

УДК 539.3

Т.С. КАГАДІЙ, А.Г. ШПОРТА

НТУ «Дніпровська політехніка»

О.В. БІЛОВА

Національна металургійна академія України

І.В. ЩЕРБИНА

Дніпровський державний аграрно-економічний університет

### НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ШАРУВАТОЇ ОСНОВИ З ПІДКРІПЛЮЮЧИМ ЕЛЕМЕНТОМ

*Керування напружено-деформованим станом в'язкопружних тіл із циліндричною анізотропією, що складаються з багатьох шарів та армовані є дуже важливим на практиці, зокрема, у будівництві. Розв'язання задач механіки анкерних стрижнів та фундаментів на палях на сьогодні залишається дуже актуальним. Результати також можуть бути корисними при аналізі напружено-деформованого стану волокнистого композиту. У роботі розглядається складна просторова осесиметрична контактна задача про передачу навантаження від стержня кругового поперечного перерізу до в'язко-пружного тіла, що складається з двох скріплених між собою ортотропних шарів з циліндричною анізотропією. Визначається закон розподілу контактних напружень між стрингером та тілом, а також зусилля в стрингері при умові його навантаження в кінцевих точках поздовжніми силами. Для розв'язання використовується розроблений авторами асимптотичний метод. У якості малого параметра обирається відношення жорсткісних характеристик матеріалу. Оскільки матеріал тіла в'язкопружний, цей фізичний параметр включає в себе відношення функцій, що виникають після застосування перетворення Лапласа в основних рівняннях і залежать від параметру цього перетворення. Такі відношення для в'язкопружних анізотропних матеріалів, що зазвичай розглядаються на практиці, не перевищують одиницю і тому параметр асимптотичного інтегрування лишається малим. Такий вибір малого параметру є зручним, оскільки вигляд рівнянь та крайових умов, записаних відносно трансформант Лапласа, повністю співпадає з відповідними виразами для пружної постановки задачі. Після розв'язання задачі в такому вигляді, лишається питання переходу до оригіналів шуканих функцій. Такий перехід можна спростити, якщо знаходити оригінали для малих та великих значень обраних параметрів (наприклад, часу), а потім з'єднати їх за допомогою двоточнової апроксимації, що дозволяє отримати загальний розв'язок.*

*Ключові слова: асимптотичний метод, контактна задача, в'язкопружне тіло, композиційні матеріали, стрингер, ортотропні шари, циліндрична анізотропія.*

Т.С. КАГАДІЙ, А.Г. ШПОРТА

НТУ «Днепровская политехника»

О.В. БЕЛОВА

Национальная металлургическая академия Украины

И.В.ЩЕРБИНА

Днепровский государственный аграрно-экономический университет

### НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ СЛОИСТОГО ОСНОВАНИЯ С ПОДКРЕПЛЯЮЩИМ ЭЛЕМЕНТОМ

*Управление напряженно-деформированным состоянием вязкоупругих тел с цилиндрической анизотропией, которые состоят из многочисленных слоев и*

подкреплены, является очень важным на практике, в частности, в строительстве. Решение задач механики анкерных стержней и свайных фундаментов на сегодня остается весьма актуальным. Результаты также могут быть полезными при анализе напряженно-деформированного состояния волокнистого композита. В работе рассматривается сложная пространственная осесимметричная контактная задача о передаче загрузки от стержня кругового поперечного сечения вязкоупругому телу, которое состоит из двух скрепленных между собой ортотропных слоёв с цилиндрической анизотропией. Определяется закон распределения контактных напряжений между стрингером и телом, а также усилия в стрингере при условии его нагружения в конечных точках продольными силами. Для решения используется разработанный авторами асимптотический метод. В качестве малого параметра выбирается отношение жесткостных характеристик материала. Поскольку материал тела вязкоупругий, этот физический параметр включает в себя отношение функций, которые возникают после применения преобразования Лапласа в основных уравнениях и зависят от параметра этого преобразования. Такие отношения для вязкоупругих анизотропных материалов, которые чаще всего встречаются на практике, не превышают единицу и поэтому параметр асимптотического интегрирования остается малым. Такой выбор малого параметра является удобным, поскольку вид уравнений и граничных условий, записанных относительно трансформант Лапласа, полностью совпадает с соответствующими выражениями для упругой постановки задачи. После решения задачи в таком виде остается вопрос перехода к оригиналам искомых функций. Такой переход можно упростить, если находить оригиналы для малых и больших значений выбранных параметров (например, времени), а затем срастить их с помощью двухточечной аппроксимации, что позволяет получить общее решение.

Ключевые слова: асимптотический метод, контактная задача, вязкоупругое тело, композиционные материалы, стрингер, ортотропные слои, цилиндрическая анизотропия.

T.S. KAGADIY, A.H. SHPORTA

National TU Dnipro Polytechnic

O.V. BILOVA,

National Metallurgical Academy of Ukraine

I.V. SCHERBINA

Dnipro State Agrarian and Economic University

## **STRESSED-STRAINED STATE OF A LAYERED BASIS WITH A FASTENING ELEMENT**

*The control of the stress-strain state of viscoelastic bodies with cylindrical anisotropy, which consist of numerous layers and are supported, is very important in practice, particularly in construction. The mechanics of anchor rods and pile foundations remains very important today. The results can also be useful for stress-strain analyses of fibrous composites. The paper deals with a complex spatial axisymmetric contact problem of transferring a load from a circular cross section rod to a viscoelastic body, which consists of two bonded orthotropic layers with cylindrical anisotropy. The law of the contact stress distribution between the stringer and the body, as well as the force in the stringer if it is loaded longitudinally at the end points, is determined. For a decision the asymptotic method worked out by authors is used. The relation of stiff descriptions of material gets out as a small parameter. As material of body вязкоупругий, this physical parameter is plugged in itself by the relation of functions that arise up after application of transformation of Laplace in basic*

*equalizations and depend on the parameter of this transformation. Such relations for viscoelastic anisotropic materials that mostly meet in practice do not exceed unit and parameter of asymptotic integration remains small. Such choice of small parameter is comfortable, as a type of equalizations and border terms, written in relation to the transforms of Laplace, fully coincides with corresponding expressions for the resilient raising of task. After the decision of task in such kind the question of passing a stay to the originals of the sought after functions. Such transition can be simplified, if to find originals for the small and large values of the chosen parameters (for example, to time), and then to join them by means of two-point approximation, that allows to get a common decision.*

*Keywords: asymptotic method, contact problem, viscoelastic body, composite materials, stringer, orthotropic layers, cylindrical anisotropy.*

### **Постановка проблеми**

Задачі про передачу навантаження від підкріплюючих елементів до тіл з різними властивостями безпосередньо відносяться до будівельної механіки. Якщо навантажений елемент - це стрижень, тоді можна розглядати деякі питання руйнування армованих волокнами композитів. В даній роботі постановка задачі ускладнюється врахуванням в'язкопружних властивостей матеріалу основи, що, крім того, складається з двох шарів. Аналітичні розв'язки для просторових задач такого типу майже не зустрічаються в літературі. Тому проведене дослідження є актуальним і може бути корисним при подальших чисельних розрахунках.

### **Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Методам розв'язання плоскої та осесиметричної контактних задач про передачу навантаження від штампів, накладок та інших підкріплюючих елементів до основ з різними властивостями присвячені статті багатьох вчених [1]. Ця проблема розглядалась в роботах В. М. Александрова, В. М. Калякіна, Б. І. Когана, Д. А. Пожарського, В. П. Потележка, А. П. Філіппова, І. І. Kalker. Розв'язок деяких мішаних задач теорії пружності для багатошарових основ пізніше отримали В. С. Нікішин і Г.С. Шапіро, А. Hanuska та В. Novotny. Для штампа довільної форми у плані, який тисне на багатошарову основу, метод визначення контактних тисків запропоновано А. К. Приварниковим та його учнями [2]. Метою досліджень останніх років є врахування складних властивостей матеріалів, що наближає математичну модель до реальних задач. Наприклад, в [3] запропоновано метод розв'язання задачі електро-в'язкопружності для багатозв'язних пластин. Методом малого параметра задача зведена до рекурентної послідовності задач електров'язкопружності, що розв'язуються з використанням комплексних потенціалів.

### **Мета дослідження**

Розв'язання складної просторової задачі про передачу навантаження від пружного підкріплюючого елемента до в'язкопружної шаруватої основи.

### **Викладення основного матеріалу дослідження**

Розглянемо осесиметричну контактну задачу про передачу навантаження від стрижня кругового поперечного перерізу до в'язкопружного тіла, що складається з двох скріплених між собою ортотропних шарів з циліндричною анізотропією.

$$0 \leq z_1 \leq h_1, h_1 \leq z_2 \leq h_2, r \neq \infty, z_1 = z, z_2 = z - h_1.$$

Стержень розміщений перпендикулярно обмежуючим площинам, середня лінія

його співпадає з віссю  $Oz$ .

Потрібно визначити закон розподілу контактних напружень між стрингером та тілом, а також зусилля в стрингері при умові його навантаження в кінцевих точках поздовжніми силами  $P_0^{(1)}$  та  $P_0^{(2)}$  (індекси 1, 2 стосуються відповідних шарів; при кінцевих значеннях  $h_1, h_2$  з умови рівноваги  $P_0^{(1)} = P_0^{(2)}$ ). Оскільки в просторових задачах для тіл з включеннями модель одновимірного пружного включення разом з моделлю контакту по лінії не застосовується, припускається, що має місце модель одновимірного стержня в сполученні з моделлю контакту по циліндричній поверхні для основи.

Оскільки матеріал основи в'язкопружний з циліндричною анізотропією, а задача формулюється з урахуванням аксіальної симетрії навантаження, тоді тензор напружень та вектор переміщень не залежать від  $Q$  ( $rQz$  – циліндричні координати). В такому випадку задача розпадається на дві незалежні: задачу про деформацію, в якій відсутня одна компонента зміщень та задачу крутіння. Докладно розглядається перша з них. Після застосування перетворення Лапласа за часом до співвідношень між деформаціями та напруженнями, задача зводиться до інтегрування рівнянь рівноваги відносно трансформант [4,5] для кожного з шарів

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \varepsilon_1 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \varepsilon_1 m \frac{\partial^2 \varpi}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} &= 0, \\ \varepsilon_1 \frac{\partial^2 \varpi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varpi}{\partial z^2} + \varepsilon_1 m \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \varepsilon_1 \frac{1}{r} \frac{\partial \varpi}{\partial r} + \varepsilon_1 m \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} &= 0, \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon \Phi(p), \quad \varepsilon = G/E_1 \end{aligned} \quad (1)$$

при наступних крайових умовах

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= E_3 \left( \frac{\partial \varpi}{\partial z} + \nu_{31} \frac{\partial u}{\partial r} + \nu_{32} \frac{u}{r} \right), \quad \sigma_{13} = G \left( \frac{\partial \varpi}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad \sigma_{33} = \sigma_{13} = 0, \quad (z=0, z=h_1+h_2), \\ \varpi &= \varpi_c, \quad u = 0 \quad (r=a). \end{aligned}$$

При  $z = h_1$  трансформанти переміщення шарів та напружень  $\sigma_{33}, \sigma_{13}$  в них рівні, на нескінченності всі функції дорівнюють нулю. Переміщення стержня  $\varpi_c$  задовольняє відношенням

$$\begin{aligned} E_c F_c d^2 \varpi_c / dz^2 &= q(z), \\ N = E_c F_c d \varpi_c / dz &= P_0, \quad (z=0, z=h_1+h_2). \end{aligned}$$

Тут  $u, \varpi$  – трансформанти компонент вектора переміщень відповідних шарів,  $E_1, E_2, E_3$  ( $G$ ) – аналоги модулів пружності (зсуву) матеріалів шарів з урахуванням функцій що додаються за рахунок в'язкопружності,  $m = G + \nu_{13} E_1$ . Величина  $\varepsilon_1$  розглядається як «малий» параметр при асимптотичному інтегруванні системи (1). Він дійсно малий, оскільки  $\varepsilon$  – мала величина, а функція  $\Phi(p)$  не перебільшує одиницю для різницевих ядер повзучості ( $P$  параметр перетворення Лапласа);  $q(z) = -2\pi a \sigma_{13}(a, z)$  – зусилля контактної взаємодії між стержнем і шарами,  $a$  –

радіус стержня. Оскільки при  $r = a$  трансформанта переміщення  $u$  та похідна  $\partial u / \partial z$  дорівнюють нулю, тоді напруження  $\sigma_{13}(a, z)$  повністю визначається лише функцією  $\partial \varpi / \partial z$  :

$$q(z) = -2\pi a G(\partial \varpi / \partial r) \Big|_{r=a}$$

Для визначення зусилля в стрингері та зусилля контактної взаємодії використовується запропонований авторами метод [4, 5]. Після розкладання напружено-деформованого стану на дві складові крайова задача зводиться до наступних:

для першого шару

$$E_3^{(1)} \frac{\partial^2 \varpi_1}{\partial z^2} + G^{(1)} \left( \frac{\partial^2 \varpi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varpi_1}{\partial r} \right) = 0 \quad (2)$$

при  $z = 0, \frac{\partial \varpi_1}{\partial z} = 0,$  при  $z = h_1, \frac{\partial \varpi_1}{\partial z} = \frac{f(r)}{E_3^{(1)}},$  при  $r = a, \varpi_1 = \varpi_c \left( \frac{\partial \varpi_1}{\partial z} \Big|_{r=a} = \frac{d\varpi_c}{dz} \right)$

$$E_c F_c \frac{d^2 \varpi_c}{dz^2} = -2\pi a G^{(1)} \frac{\partial \varpi_1}{\partial r} \Big|_{r=a}, \quad (3)$$

при  $z = 0, \frac{d\varpi_c}{dz} = \frac{P_0^{(1)}}{E_c F_c},$  при  $z = h_1, \frac{d\varpi_c}{dz} = \frac{\partial \omega_1}{\partial z} \Big|_{r=a} = \frac{f(a)}{E_3^{(1)}}.$

Та аналогічної для другого шару. Ще раз зауважимо, що запис рівнянь відносно трансформант співпадає з відповідними рівняннями для пружного середовища, оскільки додаткові функції, що виникають за рахунок в'язкопружності, внесені в коефіцієнти (сталі) в рівняннях. Після застосування до рівнянь (2), (3) косинус-перетворення Фур'є за координатою  $z$  з кінцевими границями отримаємо

$$\frac{d^2 \varpi_1^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varpi_1^*}{dr} - \varpi_1^2 \left( \frac{n\pi}{h_1} \right) \varpi_1^*(r, n) = -\frac{(-1)^n}{G^{(1)}} f(r), \quad (4)$$

$$E_c F_c \left( \frac{n\pi}{h_1} \right)^2 \varpi_1^*(a, n) = \frac{E_c F_c}{E^{(1)}} f(a) (-1)^n - p_0^{(1)} + 2\pi a G^{(1)} \frac{d\varpi_1^*}{dr} \Big|_{r=a} \quad (5)$$

$$\varpi_1^*(r, n) = \int_0^{h_1} \omega_1(r, z) \cos \frac{n\pi z}{h_1} dz, \quad \varpi_1^2 = E_3^{(1)} / G^{(1)}$$

Після застосування до рівняння (4) перетворень Вебера за координатою  $r$  з урахуванням крайових умов, отримаємо

$$\frac{2}{\pi} \varpi_1^*(a, n) - \lambda^2 W_1(\lambda, n) - \varpi_1^2 \left( \frac{n\pi}{h_1} \right) W_1(\lambda, n) = -\frac{(-1)^n}{G^{(1)}} F(\lambda), \quad F(\lambda) = \int_a^\infty f(r) r \phi \lambda(r) dr,$$

$$W_1(\lambda, n) = \int_a^\infty \varpi_1^*(r, n) r \phi \lambda(r) dr, \quad \phi_\lambda(r) = I_0(a\lambda) Y_0(\lambda r) - Y_0(a\lambda) I_0(\lambda r),$$

$I_\nu, Y_\nu$  □ функції Бесселя першого та другого роду.

Після застосування оберненого перетворення Вебера та обчислення деяких інтегралів остається необхідність в оберненні трансформант Фур'є. Для цього 10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-1.10

застосовується теорема Діріхле [6]. В результаті маємо

$$\begin{aligned} \varpi_1(a, z) &= \frac{2h_1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{f(a)}{E_3^{(1)}} (-1)^n - \frac{P_0^{(1)}}{E_c F_c} + \frac{2\pi}{E_c F_c} (-1)^n A_1(n) \right) \times \frac{\cos n \frac{\pi z}{h_1}}{n(n + g_1 M_1(n))} \\ &\quad \frac{d\varpi_1}{dr} \Big|_{r=a} = \frac{2}{G^{(1)} a h_1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_1(n) \cos n \frac{\pi z}{h_1} - \\ &\quad - \frac{2\varpi_1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{f(a)}{E_3^{(1)}} (-1)^n - \frac{P_0^{(1)}}{E_c F_c} + \frac{2\pi}{E_c F_c} (-1)^n A_1(n) \right) \times \frac{\cos n \frac{\pi z}{h_1}}{n M_1^{-1}(n) + g_1} \\ &\quad f(r) = \int_0^{\infty} (F(\lambda) \phi_{\lambda}(r) \lambda d\lambda) / (J_0^2(a\lambda) + Y_0^2(a\lambda)). \end{aligned}$$

Для другого шару розв'язання проводиться аналогічно з урахуванням заміни змінної  $z - h_1 = \xi$  в рівняннях (3) □(4).

Після оцінки низки інтегралів за допомогою теореми про середнє значення та врахування крайових умов знаходимо шукані функції та їх похідні для двох шарів

$$\begin{aligned} w_1(a, z) &= \frac{2h_1}{\pi^2} \frac{f(a)}{E_3^{(1)}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n \frac{\pi z}{h_1}}{n(n + g_1 M_1(n))} - \frac{2h_1}{\pi^2} \frac{P_0^{(1)}}{E_c F_c} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \frac{\pi z}{h_1}}{n(n + g_1 M_1(n))}, \\ w_2(a, \xi) &= \frac{2h_2}{\pi^2} \frac{P_0^{(2)}}{E_c F_c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n \frac{\pi \xi}{h_2}}{n(n + g_2 M_2(n))} - \frac{2h_2}{\pi^2} \frac{f(a)}{E_3^{(2)}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \frac{\pi \xi}{h_2}}{n(n + g_2 M_2(n))}, \\ \frac{dw_1(a, z)}{dz} &= -\frac{2}{\pi} \frac{f(a)}{E_3^{(1)}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n \frac{\pi z}{h_1}}{n + g_1 M_1(n)} + \frac{2}{\pi} \frac{P_0^{(1)}}{E_c F_c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi z}{h_1}}{n + g_1 M_1(n)}, \\ \frac{dw_2(a, \xi)}{dz} &= -\frac{2}{\pi} \frac{P_0^{(2)}}{E_c F_c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n \frac{\pi \xi}{h_2}}{n + g_2 M_2(n)} + \frac{2}{\pi} \frac{f(a)}{E_3^{(2)}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi \xi}{h_2}}{n + g_2 M_2(n)}, \\ \frac{\partial w_1}{\partial r} \Big|_{r=a} &= -\frac{2\omega_1}{\pi} \frac{f(a)}{E_3^{(1)}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n \frac{\pi z}{h_1}}{n M_1^{-1}(n) + g_1} + \frac{2\omega_1}{\pi} \frac{P_0^{(1)}}{E_c F_c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \frac{\pi z}{h_1}}{n M_1^{-1}(n) + g_1}, \\ \frac{\partial w_2}{\partial r} \Big|_{r=a} &= -\frac{2\omega_{21}}{\pi} \frac{P_0^{(2)}}{E_c F_c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n \frac{\pi \xi}{h_2}}{n M_2^{-1}(n) + g_2} + \frac{2\omega_2}{\pi} \frac{f(a)}{E_3^{(2)}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \frac{\pi \xi}{h_2}}{n M_2^{-1}(n) + g_2}. \end{aligned}$$

Невідоме значення  $f(a)$  знаходиться з умови  $w_1(a, h_1) = w_2(a, 0)$ .

$$f(a) = \frac{P_0^{(1)} E_3^{(1)}}{E_c F_c} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+g_1 M_1(n))} + \frac{h_2 P_0^{(2)}}{h_1 P_0^{(1)}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+g_2 M_2(n))}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+g_1 M_1(n))} + \frac{h_2}{h_1} + \frac{E_3^{(1)}}{E_3^{(2)}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+g_2 M_2(n))}}$$

Зусилля в стрингері  $N(z)$  та зусилля контактної взаємодії визначаються за формулами

$$N(z) = E_c F_c dw(a, z) / dz, q(z) = -2\pi\alpha G(\partial w / \partial r) \Big|_{r=a}$$

Якщо  $h_2 = 0$ , тоді приходимо до задачі про передачу навантаження від стержня до шару товщини  $h_1$ . Якщо  $h_2 = 0, h_1 \rightarrow \infty$ , тоді отримаємо розв'язок задачі про передачу навантаження до ортотропного напівнескінченного в'язкопружного тіла. Такі граничні переходи дозволяють перевірити отримані запропонованим підходом результати, оскільки більш спрощені варіанти задач розв'язані.

Обернене перетворення Лапласа визначає зусилля  $N$  та  $q$  в залежності від координати та часу. Для переходу до оригіналів зусилля представляють у вигляді рядів за малим параметром  $\bar{\varepsilon}$ , що залежить від  $p$

$$N(z, p) = [N_0(z) + N_1(z)\bar{\varepsilon} + N_2(z)\bar{\varepsilon}^2 + \dots] / p, \\ q(z, p) = [q_0(z) + q_1(z)\bar{\varepsilon} + q_2(z)\bar{\varepsilon}^2 + \dots] / p.$$

Коефіцієнти вказаних розкладань простіше знаходити для «малих» та «великих» значень параметра. Такі граничні значення зусиль можна з'єднати за допомогою апроксиманти Паде [4,5], і таким чином, отримати розв'язки для всіх значень часу.

Наприклад, в задачі про передачу навантаження до півпростору, що має переважно зсувну повзучість при  $p \rightarrow \infty, \bar{\varepsilon} = k / (p + \beta)$ , при  $p \rightarrow 0, \bar{\varepsilon} = \Delta p / (p + \beta), \Delta = -k / (\beta + k)$ .

Оригінали функцій при малих значеннях часу мають вигляд

$$N(z, t) = N_0(z) + N_{10}(z) (k / \beta) (1 - e^{-\beta t}) + \dots, \\ q(z, t) = q_0(z) + q_{10}(z) (k / \beta) (1 - e^{-\beta t}) + \dots, \tag{6}$$

$$N_0(z) = \frac{2P_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin z s}{s + g_0 M_0(s)} ds,$$

$$N_{10}(z) = \frac{2P_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{g_0 a \omega_0 s [1 - M_0^2(s)] + 2g_0 M_0(s)}{2[s + g_0 M_0(s)]^2} \sin z s ds,$$

$$q_0(z) = \frac{2P_0g_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos z s}{g_0 + s M_0^{-1}(s)} ds, \quad (7)$$

$$q_{10}(z) = \frac{2P_0g_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{a\omega_0 s^2 [1 - M_0^{-2}(s)] - 2sM_0^{-1}(s)}{2[g_0 + sM_0^{-1}(s)]^2} \cos z s ds,$$

$$M_0(s) = K_1(a\omega_0 s) / K_0(a\omega_0 s).$$

При великих значеннях часу

$$\begin{aligned} N(z,t) &= N_{\infty}(z) + N_{1\infty}(z) \Delta e^{-\lambda t} + \dots, \\ q(z,t) &= q_{\infty}(z) + q_{1\infty}(z) \Delta e^{-\lambda t} + \dots \end{aligned}$$

Коефіцієнти розкладань знаходяться з (7) після заміни  $\omega_0$  на  $\omega_{\infty}$ ,  $g_0$  на  $g_{\infty}$ , де  $\omega_{\infty} = \omega_0 (1 + k / \beta)^{1/2}$ ,  $g_{\infty} = g_0 (1 + k / \beta)^{-1/2}$ .

Для цього ж випадку одна з апроксимант Паде (при обраних значеннях параметрів) має вигляд

$$N^* = \frac{0,915 - 0,11t - 1,31 e^{0,5t}}{1 - 0,134t - 1,55 e^{0,5t}}.$$

На рис. 1, 2 показані граничні значення  $N^* = N / P_0$  та  $q^* = q / P_0 g_0$  при  $t \rightarrow 0$  (криві 1) та  $t \rightarrow \infty$  (криві 2).

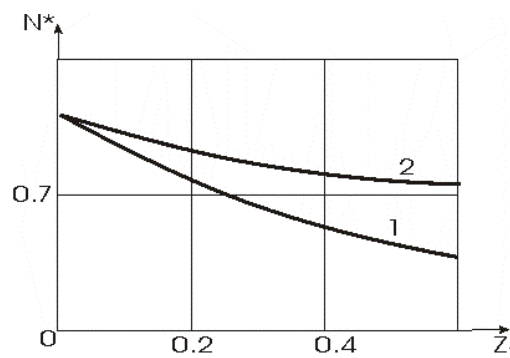


Рис. 1. Зміна зусиль у стержні.



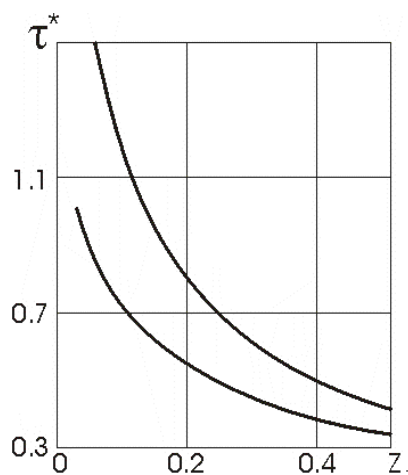


Рис. 2. Зміна зусилля контактної взаємодії.

### Висновки

Практичне значення отриманих результатів полягає в можливості застосування розробленої методики розв'язання задач для чисельної реалізації при розрахунках, пов'язаних з проектуванням складних багат шарових конструкцій із сучасних композиційних матеріалів. Отримані розв'язки просторової контактної задачі можуть бути використані як еталонні для визначення меж вірогідності наближених методів розв'язання задач теорії пружності для багат шарових середовищ.

### Список використаної літератури

1. Гузь А. Н., Бабич С. Ю., Рудницький В. Б. Контактное взаимодействие упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. Развитие идей Л. А. Галина в механике: монографія. Москва; Ижевск: Изд-во Ин-та компьютерных исследований, 2013. 480 с.
2. Приварников А. К., Спица О. Г. Осесимметричні контактні задачі для пружних багат шарових плит. *Вісник Донецького університету. Серія А. Природничі науки*. 2005. Вип. 1. С. 53–57.
3. Калоеров С. А., Самодуров А. А. Задача электровязкоупругости для многосвязных пластинок. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2014. Т. 57. № 3. С. 62–77.
4. Кагадій Т. С. Метод возмущений в механике упругих (вязкоупругих) анизотропных и композиционных материалов: монографія. Днепропетровск: РИК НГА України, 1998. 260 с.
5. Кагадій Т. С., Білова О. В., Щербина І. В. Застосування методу малого параметру при моделюванні задач теорії в'язкопружності. *Вісник Херсонського національного університету*. 2019. 2(69). Ч.3. С. 69–76.
6. Кагадій Т. С. Передача нагрузки двуслойным телам конечных размеров. *Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Механіка*. 2000. Т. 2. Вип. 3. С. 38–46.

### References

1. Guz, A. N., Babich, S. Yu., & Rudnitskiy, V. B. (2013). Kontaktnoe vzaimodeystvie uprugih tel s nachalnymi (ostatochnymi) napryazheniyami. Razvitie idey L. A. Galina v mehanike: monografIya. Moskva; Izhevsk: Izd-vo In-ta kompyuternyih issledovaniy.
2. Pryvarnykov, A. K., & Spysia, O. H. (2005). Osesymetrychni kontaktni zadachi dlia pruzhnykh bahatosharovykh plyt. *Visnyk Donetskoho universytetu. Seriiia A. Pryrodnychi nauky*. **1**, 53–57.

3. Kaloerov, S. A., & Samodurov, A. A. (2014). Zadacha elektrov'yazkouprugosti dlya mnogosvyaznykh platinok. *Matematichni metodi ta fiziko-mehanichni polya*. 57, 3, 62–77.
4. Kagadiy, T. S. (1998). Metod vozmuscheniy v mehanike uprugih (vyazkouprugih) anizotropnykh i kompozitsionnykh materialov: monografiya. Dnepropetrovsk: RIK NGA Ukraini.
5. Kahadii, T. S., Bilova, O. V., & Shcherbyna, I. V. (2019). Zastosuvannia metodu maloho parametru pry modeliuvanni zadach teorii v'iazkopruzhnosti. *Visnyk Khersonskoho natsionalnoho universytetu*. 2(69), Part 3, 69–76.
6. Kagadiy, T. S. (2000). Peredacha nagruzki dvusloynnyim telam konechnykh rozmerov. *Visnik Dnipropetrovskogo universitetu. Mehanika*. 2, 3, 38–46.

Кагадій Тетяна Станіславівна – д.ф.-м.н., професор, професор кафедри вищої математики, НТУ «Дніпровська політехніка», Дніпро, Україна, e-mail: tkagadiy@gmail.com, ORCID: 0000-0001-6116-4971.

Шпорта Анна Григорівна – асистент кафедри вищої математики, НТУ «Дніпровська політехніка», Дніпро, Україна, e-mail: shportaanna@ukr.net, ORCID: 0000-0002-1260-7358.

Білова Оксана Вікторівна – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри вищої математики, Національна металургійна академія України, Дніпро, Україна, e-mail: okbelova00@gmail.com, ORCID: 0000-0001-6258-6164.

Щербина Ірина Володимирівна – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри вищої математики та фізики, Дніпровський державний аграрно-економічний університет, Дніпро, Україна, e-mail: sherbinaiv@ukr.net, ORCID:0000-0003-3968-4326.