limits_0^t \left.\frac{\partial\theta_n^{(i)}}{\partial r}\right|_{r=\sqrt{2ph}} e^{\frac{r-t}{\tau_r}}dr = G_n^{(i)}(z)\ , \qquad \int\limits_0^t \left.\frac{\partial\theta_n^{(i)}}{\partial z}\right|_{z=h} e^{\frac{z-t}{\tau_r}}dz = \Lambda_n^{(i)}(r)\ , \tag{8}$$

де $\vartheta_n^{(1)} = -\omega n;\quad \vartheta_n^2 = \omega n;\ \mathrm{m}_1 = 2,\ \ \mathrm{m}_2 = 1;\ \ i = 1{,}2.$

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (6) з умовами (7)–(8) інтегральне перетворення Лапласа [4]. У результаті одержуємо систему диференціальних рівнянь

$$s\widetilde{\theta}_n^{(i)} + \vartheta_n^{(i)}\left(\widetilde{\theta}_n^{(m_i)} + \tau_r s\widetilde{\theta}_n^{(m_i)}\right) + \tau_r s^2\widetilde{\theta}_n^{(i)} = a\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\widetilde{\theta}_n^{(i)}}{\partial r}\right) - \frac{n^2}{r^2}\widetilde{\theta}_n^{(i)} + \frac{\partial^2\widetilde{\theta}_n^{(i)}}{\partial z^2}\right] \tag{9}$$

з граничними умовами

$$\left.\frac{\partial\widetilde{\theta}_n^{(i)}}{\partial r}\right|_{r=\sqrt{2ph}} = \widetilde{G}_n^{(i)}(z), \qquad \left.\frac{\partial\widetilde{\theta}_n^{(i)}}{\partial z}\right|_{z=h} = \widetilde{\Lambda}_n^{(i)}(r)\ , \tag{10}$$

$$\text{де}\quad \widetilde{G}_n^{(i)}(z) = G_n^{(i)}(z)\left(1 + \frac{1}{s\tau_r}\right);\ \ \widetilde{\Lambda}_n^{(i)}(z) = \Lambda_n^{(i)}(z)\left(1 + \frac{1}{s\tau_r}\right).$$

Для розв’язання крайової задачі (9)-(10) застосовуємо інтегральне перетворення:

$$\bar{f}(\mu_{n,k}) = \iint\limits_{\mathrm{D}} Q(\mu_{n,k},r,z)\cdot r\cdot \mathrm{f}(r,z)d\sigma. \tag{11}$$

Власні функції $Q(\mu_{n,k},r,z)$ і власні значення $\mu_{n,k}$ знаходяться із розв’язку спектральної задачі:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial r}-\frac{n^2}{r^2}Q+\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}+\mu_{n,k}\cdot Q=0\,, \tag{12}$$

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial r}\right|_{r=\sqrt{2ph}}=0\,, \qquad \left.\frac{\partial Q}{\partial z}\right|_{z=h}=0. \tag{13}$$

Власні функції $Q(\mu_{n,k},r,z)$ і власні значення $\mu_{n,k}$ в (12)- (13) знаходяться за формулами, які приведені в [5], а формула оберненого перетворення має вигляд:

$$\mathrm{f}(\rho,z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Q(\mu_{n,k},r,z)}{\left\|Q(\mu_{n,k},r,z)\right\|^2}\bar{f}(\mu_{n,k}). \tag{14}$$

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (9) інтегральне перетворення (11), в результаті одержуємо систему алгебраїчних рівнянь відносно $\overline{\widetilde{\theta}}_n^{(i)}$:

$$s\overline{\widetilde{\theta}}_n^{(i)}+\vartheta_n^{(i)}\left(\overline{\widetilde{\theta}}_n^{(m_i)}+\tau_r s\overline{\widetilde{\theta}}_n^{(m_i)}\right)+\tau_r s^2\overline{\widetilde{\theta}}_n^{(i)}=q_{n,k}\left(\frac{\widetilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(\mathrm{i})}}{\mu_{n,k}}-\overline{\widetilde{\theta}}_n^{(i)}\right) \tag{15}$$

де $\widetilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(\mathrm{i})}=\int_0^h\sqrt{2pz}\cdot Q(\mu_n,\sqrt{2pz},z)\widetilde{G}_n^{(i)}(z)dz+\oint_L r\left(Q(\mu_{n,k},r,z)\frac{\partial\widetilde{\theta}_n^{(i)}}{\partial z}-\widetilde{\theta}_n^{(i)}\frac{\partial Q(\mu_{n,k},r,z)}{\partial z}\right)dl;$

$$q_{n,k}=a\,\mu_{n,k}\,.$$

Криволінійний інтеграл обчислюється по замкненому додатно орієнтованому контуру (рис.3):

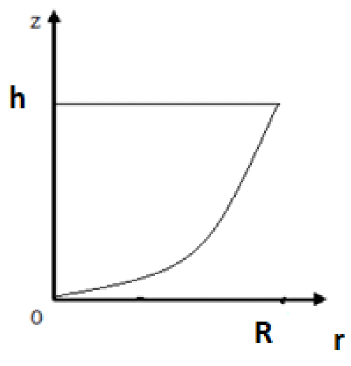

Рис. 3. Замкнутий контур з твірною лінією $r^2=2pz.\left(R=\sqrt{2ph}\right)$

Розв’язавши систему рівнянь (15), одержуємо

$$\overline{\widetilde{\theta}}_n^{(i)}=a\cdot\frac{\widetilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(\mathrm{i})}\left(\tau_r s^2+s+\mathrm{q}_{\mathrm{n,k}}\right)+(-1)^{i+1}\omega n\widetilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(m_i)}(1+s\tau_r)}{\left(\tau_r s^2+s+\mathrm{q}_{\mathrm{n,k}}\right)^2+\omega^2 n^2(1+s\tau_r)^2}. \tag{16}$$

Застосовуючи до зображення функцій (16) формули оберненого перетворення Лапласа [4], одержуємо оригінали функцій:

$$\bar{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k},t)=\sum_{j=1}^{2}\zeta_{n,k}(s_j)\Big\{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(1)}(s_j)\big[(2\tau_r s_j+1)+\tau_r\omega n\mathrm{i}\big]+\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(2)}(s_j)\big[\tau_r\omega n-(2\tau_r s_j+1)\mathrm{i}\big]\Big\}\times$$
$$\times\left(e^{s_j t}-1\right)+\sum_{j=3}^{4}\zeta_{n,k}(s_j)\Big\{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(1)}(s_j)\cdot\big[(2\tau_r s_j+1)-\tau_r\omega n\mathrm{i}\big]+\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(2)}(s_j)\big[\tau_r\omega n+(2\tau_r s_j+1)\mathrm{i}\big]\Big\}\times$$
$$\times\left(e^{s_j t}-1\right), \tag{17}$$

$$\bar{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k},t)=\sum_{j=1}^{2}\zeta_{n,k}(s_j)\Big\{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(2)}(s_j)\big[(2\tau_r s_j+1)+\tau_r\omega n\mathrm{i}\big]-\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(1)}(s_j)\big[\tau_r\omega n-(2\tau_r s_j+1)\mathrm{i}\big]\Big\}\times$$
$$\times\left(e^{s_j t}-1\right)+\sum_{j=3}^{4}\zeta_{n,k}(s_j)\Big\{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(2)}(s_j)\big[(2\tau_r s_j+1)-\tau_r\omega n\mathrm{i}\big]-\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(1)}(s_j)\big[\tau_r\omega n+(2\tau_r s_j+1)\mathrm{i}\big]\Big\}\times$$
$$\times\left(e^{s_j t}-1\right), \tag{18}$$

де $\quad \zeta_{n,k}(s_j)=\dfrac{0.5s_j^{-1}a}{(2\tau_r s_j+1)^2+(\tau_r\omega n)^2}$,

а значення s_j для j=1, 2, 3, 4 визначаються за формулами

$$s_{1,2}=\frac{(\tau_r\omega ni-1)\pm\sqrt{(1+\tau_r\omega ni)^2-4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r},\; s_{3,4}=\frac{(\tau_r\omega ni+1)\pm\sqrt{(1-\tau_r\omega ni)^2-4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r}.$$

Таким чином, з урахуванням формул обернених перетворень (5) і (14), одержуємо температурне поле параболоїда обертання, що обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ, із урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла:

$$\theta(r,\varphi,z,t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\left[\bar{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k},t)+\mathrm{i}\bar{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k},t)\right]\frac{Q(\mu_{n,k},r,z)}{\left\|Q(\mu_{n,k},r,z)\right\|^2}\right\}\exp(\mathrm{i}n\varphi),$$

де $\bar{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k},t),\bar{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k},t)$ визначаються за формулами (17), (18).

Висновки

У даній роботі вперше побудована математична модель розрахунку полів температури в параболоїді обертання, який обертається, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, у вигляді крайової задачі математичної фізики для гіперболічних рівнянь теплопровідності з граничними умовами Неймана. Побудоване інтегральне перетворення для двовимірного кінцевого простору, із застосуванням якого знайдено температурне поле у вигляді збіжних рядів по функціям Фур'є. Знайдений розв'язок узагальненої крайової задачі теплообміну параболоїда обертання, який обертається, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла, може знайти застосування при моделюванні температурних полів, які виникають при індукційному нагріві, що здійснюється шляхом обертання заготовок в магнітному полі постійного струму, який створюється у збудниках з надпровідними обмотками.

Список використаної літератури

1. Заикина Н. В., Плешивцева Ю. Э. Моделирование и управление температурными полями в процессе индукционного нагрева заготовок, вращающихся в магнитном поле постоянного тока. *Вестник Самарского государственного технического университета, серия «Технические науки»*. 2009. № 3 (25). С. 215-223.
2. Бердник М. Г. Аналітичний розв’язок узагальненої крайової задачі теплообміну циліндра, який обертається. *Математичні машини і системи*. 2015. № 4. С.117-122.
3. Маркович Б. М. Рівняння математичної фізики. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2010. 384 с.
4. Лопушанська Г. П., Лопушанський А. О., М’яус О. М. Перетворення Фур’є, Лапласа: узагальнення та застосування. Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 2014.152 с.
5. Berdnyk M. The mathematic model and method for solving the dirichlet heat- exchange problem for empty isotropic rotary body. *Non-Traditional Technologies in the Mining Industry. Solid State Phenomena*. Vol. 277. Trans Tech Publications, Switzerland. 2018. P. 168-177.

References

1. Zaikina, N. V., & Pleshivtseva, Yu. E. (2009). Modelirovanie i upravlenie temperaturnyimi polyami v protsesse induktsionnogo nagreva zagotovok, vraschayuschihsya v magnitnom pole postoyannogo toka. *Vestnik Samarskogo gosudarstven-nogo tehnicheskogo universiteta, seriya «Tehnicheskie nauki»*. **3**(25), 215-223.
2. Berdnyk, M. H. (2015). Analitychnyi rozviazok uzahalnenoi kraiovoi zadachi teploobminu tsylindra, yakyi obertaietsia. *Matematychni mashyny i systemy*. 4, 117-122.
3. Markovych, B. M. (2010). Rivniannia matematychnoi fizyky. Lviv: Vydavnytstvo Lvivskoi politekhniky.
4. Lopushanska, H. P., Lopushanskyi, A. O. & M"iaus, O. M. (2014). Peretvorennia Fur"ie, Laplasa: uzahalnennia ta zastosuvannia. Lviv: LNU im. Ivana Franka.
5. Berdnyk, M. (2018). The mathematic model and method for solving the dirichlet heat-exchange problem for empty isotropic rotary body. *Non-Traditional Technologies in the Mining Industry. Solid State Phenomena*. Trans Tech Publications, Switzerland. **277,** 168-177.

Бердник Михайло Геннадійович – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри програмного забезпечення комп’ютерних систем Національного технічного університету "Дніпровська політехніка". E-mail: mgb2006@ukr.net, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4894-8995.

Гуліна Ірина Григорівна – к.т.н., доцент кафедри програмного забезпечення комп'ютерних систем Національного технічного університету «Дніпровська політехніка». E-mail: gulina.irina.g@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2565-5006.