УДК 539.3

Н.О. ЯРЕЦЬКА
Хмельницький національний університет

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНОГО КІЛЬЦЕВОГО ШТАМПА ТА ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

Стаття присвячена математичному моделюванню контактної взаємодії попередньо напруженого кільцевого штампа та пружного півпростору з початковими (залишковими) напруженнями. Представлено розв'язок для кільцевого пружного штампа, що враховує вплив початкових напружень. Задачу розв'язано у випадку рівних коренів визначального рівняння. Дослідження представлено в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій у рамках лінеаризованої теорії пружності при довільній структурі пружного потенціалу. Припускається, що початкові стани пружного кільцевого штампа та пружного півпростору однорідні та рівні. Дослідження проводиться в координатах початкового деформованого стану, які пов'язані з лагранжевими координатами (природного стану). Крім того, вплив кільцевого штампа викликає невеликі збурення відповідних величин основного напружено-деформованого стану. Також передбачається, що пружний кільцевий штамп та пружний півпростір виготовлені з різних ізотропних, трансверсально-ізотропних або композиційних матеріалів. Наведені загальні розв'язки основних диференціальних рівнянь лінеаризованої теорії пружності у випадку осесиметричної деформації для скінченної кільцевої області. У результаті, розв'язки поставленої задачі представлені у вигляді нескінченних рядів, коефіцієнти яких визначаються з нескінченної системи алгебраїчних рівнянь. Проведено дослідження впливу початкових (залишкових) напружень у півпросторі та кільцевому штампі на розподіл контактних характеристик в області контакту. У випадку рівних коренів та потенціалу Бартенєва-Хазановича наведено результати чисельного аналізу, що подані у вигляді графіків, які ілюструють достатньо значний вплив початкових напружень. Отже, вплив початкових напружень на напружено-деформований стан пружного кільцевого штампа, що втискається у пружний півпростір, полягає у тому, що: у випадку стиснення початкові напруження в півпросторі призводять до зменшення напружень у пружному штампі, а у випадку розтягу – до їх збільшення, а для переміщень – навпаки.

Ключові слова: залишкові напруження, рівні корені, лінеаризована теорія пружності, потенціал Бартенєва-Хазановича, нестисливі тіла.

Н.А. ЯРЕЦКАЯ
Хмельницкий национальный университет

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОГО КОЛЬЦЕВОГО ШТАМПА И УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Статья посвящена математическому моделированию контактного взаимодействия предварительно напряженного кольцевого штампа и упругого полупространства с начальными (остаточными) напряжениями. Представлено решение для кольцевого упругого штампа, учитывающее влияние начальных напряжений. Задача решена в случае равных корней определяющего уравнения. Исследование представлено в общем виде для теории больших начальных деформаций и двух вариантов теории малых начальных деформаций в рамках линеаризованной теории упругости при произвольной структуре упругого потенциала. Предполагается, что начальные состояния упругого кольцевого штампа и упругого полупространства однородные и равные. Исследование проведено в координатах начального деформированного состояния, которые связанны с лагранжевыми координатами (естественного состояния). Кроме того, влияние кольцевого штампа вызывает небольшие возмущения соответствующих величин основного напряженно-деформированного состояния. Также предполагается, что упругий кольцевой штамп и упругое полупространство изготовлены из различных изотропных, трансверсально-изотропных или композиционных материалов. Приведены общие решения основных дифференциальных уравнений линеаризованной теории упругости в случае осесимметричной деформации для конечной кольцевой области. В результате, решения поставленной задачи *представлены в виде бесконечных рядов, коэффициенты которых определяются с бесконечной системы алгебраических уравнений. Проведено исследование влияния начальных (остаточных) напряжений в полупространстве и кольцевом штампе на распределение контактных характеристик в области контакта. В случае равных корней и потенциала Бартенева-Хазановича приведены результаты численного анализа, представленные в виде графиков, иллюстрирующих достаточно значительное влияние начальных напряжений. Следовательно, влияние начальных напряжений на напряженно-деформированное состояние упругого кольцевого штампа, который вдавливается в упругое полупространство, заключается в том, что: в случае сжатия начальные напряжения в полупространстве приводят к уменьшению напряжений в упругом штампе, а в случае растяжения - к их увеличению, а для перемещений - наоборот.*

Ключевые слова: остаточные напряжения, равные корни, линеаризированная теория упругости, потенциал Бартенева-Хазановича, несжимаемые тела.

N. O. YARETSKA
Khmelnytsky National University

The article is devoted to the mathematical modeling of the contact interaction of a pre-stressed annular die and an elastic half-space with initial (residual) stresses. The solution for annular elastic die is presented, which take into account the influence of initial stresses. The problem is solved in the case of equal roots of the defining equation. The study is presented in general for the theory of large initial deformations and two versions of the theory of small initial deformations in the framework of the linearized theory of elasticity for an arbitrary structure of the elastic potential. It is assumed that the initial states of the elastic annular die and the elastic half-space are homogeneous and equal. The study was carried out in the coordinates of the initial deformed state, which are associated with the Lagrangian coordinates (natural state). In addition, the effect of the annular die causes small perturbations of the corresponding values of the basic stress-strain state. It is also assumed that the elastic annular die and the elastic half-space are made of various isotropic, transversely isotropic, or composite materials. General solutions of the main differential equations of the linearized theory of elasticity in the case of axisymmetric deformation for a finite annular region are presented. As a result, the solutions to the problem posed are presented in the form of infinite series. The coefficients of this series are determined from an infinite system of algebraic equations. The study of the influence of the initial (residual) stresses in the half-space and the annular die on the distribution of contact characteristics in the contact area is carried out. In the case of equal roots and the Bartenev-Khazanovich`s potential, the results of numerical analysis are presented. These results are presented in the form of graphs. They illustrate the rather significant influence of the initial stresses. Therefore, the effect of initial stresses on the stress-strain state of the elastic annular die, which is pressed into the elastic half-space, is that: in the case of compression, the initial stresses in the half-space lead to a decrease in stresses in the elastic die, and in the case of stretching - to their increase. But in the case of displacement is the opposite.

Key words: residual stresses, unequal roots, linearized theory of elasticity, Bartenev-Khazanovich`s potential, incompressible bodies.

Постановка проблеми

Дослідження та математичне моделювання процесів контактної взаємодії пружних тіл із врахуванням початкових (залишкових) напружень є частиною великої за обсягом та актуальної області механіки суцільних середовищ, що безперервно розвивається. Підтримкою цього слугує виступ академіка НАН України Л. Лобанова із доповіддю «Про виконання цільової програми наукових досліджень НАН України «Надійність і довговічність матеріалів, конструкцій, обладнання та споруд»» [1] від 09.12.2020 р.

Оскільки математичне моделювання фізичних та механічних процесів має достатньо вагомий вплив і дозволяє оптимізувати розрахунок витрат матеріалів, їх економічну вартість, покращити експлуатаційні характеристики конструкцій та деталей машин, що додатково підкреслює важливість проведення досліджень з механіки твердого деформованого тіла.

Тому дана стаття присвячена дослідженню питання контактної взаємодії пружного кільцевого штампа на пружний півпростір з початковими (залишковими) напруженнями (без врахування сил тертя), які мають суттєвий вплив на контактні характеристики процесу [2].

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Враховуючи актуальність дослідження наукових проблем з контактної взаємодії твердих деформованих тіл, а також невпинний розвиток у сучасному світі нових технологій, що стрімко розвиваються і вимагають залучення все складніших математичних розрахунків, кількість наукових публікацій, що охоплює висвітлення даного кола питань, також постійно зростає. Як наслідок, отримані результати із широкого кола питань, що представлені науковими працями [2–13]. Серед яких є ряд публікацій монографічного [3-6] та узагальнюючого [7-10] характеру, які повністю або частково пов'язані з тематикою даного дослідження.

Дослідження проведені в рамках лінеаризованої теорії пружності [4-5] для контактної взаємодії жорстких і пружних штампів із тілами з початковими напруженнями [8-9, 11 - 13].

Так, у статті [11] розглянуто розв'язок контактної задачі про тиск жорсткого кільцевого штампа на півпростір з початковими напруженнями. Вплив початкових напружень на вісесиметричну контактну взаємодію пружних кільцевого штампа та півпростору у випадку нерівних коренів визначального рівняння та потенціалу Трелоара представлено в роботі [12]. Також, числовий розв'язок контактних задач про тиск двох співвісних пружних циліндричних штампів на пружний шар, у якому є залишкові деформації та тиск одного попередньо напруженого циліндра на шар з початковими напруженнями розглянуто в статті [13].

Подібна контактна задача до даного випадку при відсутності початкових напружень (тобто у класичному випадку) розглянута в [6].

Проблема передачі навантаження від пружних стрингерів до несних елементів конструкції розглянуто у працях [8, 9].

А фундаментальні результати лінеаризованої теорії пружності, на яких основані дослідження даної роботи, висвітлені у працях академіка НАН України професора О.М.Гузя [2,4,5,7], який зробив величезний внесок у розвиток сучасної теорії контактної взаємодії пружних тіл.

Мета дослідження

Представити математичну модель, граничні умови та результати числового розв'язку задачі про контактну взаємодію пружного кільцевого штампа та пружного півпростору з початковими напруженнями в межах лінеаризованої теорії пружності без врахування сил тертя. Дослідження виконати у загальному вигляді для стислих і нестисливих тіл для теорії великих початкових деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу. Аналітичні результати представити для випадку рівних коренів визначального рівняння, а числові – для потенціалу Бартенєва-Хазановича. Зробити висновки про вплив початкових напружень на контактну взаємодію пружного кільцевого штампа та пружного півпростору з початковими напруженнями.

Викладення основного матеріалу дослідження

У статті в рамках лінеаризованої теорії пружності досліджена статична контактна задача про тиск попередньо напруженого кільцевого штампа з плоскою основою на півпростір з початковими напруженнями без врахування сил тертя для випадку рівних коренів визначального рівняння [4, 5]. Дослідження виконано у загальному вигляді для стисливих та нестисливих тіл для теорії великих (кінцевих) початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу. Вважаємо, що початкові напружено-деформовані стани у штампі та півпросторі є однорідними та рівними. Величини, що відповідають пружному штампу, будемо записувати з верхнім індексом (1), а величини, які відносяться до попередньо напруженого півпростору – з верхнім індексом (2).

Нехай попередньо напружений кільцевий штамп скінченної висоти H, геометрична вісь симетрії якого співпадає з віссю y_3 циліндричної системи координат $(r,\ \theta,\ y_3)$ і направлена всередину пружного півпростору з початковими напруженнями. Причому, штамп тисне на півпростір з силою P. Величини R_1, R_2 – відповідно внутрішній та зовнішній радіуси штампа. Вважаємо, що зовнішнє навантаження прикладене лише до вільного торця пружного штампа, під дією якого усі точки торця штампа переміщаються вздовж осі симетрії y_3 на одну й ту ж величину ε. Будемо також вважати, що поверхні поза межею контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а на межі контакту переміщення та напруження – неперервні [12].

Для дослідження будемо використовувати координати початкового деформованого стану $(y_1,\ y_2,\ y_3)$, які пов'язані з лагранжевими координатами $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ співвідношеннями: $y_i=\lambda_i x_i$. Тут λ_i $(i=1,2,3)$ – коефіцієнти видовження, які визначають переміщення початкового стану. Причому, вісь y_3 спрямована по нормалі до області контакту, а початкові напруження діють вздовж зони контакту.

Оскільки початковий деформований стан тіл є однорідним, зона контакту пружних тіл буде міститися у площині $y_3=const$, а дія штампа викликатиме у півпросторі невелике збурення основного напруженого стану, для якого виконуються умови [12]:

$$S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0, \quad S_0^{33} = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3, \tag{1}$$

де S_0^{11}, S_0^{22} – компоненти симетричного тензора початкових напружень.

Враховуючи умови (1), розв’язок основних рівнянь у переміщеннях [4, 5, 12] для стисливих та нестисливих тіл представимо через функцію χ, яка задовольняє рівняння

$$(\Delta_1 + \xi_2'^2\, \partial^2 / \partial y_3^2)(\Delta_1 + \xi_3'^2\, \partial^2 / \partial y_3^2)\chi = 0\,, \tag{2}$$

де $\Delta_1 = \partial^2/\partial r^2 + r^{-1}\,\partial/\partial r$.

Як зазначалося вище, обмежимося випадком нерівних коренів $(\xi_2'^2 \neq \xi_3'^2)$ характеристичного рівняння (2).

У системі колових циліндричних координат $(r,\ \theta,\ z_i)$, де $z_i = v_i^{-1} y_3$, $v_i = \sqrt{n_i}$, $(i = 1,2)$, $n_1 = \xi_2'^2$, $n_2 = \xi_3'^2$ такій постановці відповідають граничні умови:

$$U_3^{(1)} = -\varepsilon, \quad Q_{3r}^{(1)} = 0 \quad (R_1 < r < R_2)\,,\ z_i = Hv_i^{-1} \quad (i = 1,2)\,, \tag{3}$$

$$U_3^{(1)} = U_3^{(2)}; \quad \tilde{Q}_{33}^{(1)} = \tilde{Q}_{33}^{(2)}; \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad (R_1 < r < R_2)\,, z_i=0\ (i=1,2), \tag{4}$$

$$\tilde{Q}_{33}^{(2)} = 0, \quad \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad (0 < r < R_1 \quad R_2 < r < \infty)\,, z_i=0, (i=1,2), \tag{5}$$

$$\tilde{Q}_{rr}^{(1)} = 0, \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = 0 \quad (0 \le z_i \le Hv_i^{-1})\,, r=R_1, r=R_2. \tag{6}$$

Умова рівноваги, яка встановлює зв'язок між осіданням торця та рівнодійною навантаження P, має вигляд:

$$P = -2\pi \int_{R_1}^{R_2} r Q_{33}^{(2)}(0,r)dr . \tag{7}$$

Напружено-деформований стан у кільцевому штампі з початковими напруженнями визначимо, спираючись на лінеаризовані рівняння [4, 5]. Тоді загальний розв'язок для випадку рівних коренів визначального рівняння (2) χ матиме вигляд

$$\begin{gathered}\chi = \frac{\varepsilon v_1 z_1}{m_2 - 1}(1 + v_1 z_1) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(J_0(\alpha_k r) + \frac{J_1(\alpha_k r)}{Y_1(\alpha_k r)}Y_0(\alpha_k r)\right)\left[\left(\widetilde{E}_k sh(\alpha_k z_1) + ch(\alpha_k z_1)\right) + \right.\\ \left. + v_1 z_1\left(\widetilde{M}_k ch(\alpha_k z_1) - \frac{\alpha_k(1+m_1)}{v_1(1+m_2)} sh(\alpha_k z_1)\right)\right]F_k ,\end{gathered} \tag{8}$$

де $\alpha_k, \gamma_k -$ власні значення задачі (3) – (7), $F_k -$ невідомі величини, $J_v(x)$, $I_v(x) -$ функції Бесселя дійсного та уявного аргументу, $K_v(x) -$ функція Макдональда, $Y_v(x) -$ функція Неймана, відповідно, значення m_1, m_2 визначаються з [4],

$$\begin{gathered}\widetilde{E}_k = \frac{\alpha_k(1+m_1)H}{v_1(1+m_2)} - \left[Hcth\left(\frac{\alpha_k H}{v_1}\right) + \frac{v_1(1+m_2)}{\alpha_k(1+m_1)}\right]\left(\frac{\alpha_k(1+m_1)H}{v_1(1+m_2)} + \left(\frac{(1+m_1)}{(1+m_2)}\left[\frac{1-m_2}{m_1} - \frac{\alpha_k H}{v_1}\right] + \right.\right.\\ \left.\left. +1\right)cth\left(\frac{\alpha_k H}{v_1}\right)\right)\left[H\left(cth\left(\frac{\alpha_k H}{v_1}\right) - 1\right) + \frac{v_1(1+m_2)}{\alpha_k(1+m_1)} + \frac{v_1(1-m_2)}{\alpha_k m_1}\right]^{-1},\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\widetilde{M}_k = \left\{\frac{\alpha_k(1+m_1)H}{v_1(1+m_2)} + \left[\frac{(1+m_1)}{(1+m_2)}\left[\frac{1-m_2}{m_1} - \frac{\alpha_k H}{v_1}\right] + 1\right]cth\left(\frac{\alpha_k H}{v_1}\right)\right\} \times \\ \times\left[H\left(cth\left(\frac{\alpha_k H}{v_1}\right) - 1\right) + \frac{v_1(1+m_2)}{\alpha_k(1+m_1)} + \frac{v_1(1-m_2)}{\alpha_k m_1}\right]^{-1}.\end{gathered}$$

Напружено-деформований стан у пружному кільцевому штампі з початковими напруженнями для стисливих та нестисливих тіл і рівних коренів (2), враховуючи граничні умови (3) – (7), представимо у вигляді

$$\begin{gathered}Q_{33}^{(1)} = -C_{44}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k^2}{v_1}\left(J_0(\alpha_k r) + \frac{J_1(\alpha_k r)}{Y_1(\alpha_k r)}Y_0(\alpha_k r)\right)\left\langle \alpha_k l_1(1+m_1)\left(\widetilde{E}_k sh(\alpha_k z_1) + ch(\alpha_k z_1)\right) + \right.\\ \left. + v_1(1+m_2)\left(\widetilde{M}_k sh(\alpha_k z_1) - \frac{\alpha_k(1+m_1)}{v_1(1+m_2)}ch(\alpha_k z_1)\right)\right\rangle F_k ,\end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered}Q_{3r}^{(1)} = C_{44}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k^2}{n_1}\left(J_0(\alpha_k r) + \frac{J_1(\alpha_k r)}{Y_1(\alpha_k r)}Y_0(\alpha_k r)\right)\left\langle \alpha_k(1+m_1)\left(\widetilde{E}_k sh(\alpha_k z_1) + ch(\alpha_k z_1) + v_1 z_1\left(\widetilde{M}_k ch(\alpha_k z_1) - \right.\right.\right.\\ \left.\left.\left. - \frac{\alpha_k(1+m_1)}{v_1(1+m_2)}sh(\alpha_k z_1)\right)\right) + v_1(1+m_2)\left(\widetilde{M}_k sh(\alpha_k z_1) - \frac{\alpha_k(1+m_1)}{v_1(1+m_2)}ch(\alpha_k z_1)\right)\right\rangle F_k ,\end{gathered}$$

$$U_3^{(1)} = \frac{1}{\nu_1}\left\langle -\varepsilon\nu_1 + \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\left(J_0(\alpha_k r) + \frac{J_1(\alpha_k r)}{Y_1(\alpha_k r)}Y_0(\alpha_k r)\right)\left\langle (1-m_2)\left(\widetilde{M}_k sh(\alpha_k z_1) - \frac{\alpha_k(1+m_1)}{\nu_1(1+m_2)}ch(\alpha_k z_1)\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\alpha_k m_1}{\nu_1}\left(\widetilde{E}_k sh(\alpha_k z_1) + ch(\alpha_k z_1) + \nu_1 z_1\left(\widetilde{M}_k sh(\alpha_k z_1) - \frac{\alpha_k(1+m_1)}{\nu_1(1+m_2)}ch(\alpha_k z_1)\right)\right)\right\rangle F_k \right\rangle,$$

$$U_r^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\left(J_0(\alpha_k r) + \frac{J_1(\alpha_k r)}{Y_1(\alpha_k r)}Y_0(\alpha_k r)\right)\left\langle\left(\widetilde{M}_k ch(\alpha_k z_1) - \frac{\alpha_k(1+m_1)}{\nu_1(1+m_2)}sh(\alpha_k z_1)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha_k}{\nu_1}\left(\widetilde{E}_k ch(\alpha_k z_1) + sh(\alpha_k z_1) + \nu_1 z_1\left(\widetilde{M}_k sh(\alpha_k z_1) - \frac{\alpha_k(1+m_1)}{\nu_1(1+m_2)}ch(\alpha_k z_1)\right)\right)\right\rangle F_k.$$

Напружено-деформований стан у попередньо напруженому півпросторі для рівних коренів, з врахуванням (3) – (7) та $z_1 = 0$, представимо у вигляді [12]:

$$Q_{33}^{(2)} = \frac{\omega_3}{R_2 - R_1}\int_0^{\infty} F(\eta)J_0(\eta r)d\eta,\ U_3^{(2)} = -\frac{1}{\omega_2}\int_0^{\infty}\frac{F(\eta)}{\eta}J_0(\eta r)d\eta,\ U_r^{(2)} = \omega_1\int_0^{\infty}\frac{F(\eta)}{\eta}J_1(\eta r)d\eta, \quad (10)$$

де, $\omega_3 = c_{44}l_1(1+m_1)(s-s_0)$, $\omega_2 = \nu_1(m_1(s_3 - s_2))^{-1}$, $\omega_1 = s_0 - 1$, $s = s_0 l_2 l_1^{-1}$, $s_2 = m_2\nu_1(m_1\nu_2)^{-1}$, $s_3 = (1+m_2)\nu_1((1+m_1)\nu_2)^{-1}$, $F(\eta)$ – невідома функція, $D_{44}, C_{44}, l_1, l_2, m_1, m_2, s_0$ визначаються з [4].

Використовуючи розв’язок для штампа (8) та задовольняючи другій умові (3), другій умові (6), знаходимо власні значення задачі (3) – (7) для $n_1 = n_2$:

$$\alpha_k = \frac{\mu_k R_2}{R_1}\ \left(J_1(\mu_k)Y_1(\mu_k R_2 R_1^{-1}) - Y_1(\mu_k)J_1(\mu_k R_2 R_1^{-1}) = 0\right).$$

Також, задовольнивши першу умову (4), визначимо невідому функцію $F(\eta)$ для (10) з потрійних інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} F(\eta)J_0(\eta r)d\eta = 0 \quad (R_2 < r < \infty), \\ &\int_0^{\infty}\frac{F(\eta)}{\eta}J_0(\eta r)d\eta = f(r) \quad (R_1 < r < R_2), \\ &\int_0^{\infty} F(\eta)J_0(\eta r)d\eta = 0 \quad (0 < r < R_1), \end{aligned} \quad (11)$$

де $f(r) = \dfrac{\omega_2}{n_1}\left\{\varepsilon n_1 + \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2\left(J_0(\alpha_k r) + \dfrac{J_1(\alpha_k r)}{Y_1(\alpha_k r)}Y_0(\alpha_k r)\right)\left(\dfrac{(m_2-1)(1+m_1)}{(1+m_2)} - m_1\right)F_k\right\}$.

Спираючись на викладки [10, 12], інтегральні рівняння (11) зводимо до одного, використовуючи розривну функцію [10, 12]. А $F(\eta)$ будемо шукати у вигляді [10]:

$$F(\eta) = R_2\sum_{n=0}^{\infty} W_{2n}J_{2n}(0.5\eta(R_2 - R_1))J_{2n}(0.5\eta(R_2 + R_1)), \quad (12)$$

де W_{2n} – невідомі константи.

Підставимо (12) у (11), отримаємо одне інтегральне рівняння

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_{2n} \int_{0}^{\infty} J_{2n}(0.5\eta(R_2 - R_1)) J_{2n}(0.5\eta(R_2 + R_1)) J_0(\eta r) d\eta = f(r). \tag{13}$$

Опустивши деякі перетворення [12] та проінтегрувавши (13) по r, задовольнивши при цьому другу граничну умову (4), одержимо:

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_{2n} \int_{0}^{\infty} J_{2n}(0.5\eta(R_2 - R_1)) J_{2n}(0.5\eta(R_2 + R_1)) \int_{R_1}^{R_2} r J_0(\mu_k r) J_0(\eta r) dr d\eta =$$
$$= \frac{C_{44}(R_1 - R_2)}{\omega_3} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \theta_{11} \left(G_J(\mu_k, \mu_n) + \frac{J_1(\alpha_k R_1)}{Y_1(\alpha_k R_1)} G_Y(\mu_k, \mu_n) \right) F_k, \tag{14}$$

де $G_J(\mu_k, \mu_n) = \int_{R_1}^{R_2} r J_0(\mu_n r) J_0(\mu_k r) dr, \; G_Y(\mu_k, \mu_n) = \int_{R_1}^{R_2} r J_0(\mu_n r) Y_0(\mu_k r) dr$.

Для визначення сталих F_i, W_{2i} (i=0,1,2,…), які входять до (9) – (11), отримаємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь, що складається із (14) та (13). Після визначення яких, обчислюємо переміщення та напруження як у пружному кільцевому штампі, так і у пружному півпросторі з початковими напруженнями за формулами (9) – (10). В результаті, розв’язок отримуємо у вигляді рядів через нескінченну систему констант, що визначаються методом редукції із нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Для апробації дослідження було проведені числові розрахунки для потенціалу Бартенєва-Хазановича при наступних значеннях параметрів: $R_1 = 2 \cdot 10^{-2}$ м, $R_2 = 3 \cdot 10^{-2}$ м, $\varepsilon = 10^{-5}$, $E = 8 \cdot 10^{-5}$ МПа, $\lambda_1 = 0.7; 0.8; 0.9; 1; 1.1; 1.2$, де $R_1 \le r \le R_2$. Алгоритм розв’язку реалізовано у вигляді програми у пакеті Maple 15.

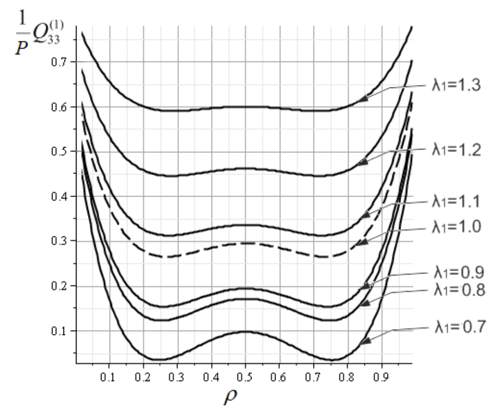

Рис. 1. Контактні напруження для потенціалу Бартенєва-Хазановича

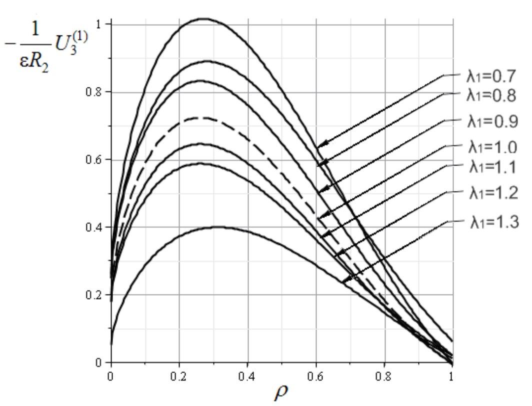

Рис. 2. Контактні переміщення для потенціалу Бартенєва-Хазановича

На рис. 1, 2 у безрозмірних координатах представлені розподіли нормального контактного напруження $P^{-1} Q_{33}^{(1)}$ та переміщення $-(\varepsilon R_2)^{-1} U_3^{(1)}$ під кільцевим штампом на межі контакту. Пунктирна крива відповідає півпростору без початкових напружень (λ_1=1), а суцільна – з початковими напруженнями.

Висновки

Отже, враховуючи проведене математичне моделювання та дослідження процесу контактної взаємодії пружного кільцевого штампа на півпростір з початковими напруженнями, був виявлений достатньо суттєвий вплив початкових напружень на контактні характеристики розподілу зусиль. Причому, у випадку відсутності початкових напружень (λ_1=1) графіки розподілів контактних напружень та переміщень відповідають відомим раніше розв'язкам задачі про тиск кільцевого штампа на півпростір [6]. Тому, отримані результати з урахуванням попередньо напруженого стану при контактній взаємодії тіл можуть бути використані для регулювання контактних напружень і переміщень при розрахунках конструкцій на міцність, що безпосередньо впливатиме на їх економічну складову.

Список використаної літератури

1. Національна академія наук України: Повідомлення НАН України. URL: http://www.nas.gov.ua/UA/Messages/Pages/View.aspx?MessageID=7263.
2. Guz A. N. , Bagno A. M. Influence of Prestresses on Normal Waves in an Elastic Compressible Half-Space Interacting with a Layer of a Compressible Ideal Fluid. *International Applied Mechanics*. 2019. Vol. 55. No 6. P. 585–595.
3. Ярецька Н.О. Математична модель передачі навантаження від попередньо напруженого циліндричного штампа до пружного шару з початковими напруженнями. *Physical and mathematical justification of scientific achievements*: collective monograph. Boston : Primedia eLaunch, 2020. P. 60–80. https://doi.org/10.46299/ISG.2020.MONO.PHYSICAL.III
4. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. Германия : Saarbrücken LAPLAMBERT Academic Publishing, 2015. 468 с.
5. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Рудницкий В.Б. Контактное взаимодействие упругих тел с начальными (остаточными) напряженими. *Развитие идей Л. А. Галина в механике* : сб. науч. труд к столетию со дня рождения ученого / отв. ред. И. Г. Горячева. Москва-Ижевск : Ин-т компьютер. исслед. 2013. С. 188–244.
6. Грилицкий Д.В., Кизыма Я.М. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости. Львов: Вища школа, 1981. 136 с.
7. Guz A. N. Nonclassical Problems of Fracture/Failure Mechanics: On the Occasion of the 50th Anniversary of Research (Review). III. *International Applied Mechanics*. 2019. Vol. 55. No 4. P. 343–415.
8. Babich. S. Yu., Dikhtyaruk N. N. Load transfer from an infinite inhomogeneous stringer to an elastic strip clamped by one face with initial stresses. *International Applied Mechanics*. 2020. Vol. 56. No 6. P. 346–356.
9. Babich. S. Yu., Dikhtyaruk N. N., Degtyar S. V. Contact Problem for Two Identical Strips Reinforced by Periodically Arranged Fasteners with Initial Stresses. *International Applied Mechanics*. 2019. Vol. 55. No 6. P. 629–635.
10. Босаков С. В. Две контактные задачи о вдавливании кольцевого штампа в упругое полупространство. *Наука и техника*. 2018. № 6(17). С. 458–464. https://doi.org/10.21122/2227-1031-2018-17- 6-458-464.
11. Yaretskaya N. F. Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *Int. Appl. Mech. Rew*. 2018. Vol. 54. No 5. P. 539–543. https://doi.org/10.1007/s10778-018-0906-y
12. Бабич С.Ю., Ярецька Н.О. Контактна взаємодія попередньо напружених кільцевого штампу і півпростору. *Доповіді НАН України*. 2020. № 11. С. 24–30 https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.11.024

13. Рудницький В.Б., Ярецька Н.О., Венгер В.О. Застосування ІТ технологій в механіці деформованого твердого тіла. *Проблеми трибології (Problems of Tribology)*. 2017. № 2(84). С. 32–40.

References

1. Natsionalna akademiia nauk Ukrainy: Povidomlennia NAN Ukrainy. URL:http://www.nas.gov.ua/UA/Messages/Pages/View.aspx?MessageID=7263
2. Guz, A. N. , & Bagno A. M. (2019). Influence of Prestresses on Normal Waves in an Elastic Compressible Half-Space Interacting with a Layer of a Compressible Ideal Fluid. *International Applied Mechanics*. **55**(6), 585–595.
3. Yaretska, N.O. (2020). Matematychna model peredachi navantazhennia vid poperedno napruzhenoho tsylindrychnoho shtampa do pruzhnoho sharu z pochatkovymy napruzhenniamy. *Physical and mathematical justification of scientific achievements*: collective monograph. International Science Group.
4. Guz, A.N., Babich, S.Yu., & Glukhov, Yu.P. (2015). Smeshannyie zadachi dlya uprugogo osnovaniya s nachalnyimi napryazheniyami. Germaniya: Saarbrücken LAPLAMBERT Academic Publishing.
5. Guz, A.N., Babich, S.Yu., & Rudnitskiy, V.B. (2013). Kontaktnoe vzaimodeystvie uprugih tel s nachalnyimi (ostatochnyimi) napryazhenimi. *Razvitie idey L. A. Galina v mehanike* : sb. nauch. trudov k stoletiyu so dnya rozhdeniya uchenogo / otv. red. I. G. Goryacheva. Moskva Izhevsk : In-t komp'yuter. issled. pp. 188–244.
6. Grilitskiy, D.V., & Kizyima, Ya.M. (1981). Osesimmetrichnyie kontaktnyie zadachi teorii uprugosti i termouprugosti. Lvov: Vischa shkola.
7. Guz, A. N. (2019). Nonclassical Problems of Fracture/Failure Mechanics: On the Occasion of the 50th Anniversary of Research (Review). *III. International Applied Mechanics*. **55**(4), 343–415.
8. Babich, S. Yu., & Dikhtyaruk, N. N. (2020). Load transfer from an infinite inhomogeneous stringer to an elastic strip clamped by one face with initial stresses. *International Applied Mechanics*. **56**(6). 346–356.
9. Babich, S. Yu., Dikhtyaruk, N. N., & Degtyar S. V. (2019). Contact Problem for Two Identical Strips Reinforced by Periodically Arranged Fasteners with Initial Stresses. *International Applied Mechanics*. **55**(6), 629–635.
10. Bosakov, S. V. (2018). Dve kontaktnyie zadachi o vdavlivanii koltsevogo shtampa v uprugoe poluprostranstvo. *Nauka i tehnika*. **6**(17), 458–464.
11. Yaretskaya, N. A. (2018). Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *Int. Appl. Mech. Rew.* **54**(5), 539–543.
12. Babych, S.Yu., & Yaretska N.O. (2020). Kontaktna vzaiemodiia poperedno napruzhenykh kiltsevoho shtampu i pivprostoru. *Dopovidi NAN Ukrainy*. **11**, 24–30.
13. Rudnytskyi, V.B., Yaretska, N.O., & Venher, V.O. (2017). Zastosuvannia IT tekhnolohii v mekhanitsi deformovanoho tverdoho tila. *Problems of Tribology*. **2**(84). 32–40.

Ярецька Наталія Олександрівна – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань Хмельницького національного університету, e-mail: massacran2@ukr.net, ORCID: 0000-0002-3726