

УДК 519.652

А. Н. ХОМЧЕНКО  
Чорноморський національний університет ім. Петра Могили  
О.І. ЛИТВИНЕНКО, С.О. КАРПОВА  
Херсонська філія Національного університету кораблебудування ім. адм. Макарова  
І.О. АСТІОНЕНКО  
Херсонський національний технічний університет

## МОДЕЛІ КОНОЇДІВ ТА МЕТОД ПЕРЕРІЗІВ

Стаття присвячена дослідженню нових специфічних властивостей коноїдів – лінійчатих поверхонь Каталана (1843), які застосовуються в сучасному методі скінченних елементів (МСЕ). Коноїди з'явилися в МСЕ несподівано, коли у 1968 р. Ергатудіс, Айронс і Зенкевич сконструювали підбором перші серендипові скінченні елементи (СЕ): білінійний Q4, біквадратичний Q8 і бікубічний Q12. Коноїди застосовуються у якості базисних функцій (функцій впливу) у всіх (без винятку) моделях стандартних серендипових СЕ, незважаючи на неприродні спектри еквівалентних вузлових навантажень (фізична неадекватність). Саме коноїди, які асоціюються з проміжними вузлами інтерполяції, спричинили появу від'ємних навантажень у кутових вузлах СЕ. Найавторитетніший фахівець проф. О. Зінкевич радив змиритися з цим недоліком. Позбутися фізичної неадекватності в кутових вузлах можна, якщо відмовитися від коноїдів в проміжних вузлах. Але такі серендипові СЕ вже належать до альтернативних моделей. Варто зауважити, що коноїди використовують не тільки в МСЕ. Технологічні та естетичні якості коноїдів давно приваблюють архітекторів і будівельників. Потрібно знайти такі коноїди, які забезпечують фізичну адекватність моделей. Треба звернути увагу на тригонометричні коноїди, які недостатньо досліджені. Попередні дослідження свідчать, що тіло, яке утворюється коноїдом і носієм, може бути сімпсоновим. Поповнення модельного ряду сімпсонових тіл – цікава самостійна задача. Але на коноїдах правило трьох перерізів (кубатура Сімпсона) не завжди дає правильну відповідь. Головне – правильно обчислити площу середнього перерізу правильно вибраної трійки перерізів. Ця задача має самостійне значення. Підібрані приклади коноїдів дають можливість порівняти прості і наочні підходи з процедурою Монте-Карло. Когнітивно-графічний аналіз – найкраща інформаційна технологія, особливо у поєднанні з комп'ютерними експериментами.

Ключові слова: коноїд; поліноміальний (стандарт) та тригонометричний (альтернатива), спектр вузлових навантажень на СЕ, фізична неадекватність стандартної моделі; площа перерізу коноїда, геометрична оцінка площі, статистична оцінка площі, напрямна коноїда, твірна коноїда.

А. Н. ХОМЧЕНКО  
Чорноморский национальный университет им. Петра Могилы  
Е.И. ЛИТВИНЕНКО, С.О. КАРПОВА  
Херсонский филиал Национального университета кораблестроения им. адм. Макарова  
И.А. АСТИОНЕНКО  
Херсонский национальный технический университет

## МОДЕЛИ КОНОИДОВ И МЕТОД СЕЧЕНИЙ

Статья посвящена исследованию новых специфических свойств коноидов – линейчатых поверхностей Каталана (1843), которые применяются в современном методе конечных элементов (МКЭ). Коноиды появились в МКЭ неожиданно, когда в 1968 г. Эргатудис, Айронс и Зенкевич сконструировали подбором первые серендиповы конечные элементы (КЭ): билинейный Q4, биквадратичный Q8 и бикубический Q12. Коноиды применяются в качестве базисных функций (функций влияния) во всех (без исключения) моделях стандартных серендиповых КЭ, несмотря на неестественные спектры эквивалентных узловых нагрузок (физическая неадекватность). Именно коноиды, которые ассоциируются с промежуточными узлами интерполяции, привели к появлению отрицательных нагрузок в угловых узлах КЭ. Самый авторитетный специалист проф. О. Зинкевич советовал смириться с этим недостатком. Избавиться физической неадекватности в угловых узлах можно, если отказаться от коноидов в промежуточных узлах. Но такие серендиповы КЭ уже принадлежат к альтернативным моделям. Стоит отметить, что коноиды используют не только в МКЭ. Технологические и эстетические свойства коноидов давно привлекают архитекторов и строителей. Необходимо найти такие коноиды, которые обеспечивают физическую адекватность моделей. Необходимо обратить

внимание на тригонометрические коноиды, которые недостаточно исследованы. Предыдущие исследования свидетельствуют, что тело, которое образуется коноидом и носителем, может быть симпсоновым. Пополнение модельного ряда симпсоновых тел – интересная самостоятельная задача. Но на коноидах правило трёх сечений (кубатура Симпсона) не всегда дает правильный ответ. Главное – правильно вычислить площадь среднего сечения правильно выбранной тройки сечений. Эта задача имеет самостоятельное значение. Подобранные примеры коноидов дают возможность сравнить простые и наглядные подходы с процедурой Монте-Карло. Когнитивно-графический анализ – наилучшая информационная технология, особенно в сочетании с компьютерными экспериментами.

Ключевые слова: коноид: полиномиальный (стандарт) и тригонометрический (альтернатива), спектр угловых нагрузок на КЭ, физическая неадекватность стандартной модели; площадь сечения коноида, геометрическая оценка площади, статистическая оценка площади. направляющая коноида, образующая коноида.

A. N. KHOMCHENKO

Petro Mohyla Black Sea National University

O.I. LYTUVYENKO, S.O. KARPOVA

Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Kherson branch

I.O. ASTIONENKO

Kherson National Technical University

## CONOID MODELS AND METHOD OF CROSS SECTIONS

*The article is devoted to the study of new specific properties of conoids - linear surfaces of Catalan (1843), which are used in the modern method of finite elements (MFE). Conoids appeared in the MFE unexpectedly when, in 1968, Ergatoudis, Irons, and Zienkiewicz constructed by selection the first serendipity finite elements (CEs): the bilinear Q4, the biquadratic Q8, and the bicubic Q12. Conoids are used as basic functions (influence functions) in all (without exception) models of standard serendipity FE, despite the unnatural spectra of equivalent nodal loads (physical inadequacy). It is the conoids, which are associated with the intermediate interpolation nodes, caused the negative loads in the angular nodes of the FE. The most authoritative specialist prof. O. Zienkiewicz advised to accept this flaw. It is possible to get rid of physical inadequacy in angular nodes if one refuses conoids in intermediate nodes. But such serendipity FEs belong to alternative models already. It should be noted that conoids are used not only in MFE. Technological and aesthetic qualities of conoids have long attracted architects and builders. It is necessary to find such conoids, which provide physical adequacy of models. Attention should be paid to trigonometric conoids, which are insufficiently studied. Previous studies show that the body formed by the conoid and the carrier may be Simpson one. Replenishment of the model range of Simpson bodies is an interesting independent task. However, the rule of three sections (Simpson's cubature) does not always give the correct answer on conoids. The main thing is to calculate properly the area of the middle cross-section of the correctly selected three cross-sections. This task has an independent meaning. Selected examples of conoids make it possible to compare simple and clear approaches with the Monte-Carlo procedure. Cognitive and graphical analysis is the best information technology, especially in combination with computer experiments.*

*Keywords: conoid, polynomial (standard) and trigonometric (alternative), spectrum of nodal loads on FE, physical inadequacy of standard model; area of conoid cross-section, geometric assessment of area, statistical assessment of area, conoid directing line, conoid generating line.*

### Постановка проблеми

Проблема заміни коноїдів з поліноміальними напрямними коноїдами з тригонометричними напрямними цікавить не тільки фахівців з МСЕ. Це новий підхід до задачі відновлення функцій двох аргументів, який певною мірою руйнує традиції матричної алгебри і алгебраїчних схем Паскаля. Зрозуміло, що інтерполяційна гіпотеза Лагранжа лишається, але в деяких місцях доводиться змінювати термінологію. В центрі нашої уваги буде квадрат  $Q8$  ( $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ ) та інтегральні характеристики його функцій впливу. Щоб позбутися від'ємних значень середньої аплікати “кутової” функції, треба навчитися регулювати середні значення аплікати “проміжної” функції. Фізична неадекватність зникає, коли середнє значення аплікати “проміжної” функції не перевищує 0,25. В стандартних серендипових СЕ ця вимога, як відомо, не виконується.

Прихильники механічних аналогій (учні і послідовники О. Зенкевича) припинили пошуки, а ми опинилися перед вибором: змиритися з фізичною неадекватністю серендипових моделей, або відмовитись від коноїдів. Академік Л. Мандельштам попереджав, що математична модель обов'язково помститься за ідеалізацію. Ми продовжуємо пошуки адекватних моделей, але готуємося до нових викликів.

### **Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Усі (без винятку) стандартні моделі серендипових СЕ використовують коноїди у якості базисних поверхонь [1-3]. На  $Q4$  усі базисні поверхні – коноїди, на  $Q8$  половина поверхонь – коноїди, на  $Q12$  із 12 поверхонь вісім коноїдів. Як відомо [4-5], стандартні бази реалізують фізично неадекватні спектри еквівалентних вузлових навантажень. Сьогодні існує багато нематричних методів моделювання фізично адекватних СЕ [6, 7]. Про один з таких методів йдеться в роботі [8]. Склалася думка, що фізичну адекватність серендипових СЕ можна забезпечити лише шляхом відмови від коноїдів. У цій роботі ми покажемо, що відмовлятися від коноїдів не обов'язково. Достатньо замінити поліноміальну напрямну тригонометричною. Дослідження свідчать, що переріз коноїда може суттєво відрізнятись від конічного перерізу, хоча ілюзія схожості існує. Для обчислення площі перерізу коноїда ми пропонуємо простий і наочний геометричний метод, який порівнюється з результатами процедури метода Монте-Карло. Звернутися до методу Монте-Карло надихає цікава стаття американського математика професора Каліфорнійського університету М. Шіллінга [9]. Користувачів завжди приваблювали простота, алгоритмічність і надійність метода. Дуже важлива нечутливість метода до конфігурації границь розрахункової області. Колишні недоліки метода Монте-Карло лишилися в минулому. Сучасні комп'ютери дуже швидко створюють надзвичайно велику кількість випадкових даних. Таким чином, сучасний метод Монте-Карло може бути гарантом точності обчислень, якщо реалізувати довгу серію спостережень (наприклад,  $10^6$ ).

### **Мета дослідження**

Мета дослідження – сконструювати на тригонометричних коноїдах математично обґрунтовані і фізично адекватні моделі  $Q8$ . Звернути увагу на геометричні аспекти фізичної неадекватності спектрів вузлових навантажень стандартних серендипових СЕ. За допомогою перерізів показати стереометричні особливості нових моделей.

### **Викладення основного матеріалу дослідження**

Ми розглядаємо модельний ряд коноїдів, які мають властивості базисних функцій інтерполяції і асоціюються із проміжними вузлами СЕ  $Q8$ . Носієм елемента є канонічний квадрат ( $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ ), контрольний вузол має координати  $(0, -1)$ . Вісім вузлів СЕ розташовані рівномірно на границі носія, включаючи кути [1-3]. На жаль, не всі коноїди забезпечують фізичну адекватність спектра еквівалентних вузлових навантажень. Інтегральна характеристика залежить від об'єму між поверхнею коноїда і площиною носія. Як тільки об'єм перевищує 1 куб. од., в “кутових” вузлах виникають від'ємні навантаження. Стандартний коноїд, отриманий підбором [1] і підтверджений матричним методом [2, 5] та нематричним методом [3], охоплює об'єм  $4/3$  куб. од. Якщо стискати коноїд вздовж  $Ox$ , об'єм  $V$  зменшується. Саме цю деформацію можна спостерігати на конкретних моделях:

модель 1	$f(x, y) = \frac{1}{2} \sqrt{\cos \frac{\pi x}{2}} \cdot (1 - y), \quad V > 1;$	
модель 2 (standard)	$f(x, y) = \frac{1}{2} (1 - x^2) \cdot (1 - y), \quad V > 1;$	
модель 3	$f(x, y) = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi x}{2} \cdot (1 - y), \quad V > 1;$	(1)
модель 4	$f(x, y) = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\pi x}{2} \cdot (1 - y), \quad V = 1;$	
модель 5	$f(x, y) = \frac{1}{2} \cos^4 \frac{\pi x}{2} \cdot (1 - y), \quad V = \frac{3}{4}.$	

Як бачимо, недостатньо замінити поліноміальну напрямну тригонометричною (моделі 1, 3), треба стиснути коноїд (моделі 4, 5). Зрозуміло, що зменшення  $V$  супроводжується зменшенням площі горизонтального перерізу, наприклад, на середньому рівні  $f(x, y) = 0,5$  (рис. 1, а). Саме середній переріз часто використовують при обчисленні об'єму (правило трьох перерізів Сімпсона). Криволінійна трапеція в горизонтальному перерізі коноїда заслуговує на увагу (рис. 1, б).

Зазначимо, що не завжди середній переріз реагує на зменшення об'єму тіла. У коноїдів (1) є такий нечутливий переріз  $x = 0$ . Якщо обчислювати об'єм коноїда за правилом Сімпсона, треба уважно перевіряти придатність (інформативність) перерізів. Неважко переконатися, що найбільш інформативним є горизонтальні перерізи коноїдів. На рис. 1, б зображено типовий приклад середнього перерізу коноїда.

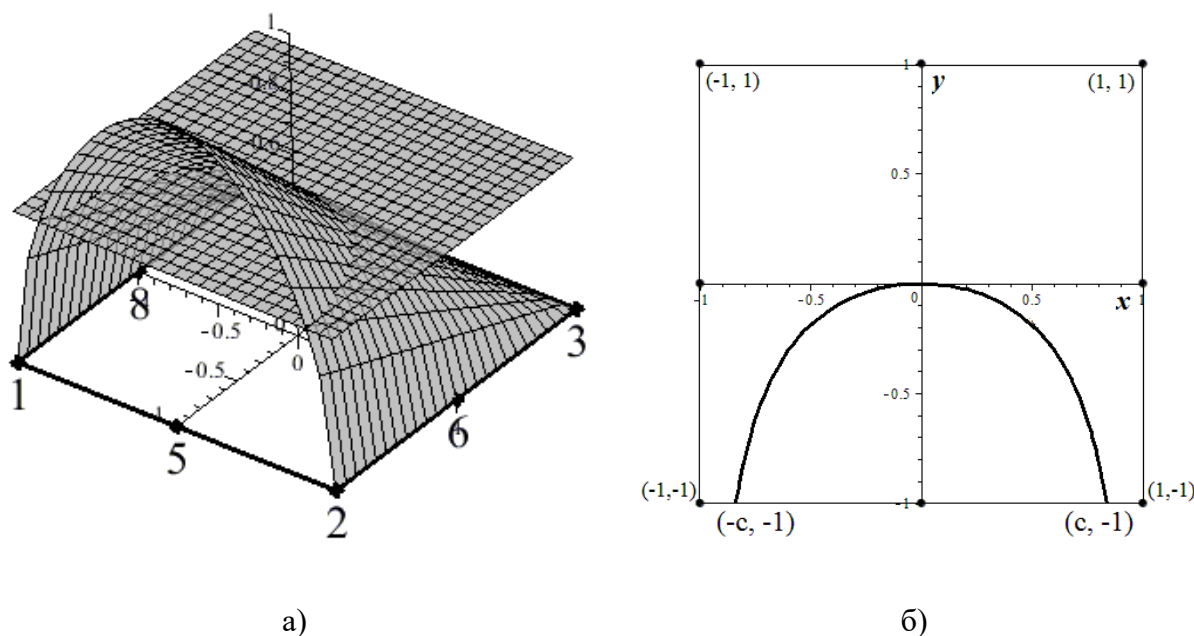


Рис. 1. Переріз коноїда (1) на рівні  $f(x, y) = 0,5$

На площу криволінійної трапеції впливає лише параметр  $c$ , який змінюється в залежності від моделі. Найбільше значення  $c = 0,84$  має модель 1, найменше значення  $c = 0,44$  має модель 5. На перший погляд задача обчислення площі криволінійної

трапеції здається зовсім простою, тому що контур нагадує фрагмент параболи або половину еліпса. Аналіз горизонтальних перерізів інших рівнів переконує, що коноїдні перерізи суттєво відрізняються від конічних перерізів. Вони мають більш складну конфігурацію. Це привід звернутися до експериментів метода Монте-Карло [9]. Порівняння з результатами метода Монте-Карло ( $10^6$  випадкових точок) показують, що в середньому перерізі парабола занижує результат, а еліпс завищує. Цікаво відшукати простий і наочний спосіб усереднення відхилень, який швидко і без комп'ютера наближає результати до експериментальних. Спочатку візьмемо просте правило Сімпсона (три вузли). Враховуючи, що із трьох вузлів (рис. 1, б) “працює” лише один (центральный), можна передбачити, що результат буде заниженим. Нагадаємо, що формула Сімпсона спирається на квадратичну параболу і має вигляд:

$$S_{cep} \approx 2c \left( \frac{1}{6} \cdot f(-c) + \frac{4}{6} \cdot f(0) + \frac{1}{6} \cdot f(c) \right). \quad (2)$$

Із (2) маємо просту формулу  $S_{cep} = \frac{4}{3}c$ , яка, на жаль, систематично занижує результат у порівнянні з процедурою Монте-Карло. Якщо виконати ретельно рис.2, то буде видно, що площа прямокутника з висотою  $2/3$  менша за площу криволінійної трапеції.

Тут потрібна квадратура з більш вагомим центральним вузлом. Таку квадратуру вдалося відшукати в [4]. Відповідну формулу використовував Коллатц для специфічного класу функцій. Формула Коллатца має вигляд:

$$S_{cep} \approx 2c \left( \frac{1}{12} \cdot f(-c) + \frac{5}{6} \cdot f(0) + \frac{1}{12} \cdot f(c) \right). \quad (3)$$

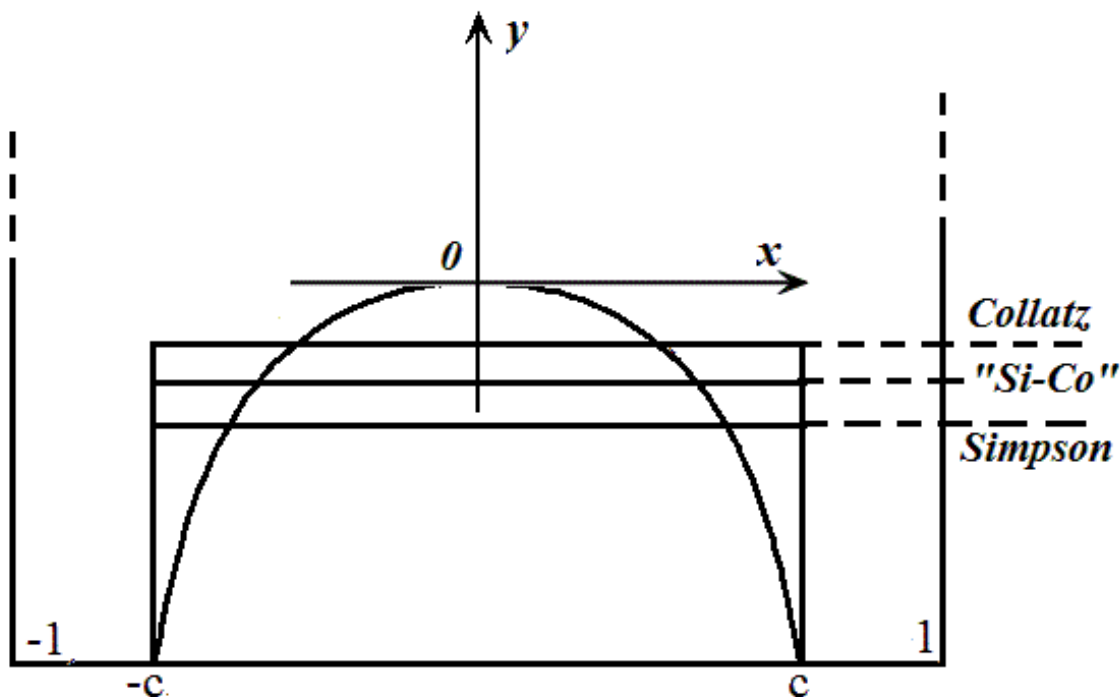


Рис. 2. Результати пошуку еквівалентного прямокутника "Si – Co"

Тепер  $S_{\text{сеп}} = \frac{5}{3}c$ . Виявляється, що формула (3) систематично завищує  $S_{\text{сеп}}$  коноїдів. Хто і як сконструював квадратуру Коллатца ми не знаємо, але переконалися, що її можна отримати із квадратури Гаусса-Лобатто (чотири вузли) шляхом об'єднання двох внутрішніх вузлів в один центральний. На рис. 2 площа прямокутника Коллатца з висотою  $5/6$  більша за площу криволінійної трапеції. Обставини підштовхують до арифметичного усереднення. Ми зробили усереднення квадратур Сімпсона і Коллатца і отримали гібридну квадратуру “Si – Ko” :

$$S_{\text{сеп}} \approx 2c \left( \frac{1}{8} \cdot f(-c) + \frac{3}{4} \cdot f(0) + \frac{1}{8} \cdot f(c) \right). \quad (4)$$

Тепер  $S_{\text{сеп}} = \frac{3}{2}c$ . Це краща оцінка площі середнього перерізу коноїда. На рис. 2 прямокутник “Si – Ko” і криволінійна трапеція еквівалентні.

Формула  $S_{\text{сеп}} = 1,5c$  викликає довіру, тому що її можна отримати різними способами. Наприклад, шляхом об'єднання двох внутрішніх вузлів квадратури Ньютона-Котеса (правило “3/8”) в один центральний, ми отримуємо (4). Інший спосіб полягає в арифметичному усередненні площ вписаного в криволінійну трапецію трикутника і описаного прямокутника. Тепер ми бачимо, що не варто було відмовлятися від формули площі половини еліпса  $S_{\text{сеп}} \approx \frac{1}{2} \pi \cdot c$  (рис. 1). Щоб наблизити завищений теоретичний результат до експериментального достатньо взяти  $\pi = 3$ . Лишається навести результати теорії і експериментів метода Монте-Карло (табл.1).

Табл. 1

Площа середнього перерізу		
Модель коноїда	Теорія	Експеримент
1	1,26	1,29
2	1,06	1,06
3	1,00	0,99
4	0,75	0,73
5	0,66	0,64

Вузлові навантаження, як завжди, обчислюються за формулами Ньютона-Котеса:

$$\gamma = \frac{1}{S} \iint_D f(x, y) dx dy, \quad \text{де } S - \text{площа носія.} \quad (5)$$

Обчислення за формулою (5) свідчать про те, що в кожному проміжному вузлі моделей 1-3 навантаження перевищує 0,25. Це означає, що в кутових вузлах виникає феномен “гравітаційного відштовхування” (парадокс Зенкевича [2]). Моделі 4 і 5 фізично адекватні. У моделі 4 одинична масова сила рівномірно розподілена між “проміжними” вузлами, а “кутові” вузли не навантажені. У моделі 5 кожний

“проміжний” вузол несе  $\frac{3}{16}$ , а кожний “кутовий” вузол  $\frac{1}{16}$  одиничної масової сили. До речі, “кутові” функції елемента  $Q8$  легко будуються за правилом Тейлора [3].

### Висновки

Бібліотека серендипових СЕ поповнилася новими моделями із фізично адекватними інтегральними характеристиками. Особливість нових моделей в тому, що в “проміжних” базисних поверхнях (коноїдах) замість “поліноміальних” напрямних вперше задіяні “тригонометричні” напрямні. Це іще один приклад “м’якого” математичного моделювання (за версією акад. В.І. Арнольда). На перспективу готується матеріал для тригонометричного конструювання “дугих” мод скінченного елемента  $Q9$ .

### Список використаної літератури

1. Ergatoudis I., Irons B.M., Zienkiewicz O. C. Curved isoperimetric “quadrilateral” elements for finite element analysis. *Internat. J. Solids Struct.* 1968, № 4. P. 31-42.
2. Zienkiewicz O. C. The Finite Element Method in Engineering Science. London: McGraw-Hill, 1971. 571 p.
3. Taylor R. L. On the Completeness of Shape Functions for Finite Element Analysis. *J. Num. Meth. Eng.* 1972. Vol. 4. № 1. P. 17–22.
4. Strang G., Fix G. J. An Analysis of the Finite Element Method. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc. 1973.
5. Norri D. H., de Vries G. An Introduction to Finite Element Analysis. London: Academic Press, 1978. 301 p.
6. Astionenko I.O., Litvinenko O.I., Osipova N.V., Tuluchenko G.Ya. and Khomchenko A.N.. Cognitive-graphic Method for Constructing of Hierarchical Form of Basic Functions of Biquadratic Finite Element. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences*. AIP Conference Proceedings report. 2016. V. 1773. P. 040002-1 – 040002-11. DOI: 10.1063/1.4964965.
7. Хомченко А.Н., Литвиненко О.І., Астіоненко І.О. Когнітивно-графічний аналіз ієрархічних базисів скінченних елементів: монографія. Херсон: ОЛДІ-плюс, 2019. 260 с.
8. Хомченко А.Н., Астіоненко І.А. Гауссова кривизна серендипових поверхностей или как прогнуть коноид. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2016, 3 (58). С. 444-447.
9. Шіллінг М. Ймовірність: від Монте-Карло до геометрії. *У світі математики*. 2000. Т. 6, вип. 3. С. 20-23.

### References

1. Ergatoudis, I., Irons, B.M. & Zienkiewicz, O. C. (1968). Curved isoperimetric “quadrilateral” elements for finite element analysis. *Internat. J. Solids Struct.* **4**, 31-42.
2. Zienkiewicz, O. C. (1971). The Finite Element Method in Engineering Science. London: McGraw-Hill.
3. Taylor, R. L. (1972). On the Completeness of Shape Functions for Finite Element Analysis. *J. Num. Meth. Eng.* **4**, 1, 17–22.
4. Strang, G., & Fix, G. J. (1973). An Analysis of the Finite Element Method. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
5. Norri, D. H. & de Vries, G. (1978). An Introduction to Finite Element Analysis. London: Academic Press.

6. Astionenko, I.O., Litvinenko, O.I., Osipova, N.V., Tuluchenko, G.Ya. & Khomchenko, A.N. (2016). Cognitive-graphic Method for Constructing of Hierarchical Form of Basic Functions of Biquadratic Finite Element. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences*. AIP Conference Proceedings report. **1773**, 040002-1 – 040002-11. DOI: 10.1063/1.4964965.
7. Khomchenko, A.N., Lytvynenko, O.I. & Astionenko, I.O. (2019). Kohnityvno-hrafichnyi analiz hierarkhichnykh bazysiv skinchennykh elementiv. Monohrafiia. Kherson: OLDI-plus.
8. Homchenko, A.N. & Astionenko, I.A. (2016). Gaussova krivizna serendipoviyh poverhnostey ili kak prognut konoid. *Visnyk Khersonskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu*. **3** (58), 444-447.
9. Shillinh, M. (2000). Ymovirnist: vid Monte-Karlo do heometrii. *U sviti matematyky*. **6**, 3, 20-23.

Хомченко Анатолій Никифорович – д.ф.-м.н., професор, професор кафедри інтелектуальних інформаційних систем Чорноморського національного університету ім. П. Могили, e-mail: [khan@chmnu.edu.ua](mailto:khan@chmnu.edu.ua), ORCID: 0000-0002-5053-388X.

Литвиненко Олена Іванівна – к.т.н., доцент, доцент кафедри інформаційних технологій та фізико-математичних дисциплін Херсонської філії Національного університету кораблебудування ім. адм. Макарова, e-mail: [mmkntu@gmail.com](mailto:mmkntu@gmail.com), ORCID: 0000-0001-9890-6959.

Карпова Світлана Олегівна – старший викладач кафедри інформаційних технологій та фізико-математичних дисциплін Херсонської філії Національного університету кораблебудування ім. адм. Макарова, e-mail: [sokarova@gmail.com](mailto:sokarova@gmail.com), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7208-3595>.

Астіоненко Ігор Олександрович – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри вищої математики і математичного моделювання Херсонського національного технічного університету, e-mail: [astia@ukr.net](mailto:astia@ukr.net), ORCID: 0000-0002-5831-6353.