

УДК 539.3

І. О. ВЕРУШКІН, О. О. СТРЕЛЬНИКОВА

Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України

ДОСЛІДЖЕННЯ ГІДРОПРУЖНИХ КОЛИВАНЬ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ ГІПЕРСИНГУЛЯРНИХ РІВНЯНЬ

Створено методику визначення частот та форм власних коливань елементів конструкції при двобічному контакті з рідиною. Вважається, що рідина є ідеальною і нестисливою, а її рух, індукований коливаннями конструктивного елемента є безвихровим. За цих умов існує потенціал швидкостей, який всюди в області, що зайнята рідиною, задовольняє рівнянню Лапласа. На поверхнях конструктивного елемента задається умова непротікання. Ця умова полягає в рівності нормальних компонент швидкостей рідини та конструкції. Для знаходження переміщень конструкції використовуються рівняння руху під дією навантаження, що обумовлене тиском рідини. Тиск рідини, в свою чергу, визначається з рівняння Лапласа, граничні умови для якого містять невідому швидкість конструкції. Тобто, отримано зв'язану задачу щодо визначення гідропружних коливань. Для розв'язання сформульованої задачі використано метод заданих форм. Спочатку визначаються частоти і форми коливань пружного елемента без урахування сили тиску з боку рідини. За отриманими формами будується подання переміщень конструкції, що взаємодіє з рідиною, у вигляді відповідного ряду. Далі розв'язується крайова задача Неймана для рівняння Лапласа, при цьому граничні умови містять відомі функції, а саме, форми коливань пружного елемента, що були отримані на першому етапі. Розв'язання цієї задачі виконано із застосуванням теорії потенціалу. Невідому функцію зображено у вигляді потенціалу подвійного шару. Граничні умови при цьому призводять до гіперсингулярного інтегрального рівняння відносно невідомої густини, яка й відображає тиск рідини. Надалі це двовимірне гіперсингулярне рівняння зводиться до одновимірного. Розроблено ефективний метод числового розв'язання цього рівняння. Здійснено порівняння отриманих числових результатів з відомими аналітичними розв'язками. Отримано добре узгодження результатів, що свідчить про вірогідність запропонованого методу. Після цього розроблений алгоритм побудови матриці приєднаних мас, що дало змогу знайти частоти власних коливань круглої пружної пластинки з урахуванням приєднаних мас рідини.

Ключові слова: тонка пластина, ідеальна нестислива рідина, коливання, гіперсингулярне інтегральне рівняння, метод граничних елементів.

I. A. VIERUSHKIN, E. A. STRELNIKOVA

A. M. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems NASU

SIMULATION OF HYDROELASTIC OSCILLATIONS OF STRUCTURAL ELEMENTS USING THE HYPERSINGULAR EQUATION METHOD

A method for determining the frequencies and modes of natural vibrations of structural elements in bilateral contact with a liquid has been developed. It is supposed that the fluid is perfect and incompressible one, and its motion induced by the structural element is vortex-free. Under these suppositions, there exists a velocity potential that satisfies the Laplace equation everywhere in the area occupied by the liquid. The non-penetration condition is set on the surfaces of the structural element. This condition is the equality of the normal components of fluid velocities and design. To evaluate the structure displacements, the equations of motion under the fluid pressure are used. The fluid pressure, in turn, is determined from the Laplace equation, where the boundary conditions contain an unknown velocity. So, a related problem for determining hydroelastic vibrations is obtained. To solve the formulated problem, the method of given forms is used. First, the frequencies and modes of the elastic element vibrations are determined without taking into account the pressure force from the fluid. According to the obtained forms, the representation of the structure displacements interacting with the liquid is received as corresponding series. Next, the Neumann boundary value problem for the Laplace equation is solved, and here the boundary conditions contain known functions, namely, the elastic element modes of vibrations obtained in the first stage. The solution of this problem is performed using the potential theory. The unknown function is represented as a double layer potential. The boundary conditions lead to a hypersingular integral equation with respect to an unknown density that is the fluid pressure. Further, this two-dimensional hypersingular equation is reduced to one-dimensional one. An effective method for numerical solution of this equation has been developed. The obtained numerical results are compared with known analytical solutions. A good agreement of the results is obtained that testifies reliability of the proposed method. Then the algorithm for

evaluating the matrix of added masses was developed, that made it possible to find the natural frequencies of the circular elastic plate taking into account the liquid added masses.

Keywords: thin plate, ideal incompressible fluid, vibrations, hypersingular integral equation, boundary element method

И. А. ВЕРУШКИН, Е. А. СТРЕЛЬНИКОВА
Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного РАНУ

ИССЛЕДОВАНИЕ ГИДРОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Разработана методика определения частот и форм собственных колебаний элементов конструкций при двустороннем контакте с жидкостью. Считается, что жидкость является идеальной и несжимаемой, а ее движение, индуцированное колебаниями конструктивного элемента, является безвихревым. При этих условиях существует потенциал скоростей, который всюду в области, занятой жидкостью, удовлетворяет уравнению Лапласа. На поверхностях элемента реконструкции задается условие непротекания. Это условие состоит в равенстве нормальных компонент скоростей жидкости и конструкции. Для нахождения перемещений конструкции используются уравнения движения под действием нагрузки, обусловленной давлением жидкости. Давление жидкости, в свою очередь, определяется из уравнения Лапласа, граничные условия для которого содержат неизвестную скорость конструкции. Таким образом, получена связанная задача для определения гидроупругих колебаний. Для решения сформулированной задачи использован метод заданных форм. Сначала определяются частоты и формы колебаний упругого элемента без учета силы давления со стороны жидкости. По полученным формам строится представление перемещений конструкции, которая взаимодействует с жидкостью, в виде соответствующего ряда. Далее решается краевая задача Неймана для уравнения Лапласа, при этом граничные условия содержат известные функции, а именно, формы колебаний упругого элемента, полученные на первом этапе. Решение этой задачи выполнено с применением теории потенциала. Неизвестная функция представлена в виде потенциала двойного слоя. Граничные условия, при этом, приводят к гиперсингулярному интегральному уравнению относительно неизвестной плотности, которая и представляет давление жидкости. В дальнейшем это двумерное гиперсингулярное уравнение сводится к одномерному. Разработан эффективный метод численного решения этого уравнения. Проведено сравнение полученных числовых результатов с известными аналитическими решениями. Получено хорошее согласование результатов, что свидетельствует о достоверности предложенного метода. После этого разработан алгоритм построения матрицы присоединенных масс, что позволило найти частоты собственных колебаний круглой упругой пластинки с учетом взаимодействия с жидкостью.

Ключевые слова: тонкая пластина, идеальная несжимаемая жидкость, колебания, гиперсингулярное интегральное уравнение, метод граничных элементов

Формулювання проблеми та її актуальність

В різних сферах інженерної практики, таких як турбобудування, енергетичне машинобудування, вітроенергетика широко застосовуються елементи тонкостінних конструкцій, що функціонують в умовах підвищених технологічних навантажень. Проектування таких машин та споруд при достатньому рівні надійності вимагає аналізу напружень та деформацій, частот та форм власних коливань. Це дає змогу оцінити границю міцності конструкції та позбавитись небажаних резонансних частот. Оскільки конструкції, що розглядаються, часто взаємодіють з повітряним або водним середовищем, для обчислення означених характеристик необхідно розв'язувати задачі гідро-аеропружності, тобто визначати напруження, деформації та частоти коливань, виходячи з того, що на пружне тіло діють сили з боку рідини або газу.

Тому актуальною проблемою є побудова уточнених моделей та методів розрахунку елементів конструкцій, що враховують вплив потоку рідини на напружено-деформований стан, частоти та форми власних коливань. На стадії проектування виникає також необхідність оптимізації, яка пов'язана з проблемою зниження матеріалоемності при урахуванні вимог нормального функціонування елементів машин

та споруд. Застосування методів оптимізації вимагає створення ефективних та високошвидкісних програмних кодів для розв'язання задач аналізу.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Проблеми гідропружності елементів конструкцій знаходяться в центрі уваги багатьох дослідників протягом останніх десятиріч. Ці проблеми можна умовно поділити на два класи. До першого відносяться задачі визначення динамічних характеристик таких конструкцій, які містять рідину всередині, тобто відбувається однібічний контакт поверхонь конструктивного елемента з рідиною. Цим задачам присвячені роботи [1-3], де розглядаються питання плескань рідини в жорстких оболонкових системах. В роботі [4] вивчені коливання пружних резервуарів, частково заповнених рідиною, в [5,6] досліджені вільні коливання пружних кришок гідротурбіни при взаємодії з рідиною.

Другий клас питань пов'язаний з визначенням динамічних характеристик пружних тонких конструкцій, несучі поверхні яких знаходяться у двобічному контакті з рідиною. Це лопаті робочих коліс радіально-осьових та поворотно-лопатевих гідротурбін [7], лопаті потужних повітряних установок [8], крила літаків [9] і таке інше. Цікавими є питання підтоплення міських територій, які також розв'язуються із застосуванням підходів механіки з урахуванням взаємодії різних суцільних середовищ [10,11].

Для числового розв'язання таких задач розроблені потужні обчислювальні методи. Серед них зазначимо, як найбільш застосовні, методи скінченних різниць, скінченних та граничних елементів [12,13]. Зазначимо, також, необхідність розроблення та модифікації методів нелінійного програмування [14,15].

Але, хоча розвинені такі ефективні методи, кожна нова конструкція, яка працює в умовах інтенсивних силових навантажень, при взаємодії з оточуючим середовищем, потребує ретельного аналізу характеристик міцності та динамічних характеристик. Це вимагає створення нових та удосконалення існуючих обчислювальних методів, які б враховували специфічні риси конструкції, що розглядаються. В даному дослідженні розроблено новий ефективний метод розв'язання гіперсингулярних інтегральних рівнянь на круговій області та застосовано його для визначення частот і форм вільних коливань круглої пластинки, що занурена в рідину.

Мета дослідження

Метою дослідження є створення методики визначення частот та форм вільних коливань елементів конструкцій при двобічному контакті з рідиною.

Викладення основного матеріалу дослідження

Розглядається пружна тонка кругла пластинка, що занурена в рідину. Для моделювання руху пластини використовуємо гіпотези Кірхгофа –Лява [16].

Введемо такі позначення: E - модуль Юнга, ν - коефіцієнт Пуассона, h - товщина пластинки.

Якщо товщина однорідної пластинки h є сталою, то рівняння руху пластинки [16] має вигляд

$$D\Delta\Delta w + \rho_p h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, y, t), \quad (1)$$

де $w(x, y, t)$ - прогин пластини; ρ_p - густина матеріалу пластини; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ - циліндрична жорсткість; $q(x, y, t)$ - сила, що діє на пластину.

Якщо пластинка занурена в рідину, то

$$q(x, y, t) = p(x, y, t)\mathbf{n} + q_0(x, y, t), \quad (2)$$

де $p(x, y, t)$ - перепад тиску рідини на пластину; \mathbf{n} - одинична нормаль до поверхні пластини; $q_0(x, y, t)$ - сила, що збурює.

Якщо в рівнянні (2) функція $q_0(x, y, t) = 0$, то маємо випадок вільних гідропружних коливань.

Для знаходження тиску $p(x, y, t)$ зробимо такі припущення: рідина є ідеальною та нестисливою, а її рух безвихровий. В цих умовах снує потенціал швидкостей $\varphi(x, y, z, t)$, градієнт якого є швидкістю рідини, а саме:

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, V_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Цей потенціал задовольняє рівнянню Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

Зв'язок між потенціалом швидкостей та тиском визначається з лінеаризованого інтегралу Коші-Лагранжа

$$p^\pm = -\rho_l \frac{\partial \varphi^\pm}{\partial t} + p_0,$$

де ρ_l - густина рідини; p_0 – атмосферний тиск.

Граничні значення φ^\pm відповідають переходу до площини пластини з боку додатних та від'ємних значень координати z , відповідно.

Таким чином, для перепаду тиску маємо

$$p = p^+ - p^- = -\rho_l \left(\frac{\partial \varphi^+}{\partial t} - \frac{\partial \varphi^-}{\partial t} \right). \quad (4)$$

Сформулюємо граничні умови для диференціального рівняння (3). Згідно з умовою непротікання [17] маємо на поверхнях пластини σ такі рівності:

$$\frac{\partial \varphi^\pm}{\partial \mathbf{n}} \Big|_\sigma = \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (5)$$

Систему диференціальних рівнянь (1), (3) з граничною умовою (5) слід також доповнити умовами закріплення, тобто умовами відносно функції $w(x, y, t)$ на контурі пластини.

Таким чином, маємо зв'язану задачу відносно двох невідомих функцій $\varphi(x, y, z, t)$ та $w(x, y, t)$, при чому, в праву частину диференціального рівняння відносно $w(x, y, t)$ входить похідна за часом від $\varphi(x, y, z, t)$, а в граничні умови для рівняння Лапласа відносно $\varphi(x, y, z, t)$ входить похідна за часом від невідомої функції $w(x, y, t)$.

Для розв'язання задач про власні та вимушені коливання пружних пластин, занурених у рідину, використано метод заданих форм [17]. У загальному випадку будемо шукати переміщення пластинки, що занурена в рідину, у вигляді:

$$w(x, y, t) = \sum_{k=1}^N c_k(t) w_k(x, y), \quad (6)$$

де $c_k(t)$ – невідомі коефіцієнти, які залежать лише від часу; $w_k(x, y)$ – форми коливань пластинки без врахування взаємодій з рідиною; N – кількість форм, що утримуються при розрахунках.

З огляду на (4), (6) бачимо, що для потенціалу швидкостей $\varphi(x,y,z,t)$ необхідно обрати таке зображення

$$\varphi(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^N \dot{c}_k(t) \varphi_k(x, y, z), \quad (7)$$

в якому функції $\varphi_k(x, y, z)$ є розв'язками таких крайових задач

$$\Delta \varphi_k = 0, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} = w_k. \quad (8)$$

Зауважимо, що в крайових задачах (8) праві частини в граничних умовах є відомими.

Далі опишемо метод зведення задачі визначення частот та форм коливань системи «пластинка-рідина» до гіперсингулярних рівнянь.

Для знаходження перепаду тиску рідини на поверхнях пластини маємо рівняння (4). Слід зауважити, що потенціал швидкостей є гармонічною функцією всюди за межами круглої пластини, тобто, це неперервна функція у тривимірному просторі з розрізом. При цьому, згідно з рівнянням (5), ця гармонічна функція має неперервну нормальну похідну при перетині розрізу у вигляді круга, який займає пластину. Але згідно з рівнянням (4) ця функція має скінченний розрив на вказаній області.

Як відомо, такі властивості притаманні потенціалу подвійного шару [18]. Цей потенціал має вигляд

$$\varphi(\mathbf{P}_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma(\mathbf{P}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|} dS, \quad \mathbf{P} \in S, \quad (9)$$

де S - область, зайнята круговою пластинкою; \mathbf{n} – одинична нормаль до поверхні S ; \mathbf{P} і \mathbf{P}_0 - точки тривимірного простору з координатами (x, y, z) та (x_0, y_0, z_0) , відповідно;

$|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ - декартова відстань між \mathbf{P} і \mathbf{P}_0 ; $\Gamma(\mathbf{P})$ - густина потенціалу, функція, що задана на поверхні S .

Функція, що визначена формулою (9), задовольняє рівнянню Лапласа (3), має неперервну нормальну похідну, а при перетині поверхні S вздовж нормалі має скінченний розрив, а саме [18]

$$\varphi^+(\mathbf{P}_0) - \varphi^-(\mathbf{P}_0) = \Gamma(\mathbf{P}_0), \quad \mathbf{P}_0 \in S.$$

Тому використовуємо подання (9) для потенціалу швидкостей. Зауважимо, що для визначення перепаду тиску треба знайти невідому густину $\Gamma(\mathbf{P})$ на поверхні пластини. З подання (7) отримуємо, що для цього треба знайти розв'язки крайових задач (8). Для функцій φ_k використовуємо зображення (9). Рівняння Лапласа з (8) при цьому задовольняється, а крайова умова призводить до інтегрального рівняння у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_0} \frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma_k(\mathbf{P}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|} = w_k(\mathbf{P}_0), \quad \mathbf{P}, \mathbf{P}_0 \in S \quad (10)$$

Як доведено в [19,20] інтеграл в (10) не існує ні як звичайний невластний, ні в сенсі головного значення за Коші. Цей інтеграл трактується лише в сенсі Адамара [21,22] як граничне значення нормальної похідної потенціалу подвійного шару. У випадку, коли поверхня S є частиною площини, маємо

$$\frac{\partial}{\partial z_0} \frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma_k(\mathbf{P}) \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|} = w_k(\mathbf{P}_0), \quad \mathbf{P}, \mathbf{P}_0 \in S,$$

або

$$\lim_{z_0 \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma_k(x, y) \frac{\partial}{\partial z_0} \frac{-z_0}{\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2}\right)^3} = w_k(x_0, y_0). \quad (11)$$

Рівняння типу (11) відносяться до гіперсингулярних інтегральних рівнянь. В [22] досліджені деякі методи числового розв'язання таких рівнянь.

Зведення двовимірних гіперсингулярних рівнянь до одновимірних

Якщо область S в рівнянні (11) є кругом, то можливо звести двовимірне гіперсингулярне рівняння до одновимірного.

Нехай S є кругом на площині xOy , а саме

$$S = \{x, y : x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

Обчислимо декартову відстань $|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|$ для точок вказаної області S . В циліндричних координатах маємо

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z, \quad x^2 + y^2 = \rho^2, \\ x_0 = \rho_0 \cos \theta_0, \quad y_0 = \rho_0 \sin \theta_0, \quad z_0 = z_0, \quad x_0^2 + y_0^2 = \rho_0^2.$$

Таким чином,

$$|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0| = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 + (z - z_0)^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\theta - \theta_0)}.$$

Надалі використовуємо стандартні позначення [13]:

$$a = \rho^2 + \rho_0^2 + (z - z_0)^2, \quad b = 2\rho\rho_0.$$

Припустимо, що функції w, Γ мають вигляд

$$w_{mn}(\rho, \theta) = w_{mn}(\rho) \cos n\theta, \quad \Gamma_{mn}(\rho, \theta) = \Gamma_{mn}(\rho) \cos n\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots$$

Тоді отримаємо з використанням (11) таке гіперсингулярне інтегральне рівняння ($z = z_0 = 0$):

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma_{mn}(x, y) \frac{-dx dy}{\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\right)^3} = w_{mn}(x_0, y_0).$$

З переходом до циліндричної системи координат, знаходимо, що

$$\Delta \Gamma_{kn} = \frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma_k(\rho) \frac{\cos n\theta \rho d\theta d\rho}{\left(\sqrt{a - b \cos(\theta - \theta_0)}\right)^3} = -w_k(\rho_0).$$

Запишемо двовимірний інтеграл як повторний

$$\Delta \Gamma_{mn} = \frac{1}{4\pi} \int_0^R \rho \Gamma_{mn}(\rho) \left[\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta d\theta}{\left(\sqrt{a - b \cos(\theta - \theta_0)}\right)^3} \right] d\rho = -w_{mn}(\rho_0). \quad (12)$$

Зробимо у внутрішньому інтегралі в (12) заміну змінної

$$\psi = \theta - \theta_0, \quad \theta = \psi + \theta_0, \quad d\theta = d\psi.$$

Оскільки під знаком інтегралу знаходиться періодична функція, що інтегрується за періодом, то границі інтегрування не зміняться. Тобто, можемо брати не $(0, 2\pi)$ а $(-\pi, \pi)$. Отримаємо для внутрішнього інтегралу

$$I_1(\rho, \rho_0) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n(\psi + \theta_0) d\psi}{\left(\sqrt{a - b \cos \psi}\right)^3}.$$

Внаслідок формули

$$\cos n(\psi + \theta_0) = \cos n\psi \cos n\theta_0 - \sin n\psi \sin n\theta_0$$

маємо

$$I_1(\rho, \rho_0, \theta_0) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n(\psi + \theta_0) d\psi}{\left(\sqrt{a - b \cos \psi}\right)^3} = \cos n\theta_0 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\psi d\psi}{\left(\sqrt{a - b \cos \psi}\right)^3} - \sin n\theta_0 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin n\psi d\psi}{\left(\sqrt{a - b \cos \psi}\right)^3}.$$

Оскільки $\cos n\psi$ є парною функцією, а $\sin n\psi$ непарною, отримуємо

$$I_1(\rho, \rho_0, \theta_0) = 2 \cos n\theta_0 \int_0^\pi \frac{\cos n\psi d\psi}{(\sqrt{a - b \cos \psi})^3}. \quad (13)$$

Внаслідок рівності (13) одержимо, що

$$\mathbf{A}[\Gamma_{mn}(\rho) \cos n\theta] = \cos n\theta_0 \tilde{\mathbf{A}}[\Gamma_{mn}(\rho)],$$

тобто гіперсингулярний оператор $\mathbf{A}[\Gamma, \rho, \theta]$ переводить функцію $\cos n\theta$ в функцію $\cos n\theta_0$.

Зробимо перетворення в інтегралі (13)

$$I_1(\rho, \rho_0, \theta_0) = 2 \int_0^\pi \frac{\cos n\psi d\psi}{(\sqrt{a - b \cos \psi})^3} = 2 \int_0^\pi \frac{\cos n\psi d\psi}{(\sqrt{a + b - 2b \cos^2(\psi/2)})^3} = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{(-1)^n \cos 2n\psi d\psi}{(\sqrt{a + b - 2b \cos^2 \psi})^3}.$$

Після ще однієї заміни змінної

$$\psi_1 = \pi/2 - \psi; \quad d\psi_1 = -d\psi$$

знайдемо, що

$$I_1(\rho, \rho_0) = \frac{4(-1)^n}{(\sqrt{a+b})^3} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2n\psi d\psi}{(\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi})^3}, \quad k^2 = \frac{2b}{a+b}.$$

Далі використовуємо формулу з [23] (стор.178, №37) та одержимо

$$\int_0^{\pi/2} \frac{(-1)^n d\psi}{(\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi})^3} = \frac{1}{k'^2} E_n(k), \quad E_n(k) = (-1)^n (1-4n^2) \int_0^{\pi/2} \cos 2n\psi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi} d\psi, \quad k'^2 = 1-k^2. \quad (14)$$

Оскільки $k'^2 = 1-k^2 = 1 - \frac{2b}{a+b} = \frac{a-b}{a+b}$, то для внутрішнього інтегралу маємо

$$I_1(\rho, \rho_0) = \frac{4(-1)(1-4n^2)}{\sqrt{a+b}(a-b)} \int_0^{\pi/2} \cos n\psi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi} d\psi = \frac{4}{(\rho+\rho_0)(\rho-\rho_0)^2} E_n(k),$$

де $E_n(k)$ - повний еліптичний інтеграл другого роду.

Таким чином, отримані одновимірні гіперсингулярні інтегральні рівняння для визначення функцій $\Gamma_{mn}(\rho)$ за відомими функціями $w_{mn}(\rho)$, $m = 1, 2, \dots$, $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^R \Gamma_{mn}(\rho) \frac{\rho E_n(k) d\rho}{(\rho+\rho_0)(\rho-\rho_0)^2} = -w_{mn}(\rho_0). \quad (15)$$

Зазначимо, що ядро інтегрального оператора в (15) має такий вигляд:

$$K(\rho, \rho_0) = \frac{\rho E_n(k)}{(\rho+\rho_0)(\rho-\rho_0)^2}.$$

Це ядро має особливість типу $(\rho - \rho_0)^{-2}$.

Введемо функцію

$$K_0(\rho, \rho_0) = \frac{\rho}{(\rho+\rho_0)(\rho-\rho_0)^2}.$$

Тоді для обчислення інтегралу по елементу, що містить особливість, використовуємо формулу

$$\int_{l_0} \Gamma_m(\rho) K(\rho, \rho_0) d\rho = \int_{l_0} \Gamma_m(\rho) K_0(\rho, \rho_0) d\rho + \int_{l_0} \Gamma_m(\rho) [K(\rho, \rho_0) - K_0(\rho, \rho_0)] d\rho.$$

Перший доданок тут містить гіперсингулярну та логарифмічну складові, а другий є інтегралом від функції, яка містить логарифмічну особливість, для його обчислення використовуємо спеціальні квадратурні формули, розроблені в [24].

Аналіз числових результатів

Припустимо, що в рівнянні (1) функція $q(x, y, t) = 0$, тобто вважаємо, що пластина здійснює вільні коливання, тоді шукаємо розв'язок рівняння (1) у вигляді

$$w(x, y, t) = \exp(i\Omega t)w(x, y). \quad (16)$$

Підставимо зображення (16) в однорідне рівняння (1) та отримаємо диференціальне рівняння в частинних похідних відносно амплітудних значень $w(x, y)$

$$\Delta \Delta w - \alpha^4 w = 0, \quad \alpha^4 = \Omega^2 \frac{12\rho_p(1-\nu^2)}{Eh^2} = \Omega^2 \frac{\rho_p h}{D}. \quad (17)$$

Рівняння (17) зобразимо в формі

$$(\Delta - \alpha^2)(\Delta + \alpha^2)w = 0,$$

що еквівалентно системі

$$\begin{cases} (\Delta - \alpha^2)w = 0 \\ (\Delta + \alpha^2)w = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Для круглої пластини в полярних координатах маємо

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

При цьому система (18) набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \alpha^2 w = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \alpha^2 w = 0. \quad (20)$$

Далі вважаємо, що

$$w(\rho, \theta) = w(\rho) \cos n\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Розв'язками рівняння (19) є функції Бесселя порядку n першого та другого роду $J_n(\alpha\rho)$ та $Y_n(\alpha\rho)$, а розв'язками рівняння (20) є модифіковані функції Бесселя порядку n першого та другого роду $I_n(\alpha\rho)$ та $K_n(\alpha\rho)$. Таким чином, загальний розв'язок рівняння (17) має вигляд

$$w(\rho) = AJ_n(\alpha\rho) + BY_n(\alpha\rho) + CI_n(\alpha\rho) + D_1 K_n(\alpha\rho),$$

де A, B, C, D_1 - сталі.

Оскільки при $\rho \rightarrow 0$ функції $Y_n(\alpha\rho)$ та $K_n(\alpha\rho)$ нескінченно зростають, вважаємо, що $B = 0, D_1 = 0$, щоб уникнути нефізичних переміщень.

Для визначення сталих A, C використаємо граничні умови закріплення пластини за контуром. У випадку жорсткого закріплення маємо граничні умови

[16] $w|_{\rho=R} = 0, \quad \left. \frac{dw}{dr} \right|_{\rho=R} = 0$. З цих умов випливає, що

$$\begin{cases} AJ_n(\alpha R) + CI_n(\alpha R) = 0 \\ AJ'_n(\alpha R) + CI'_n(\alpha R) = 0 \end{cases} \quad (21)$$

Для того, щоб система (21) мала ненульовий розв'язок, необхідно, щоб визначник цієї системи дорівнював нулю. Тому з урахуванням виразів для похідних від функцій Бесселя отримуємо рівняння для знаходження невідомої величини α

$$\begin{vmatrix} J_n(\alpha R) & I_n(\alpha R) \\ J'_n(\alpha R) & I'_n(\alpha R) \end{vmatrix} = J_n(\alpha R)[I_{n-1}(\alpha R) + I_{n+1}(\alpha R)] - I_n(\alpha R)[J_{n-1}(\alpha R) - J_{n+1}(\alpha R)] = 0 \quad (22)$$

Зазначимо, що при $n = 0$ маємо $J'_0(x) = J_1(x)$, $I'_0(x) = -I_1(x)$. Позначимо $\lambda = \alpha R$. В таблиці 1 наведені значення 6 перших коренів рівняння (22) для різних значень n .

Табл. 1.

Значення коренів характеристичного рівняння α_{mn}

m	n		
	0	1	2
1	3.196220616	4.610899879	5.905678235
2	6.306437050	7.799273800	9.196882600
3	9.439499140	10.95806719	12.40222097
4	12.57713064	14.10862781	15.57949149
5	15.71643853	17.25572701	18.74395810
6	18.85654552	20.40104490	21.90148516

Співвідношення між сталими A та C для кожного α_m отримуємо з рівності

$$A_{mn} J_n(\alpha_{mn} R) + C_m I_n(\alpha_{mn} R) = 0 \Rightarrow C_{mn} = -A_{mn} \frac{J_n(\alpha_{mn} R)}{I_n(\alpha_{mn} R)}.$$

Зауважимо, що можемо обирати $A_{mn} = 1 \forall m, n$.

Таким чином, отримані залежності форм вільних коливань круглої пластинки від ρ у вигляді

$$w_{mn}(\rho) = J_n(\alpha_{mn} \rho) - \frac{J_n(\alpha_{mn} R)}{I_n(\alpha_{mn} R)} I_n(\alpha_{mn} \rho). \tag{23}$$

Саме ці функції фігурують як праві частини в гіперсингулярних рівняннях (13).

На рисунку 1 зображені функції, що визначені формулами (23) при $R = 1$.

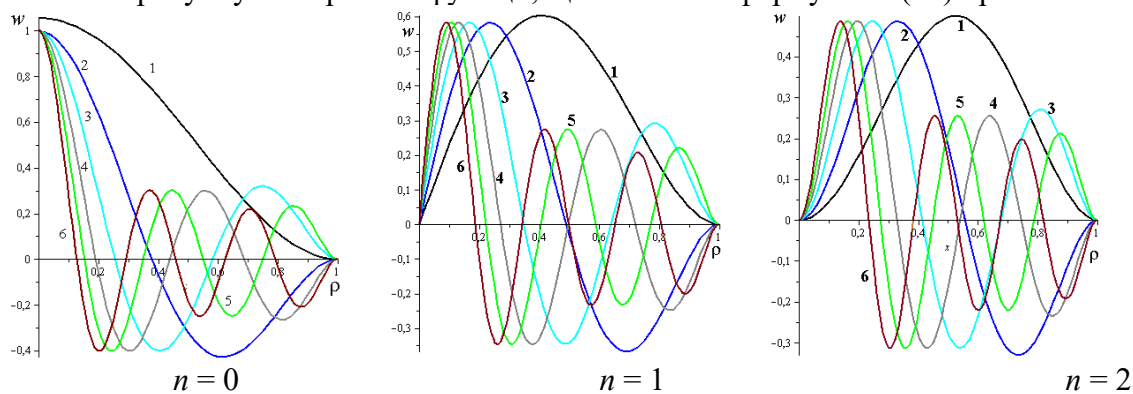


Рис. 1. Залежності форм коливань від радіальної координати

На рисунку 2 зображені перші форми коливань круглої пластинки, жорстко закріпленої вздовж контуру, що відповідають гармонікам $n = 0, 1, 2$. Зазначимо, що номер гармоніки характеризує кількість вузлових діаметрів.

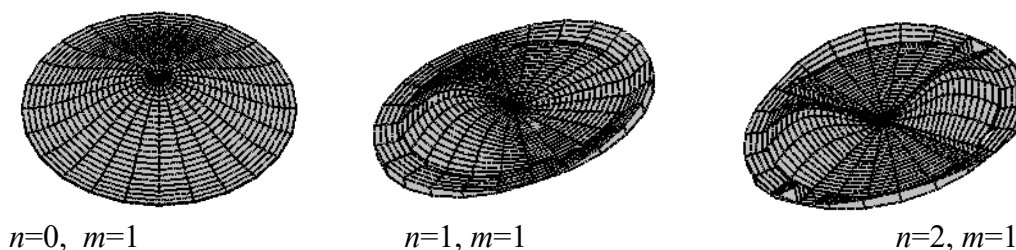


Рис. 2. Форми коливань круглої пластинки

Для тестування запропонованого методу скористуємось аналітичним розв'язком просторового гіперсингулярного рівняння, що наведений в [22, 25]. Для гіперсингулярного рівняння у вигляді

$$\frac{1}{\pi} \iint_S \frac{\Gamma(x, y) dx dy}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}^3} = -\pi, \quad S = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

в [22, 25] доведено, що

$$\Gamma(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Якщо гіперсингулярне рівняння розглядаємо в формі (15), то будемо мати для рівняння у вигляді

$$\frac{1}{\pi} \int_0^R \Gamma(\rho) \frac{\rho E(k) d\rho}{(\rho + \rho_0)(\rho - \rho_0)^2} = -1 \quad (24)$$

такий аналітичний розв'язок

$$\Gamma(\rho) = \frac{4}{\pi} \sqrt{R^2 - \rho^2}.$$

Для числового розв'язання рівняння (24) був використаний метод граничних елементів зі сталою апроксимацією густини на елементах [22]. Розглянуто круг з радіусом $R = 1\text{м}$. Обиралось 100 граничних елементів. Співставлення числових та аналітичних результатів подано на рисунку 3.

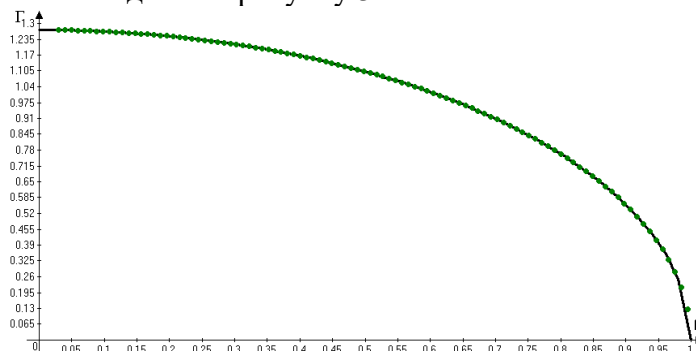


Рис. 3. Числовий та аналітичний розв'язки гіперсингулярного рівняння

Тут суцільна лінія відповідає аналітичному розв'язку, точками позначені числові дані. Зауважимо, що практично у всіх точках відрізка $[0, R]$ отримано точність $\varepsilon = 10^{-3}$. Винятком є точки поблизу кінців інтервалу. Оскільки при ρ, ρ_0 , близьких до нуля, в рівнянні (24) виникає додаткова особливість, в [14] запропоновано замінити відрізок інтегрування на $[\delta, R]$. В наведених розрахунках обрано $\delta = 0.025/R$. При ρ , близьких до 1, точність може бути збільшена за рахунок врахування поведінки розв'язку на кінцях інтервалу інтегрування [22].

Розглянемо випадок аксіально-симетричних коливань. При цьому маємо такі праві частини в рівняннях (15)

$$w_{m0}(\rho) = J_n(\alpha_{m0}\rho) - \frac{J_n(\alpha_{m0}R)}{I_n(\alpha_{m0}R)} I_n(\alpha_{m0}\rho),$$

де α_{m0} є коренями характеристичного рівняння (22) і наведені в таблиці 6.1. Функції $w_{m0}(\rho)$ та відповідні їм $\Gamma_{m0}(\rho)$, що є розв'язками гіперсингулярних інтегральних рівнянь (15), зображені на рис. 4. Тут цифри 1-6 відповідають значенням $m = \overline{1,6}$, штрихові лінії зображають праві частини $w_{m0}(\rho)$, а пунктирні відповідають функціям $\Gamma_{m0}(\rho)$. Бачимо, що згідно з властивостями гіперсингулярного оператора, функції $\Gamma_{m0}(\rho)$ відновлюють

характер функцій $w_{m0}(\rho)$. Зі зростанням номера m амплітуди $\Gamma_{m0}(\rho)$ зменшуються за абсолютною величиною, що свідчить про зменшення впливу приєднаних мас рідини на вищі частоти.

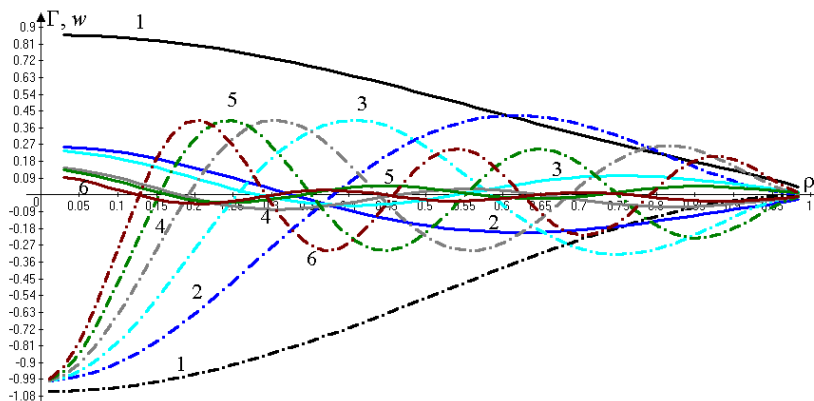


Рис. 4. Форми коливань та розв'язки гіперсингулярних рівнянь

Після отримання розв'язків гіперсингулярних рівнянь переходимо до побудови матриці приєднаних мас. Шукаємо розв'язок задачі гідро пружних коливань пластини у вигляді рядів (6), (7). Розглянемо рівняння (1) у припущенні, що $q_0(x, y, t) = 0$, а перепад тиску знаходиться з рівняння (4), при цьому маємо такі співвідношення

$$D \sum_{m=1}^N c_{m0}(t) \Delta \Delta w_{m0} + \rho_p h \sum_{m=1}^N \ddot{c}_{m0}(t) w_{m0} = -\rho_l \sum_{m=1}^N \ddot{c}_{m0}(t) \Gamma_{m0} \quad (25)$$

Оскільки розглядатимуться вільні гідро пружні коливання, то вважаємо, що

$$c_{m0}(t) = C_{m0} \exp(i\omega t), \quad (26)$$

де ω - частота власних гідро пружних коливань, i – уявна одиниця, C_m - невідомі сталі. Згідно з рівностями (17) та (26) перетворимо (25) до вигляду

$$D \sum_{m=1}^N C_{m0} \alpha_{m0}^4 w_{m0} - \omega^2 \left[\rho_p h \sum_{m=1}^N C_{m0} w_{m0} + \rho_l \sum_{m=1}^N C_{m0} \Gamma_{m0} \right] = 0. \quad (27)$$

Перевіркою ортогональності форм власних коливань $w_m(\rho)$ встановлюємо, що

$$(w_{m0}(\rho), w_{l0}(\rho)) = r_{m0} \delta_{ml},$$

з такими значеннями констант r_{m0} : $r_{10} = 0.1018870979$, $r_{20} = 0.0506907858$, $r_{30} = 0.0337792448$, $r_{40} = 0.0253319976$, $r_{50} = 0.0202649244$, $r_{60} = 0.0168871927$.

Здійснимо скалярний добуток рівняння (27) на функції $w_{l0}(\rho)$, $l = 1, 2, \dots, N$ та отримаємо систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно сталих C_m

$$\sum_{m=1}^N \left\{ \delta_{lm} r_{m0} D \alpha_{m0}^4 - \omega^2 [\rho_p h r_{m0} \delta_{lm} + \rho_l (\Gamma_{m0}, w_{l0})] \right\} C_{m0} = 0 \quad (28)$$

Для знаходження ненульового розв'язку рівнянь (28) здобудемо характеристичне рівняння відносно ω

$$\det \left\{ \rho_p h \Omega_{m0}^2 r_{m0} \delta_{lm} - \omega^2 [\rho_p h r_{m0} \delta_{lm} + \rho_l (\Gamma_{m0}, w_{l0})] \right\} = 0$$

Таким чином, задачу визначення частот та форм власних гідропружних коливань круглої пластини зведено до розв'язання проблеми власних значень

$$(\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{B}) \mathbf{C} = 0,$$

де елементи матриць визначаються за формулами $a_{ml} = \Omega_{m0}^2 \rho_p h r_{m0} \delta_{ml}$, $b_{ml} = \rho_p h r_{m0} \delta_{ml} + \rho_l (\Gamma_{m0}, w_{l0})$, а елементи матриці приєднаних мас рідини за формулами

$$g_{ml} = (\Gamma_{m0}, w_{l0}) = \tau \sum_{i=1}^{N_l} \rho_{i0} \Gamma_m(\rho_{i0}) w_l(\rho_{i0}),$$

тобто, використовуємо формулу центральних прямокутників, в якій τ є кроком інтегрування.

Розглянуто круглу пластину з такими геометричними та механічними параметрами: $R = 1\text{м}$, $h = 0.005\text{м}$, модуль Юнга $E = 206\text{Мпа}$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$, густина матеріалу $\rho_p = 7800\text{кг/м}^3$. За формулами (17) отримані частоти вільних коливань пластини без урахування приєднаних мас в аксіально-симетричному формулюванні. Далі з використанням методу, наведеного вище, отримані частоти вільних коливань пластини з урахуванням приєднаних мас рідини. Вважалось, що густина рідини дорівнювала $\rho_l = 1000\text{кг/м}^3$. В таблиці 2 наведені числові дані щодо частот коливань пластинки як з урахуванням, так і без урахування приєднаних мас рідини.

Табл. 2.

Частоти коливань круглої пластинки, Гц

n	1	2	3	4	5	6
Ω_{0n}	12.6427	49.2191	110.272	195.763	305.688	440.049
ω_{0n}	2.5321	14.9146	41.1188	83.4590	143.562	222.689

В таблиці через Ω_{0n} позначені частоти вільних коливань пластинки без врахування приєднаних мас рідини, а як ω_{0n} - позначені відповідні частоти з урахуванням приєднаних мас, n – номер форми коливань. Зазначимо, що форми коливань пластики, що занурена в рідину, практично збігаються з формами вільних коливань «сухої» пластинки. Про це свідчать дані таблиці 3, де наведені коефіцієнти C_{0n} для $n = \overline{1,6}$, що визначені в формулі (26) та фігурують в розкладенні форм коливань пластинки в рідині за формами вільних коливань пластинки, що не контактує з рідиною.

Табл. 3.

Коефіцієнти при формах вільних коливань пластинки в рідині

n	C_{01}	C_{02}	C_{03}	C_{04}	C_{05}	C_{06}
1	1.00000	-0.01441	0.00195	-0.00047	0.00015	-0.00006
2	0.10786	1.00000	-0.03011	0.00699	-0.00233	0.00095
3	0.04063	0.10062	1.00000	-0.03805	0.01131	-0.00455
4	0.01809	-0.04987	0.09010	1.00000	-0.04183	0.01424
5	-0.01153	0.02636	-0.04915	0.08114	1.00000	-0.04329
6	0.00588	-0.01851	0.02708	-0.04553	0.07169	1.00000

З результатів, наведених в таблиці 2, з'ясуємо, що врахування наявності рідкого середовища приводить до суттєвого зменшення частот вільних коливань. Зі зростанням номера частоти цей вплив поступово зменшується.

Висновки

Отримано аксіально-симетричне формулювання методу гіперсингулярних інтегральних рівнянь. Знайдені числові розв'язки одновимірного гіперсингулярного рівняння з правими частинами у вигляді комбінацій функцій Бесселя. Розроблено алгоритм побудови матриці приєднаних мас, що дало змогу знайти частоти власних коливань пластинки з урахуванням приєднаних мас.

Список використаної літератури

1. Ibrahim R. A. Liquid sloshing dynamics: theory and applications. Cambridge University Press, 2005. <https://www.researchgate.net/publication/259815818>.
2. Gavrilyuk I., M. Hermann Lukovsky I., Solodun O., Timokha, A. Natural Sloshing frequencies in Truncated Conical Tanks. *Engineering Computations*. 2008. Vol. 25, Iss: 6, pp. 518-540. <https://www.researchgate.net/publication/245338809>.
3. Gnitko V., Naumenko V., Rozova L., Strelnikova E. Multi-domain boundary element method for liquid sloshing analysis of tanks with baffles. *Journal of Basic and Applied Research International*. 2016. 17(1), pp. 75-87. <https://www.researchgate.net/publication/301655238>.
4. Strelnikova E., Gnitko V., Krutchenko D., Naumemko Y. Free and forced vibrations of liquid storage tanks with baffles *J. Modern Technology & Engineering*. 2018. Vol. 3, No.1, pp. 15-52. <http://jomardpublishing.com/UploadFiles/Files/journals/JTME/V3No1/StrelnikovaE.pdf>
5. Medvedovskaya T., Strelnikova E., Medvedyeva K. Free Hydroelastic Vibrations of Hydroturbine Head Covers. *Intern. J. Eng. and Advanced Research Technology (IJEART)*. 2015. Vol. 1, Iss: 1, pp. 45-50. DOI: 10.13140/RG.2.1.3527.4961. https://www.researchgate.net/publication/282868308_Free_Hydroelastic_Vibrations_of_Hydroturbine_Head.
6. Місюра С. Ю., Сметанкіна Н. В., Місюра Є. Ю. Раціональне моделювання кришки гідротурбіни для аналізу міцності. *Вісн. Нац. техн. ун-ту «ХПІ»*. Сер. Динаміка і міцність машин. 2019. № 1. С. 34-39. <http://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/44370>.
7. Ганчин Е. В., Ржевская И. Е., Стрельникова Е. А. Исследование динамических характеристик лопастей рабочих колес поворотного-лопастных гидротурбин при взаимодействии с жидкостью. *Вісник Харківського національного університету*. 2009. № 847. С. 79-86. <http://mia.univer.kharkov.ua/11/30078.pdf>.
8. Дегтярев К. Г., Стрельникова Е. А., Шелудько Г. А. Компьютерное моделирование лопастей ветроустановок с оптимальными параметрами. *Вісн. Харківського нац. ун-ту імені В.Н. Каразіна. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2012. № 19. С. 81-86 <http://mia.univer.kharkov.ua/19/30251.pdf>.
9. Makeev V. I., Strelnikova E. A., Trofimenko P. E., Bondar A. V. On Choice of Design Parameters for an Aircraft. *Int. Appl. Mech.* 2013. 49, No. 5, pp.588-596. DOI: [10.1007/s10778-013-0592-8](https://doi.org/10.1007/s10778-013-0592-8).
10. Serikova E., Strelnikova E., Yakovlev V. Mathematical model of dangerous changing the groundwater level in Ukrainian industrial cities. *Journal of Environment Protection and Sustainable Development*. 2015. Vol. 1, pp.86-90. <https://www.researchgate.net/publication/281784323>.
11. Sierikova E., Strelnikova E., Pisia L. Pozdnyakova E. Flood risk management of Urban Territories *Eco. Env. & Cons.* 2020. 26 (3), pp.1068-1077. <http://91.234.43.156/bitstream/123456789>.
12. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с. <https://studizba.com/files/show/djvu/1936-1-segerlind-l--primenenie-metoda.html>.
13. Brebbia C. A, Telles J. C. F., Wrobel L. C. Boundary element techniques: theory and applications in engineering. Springer-Verlag: Berlin and New York, 1984. <https://studizba.com/files/show/djvu/1932-1-brebbiya-k-telles-zh-vroubel-l--metody.html>.
14. Шелудько Г. А., Шупіков О. М., Сметанкіна Н. В., Угрімов С. В. Прикладний адаптивний пошук. Харків: Око, 2001. 191 с.

- http://irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis.
15. Шелудько, Г. А., Стрельникова Е. А., Кантор Б. Я. Гибридные методы в задачах оптимального проектирования. 1. Поискные методы. Харьков : Новое слово, 2008. 188 с. <http://irbis-nbuv.gov.ua>.
 16. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. Theory of plates and shells. New York: McGraw-Hill, 1959. 594 с. https://www.cap-recifal.com/ccs_files/articles.
 17. Gnitko V., Degtyariv K., Karaiev A., Strelnikova E. Multi-domain boundary element method for axisymmetric problems in potential theory and linear isotropic elasticity. *WIT Transactions on Engineering Sciences*. 2019. Vol. 122, pp. 13-25. DOI: 10.2495/BE410021. <https://www.witpress.com/elibrary/wit-transactions-on-engineering-sciences/122/37070>.
 18. Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М.: Гостехтеориздат, 1953. 416 с. http://publ.lib.ru/ARCHIVES/G/GYUNTER_.
 19. Стрельникова Е. А. Гиперсингулярные интегральные уравнения в двумерных краевых задачах для уравнения Лапласа и уравнений Ламе. *Доп. НАН України*. 2001. №3. С. 27-31. <https://www.dopovidi-nanu.org.ua/uk/archive>.
 20. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Харьков: Изд. Харьк. национального ун-та им. В.Н. Каразина, 2000. 92с. <http://ekhnuir.univer.kharkov.ua/handle/123456789/247>.
 21. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М: Наука, 1978. 352 с. <https://www.twirpx.com/file/1394980/>.
 22. Кантор Б. Я., Стрельникова Е. А. Гиперсингулярные интегральные уравнения в задачах механики сплошной среды. Харьков: Новое слово, 2005. 252 с. <http://mia.univer.kharkov.ua/11/30090.pdf>.
 23. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с. <http://www.vixri.com/d/Gradshtejn,%20Ryzhikov%20Tablicy%20Integralov.pdf>.
 24. Karaiev A., Strelnikova E. Singular integrals in axisymmetric problems of elastostatics. *International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing*. 2020. Vol. 11, № 1, 2050003. DOI: [10.1142/S1793962320500038](https://doi.org/10.1142/S1793962320500038).
 25. Кит Г. С., Хай М. В. Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1989. 288 с. <https://www.e-varamu.ee/item/HMM7WKKBPAMHRIRDJ7BUXPYNW4X3S625>.

References

1. Ibrahim, R. A. (2005). Liquid sloshing dynamics: theory and applications. *Cambridge University Press*. URL: <https://www.researchgate.net/publication/259815818>.
2. Gavriilyuk, I., Hermann M., Lukovsky I., Solodun O., & Timokha, A. (2008). Natural Sloshing frequencies in Truncated Conical Tanks. *Engineering Computations*. Vol. 25, No. 6, 518-540. URL: <https://www.researchgate.net/publication/245338809>.
3. Gnitko, V., Naumenko, V., Rozova, L. & Strelnikova, E. (2016). Multi-domain boundary element method for liquid sloshing analysis of tanks with baffles. *Journal of Basic and Applied Research International*. 17(1), 75-87, <https://www.researchgate.net/publication/301655238>.
4. Strelnikova, E., Gnitko, V., Krutchenko, D., & Naumemko, Y. (2018). Free and forced vibrations of liquid storage tanks with baffles. *J. Modern Technology & Engineering*. Vol. 3, No. 1, 15-52. <http://jomardpublishing.com/UploadFiles/Files/journals/JTME/V3No1/StrelnikovaE.pdf>.
5. Medvedovskaya, T., Strelnikova E., & Medvedyeva, K. (2015). Free Hydroelastic

- Vibrations of Hydroturbine Head. *Intern. J. Eng. and Advanced Research Technology (IJEART)*. Vol. 1, No 1, 45-50. DOI 10.13140/RG.2.1.3527.4961. URL: <https://www.researchgate.net/publication/282868308> Free Hydroelastic Vibrations of Hydroturbine Head.
6. Misiura, C. Yu., Smetankina, N. V., & Misiura, Ye. Yu. (2019). Ratsionalne modeliuвання kryshky hidroturbiny dlia analizu mitsnosti. *Visn. Nats. tekhn. in-tu «KhPI»*. Ser. *Dynamika i mitsnist mashyn*. **1**, 34-39. URL: <http://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/44370>.
 7. Ganchin, E. V., Rzhetskaya, I. E., & Strelnikova, E. A. (2009). Issledovanie dinamicheskikh kharakteristik lopastej rabochikh koles povorotno-lopastnykh gidroturbin pri vzaimodejstvii s zhidkost'yu. *Bulletin of Kharkiv National University*. No. 847, pp.79-86. URL: <http://mia.univer.kharkov.ua/11/30078.pdf>.
 8. Degtyarev, K. G., Strelnikova, E. A., & Shelud'ko, G. A. (2012). Komp'yuternoe modelirovanie lopastej vetroustanovok s optimal'nymi parametrami. *Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University. Series: Mathematical modeling. Information Technology. Automated control systems*. No. 19, pp.81-86. URL: <http://mia.univer.kharkov.ua/19/30251.pdf>.
 9. Makeev, V. I., Strelnikova, E. A., Trofimenko, P. E., & Bondar, A. V. (2013). On Choice of Design Parameters for an Aircraft. *Int. Appl. Mech.* **49**, No 5, 588-596. DOI: 10.1007/s10778-013-0592-8.
 10. Serikova, E., Strelnikova, E., & Yakovlev, V. (2015). Mathematical model of dangerous changing the groundwater level in Ukrainian industrial cities. *Journal of Environment Protection and Sustainable Development*. Vol. 1, 86-90. <https://www.researchgate.net/publication/281784323>.
 11. Serikova, E., Strelnikova, E., Pisia, L. & Pozdnyakova, E. (2020). Flood risk management of Urban Territories Eco. *Env. & Cons.* **26** (3), 1068-1077. <http://91.234.43.156/bitstream/123456789>.
 12. Segerlind, L. (1979). *Primenenie metoda konechnykh ehlementov*. M.: Mir. URL: <https://studizba.com/files/show/djvu/1936-1-segerlind-l--primenenie-metoda.html>.
 13. Brebbia, C. A., Telles, J. C. F., & Wrobel, L. C. (1984). *Boundary element techniques: theory and applications in engineering*. Springer-Verlag: Berlin and New York. URL: <https://studizba.com/files/show/djvu/1932-1-brebbiya-k-telles-zh-vroubel-l--metody.html>
 14. Shelud'ko, H. A., Shupikov, O. M., Smetankina, N. V., & Uhrimov, S. V. (2001). *Prykladnyi adaptyvnyi poshuk*. Kharkiv: Oke. http://irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis.
 15. Shelud'ko, G. A., Strelnikova, E. A., & Kantor, B. Ya. (2008). *Gibridnye metody v zadachakh optimal'nogo proektirovaniya. 1. Poiskovyie metody*. Khar'kov: Novoe slovo. <http://irbis-nbuv.gov.ua>.
 16. Timoshenko, S., & Woinowsky-Krieger, S. (1959). *Theory of plates and shells*. New York: McGraw-Hill. URL: https://www.cap-recifal.com/ccs_files/articles/cuveaqua1 denisio/Timoshenko_-_Theory_of_plates_and_shells.pdf.
 17. Strelnikova, E., Gnitko, V., Krutchenko, D., & Naumemko, Y. (2018). Free and forced vibrations of liquid storage tanks with baffles *J. Modern Technology & Engineering*. Vol. 3, No.1, 15-52. URL: <http://jomardpublishing.com/UploadFiles/Files/journals/JTME/V3No1/StrelnikovaE.pdf>.
 18. Gyunter, N. M. (1953). *Teoriya potentsiala i ee primenenie k osnovnym zadacham matematicheskoy fiziki*. M.: Gostekhizdat. <http://publ.lib.ru/ARCHIVES/G/GYUNTER>.
 19. Strelnikova E. A. (2001). *Gipersingulyarnye integral'nye uravneniya v dvumernykh*

- kraevykh zadachakh dlya uravneniya Laplasya i uravnenij Lame. *Dop. NAN Ukraini*. No. 3, 27-31. URL: <https://www.dopovidi-nanu.org.ua/uk/archive>.
20. Gandel', Yu. V. (2010). Vvedenie v metody vychisleniya singulyarnykh i gipersingulyarnykh integralov. *Bulletin of Kharkiv National University*. **92**. URL: <http://ekhnuir.univer.kharkov.ua/handle/123456789/247>.
 21. Hadamard, J. (1978). The Cauchy problem for linear partial differential equations of hyperbolic type. M: Nauka. URL: <https://www.twirpx.com/file/1394980/>.
 22. Kantor, B. Ya., & Strelnikova, E. A. (2005). Gipersingulyarnye integral'nye uravneniya v zadachakh mekhaniki sploshnoj sredy. Kharkov: Novoe Slovo. URL: <https://www.twirpx.com/file/1394980/>.
 23. Gradshteyn, I. S., & Ryzhik, I. M. (1963). Tablicy integralov, summ, ryadov i proizvedenij. M.: Fizmatgiz. URL: <http://mia.univer.kharkov.ua/11/30090.pdf>.
 24. Karaiev, A., & Strelnikova, E. A. (2020). Singular integrals in axisymmetric problems of elastostatics. *International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing*. Vol. 11, No. 1, 2050003. DOI: [10.1142/S1793962320500038](https://doi.org/10.1142/S1793962320500038).
 25. Kit, G. S., & Hai, M. V. (1989). Metod potencialov v trekhmernykh zadachakh termouprugosti dlya tel s treshchinami. Kiev: Nauk. Dumka. URL: <https://www.e-varamu.ee/item/HMM7WKKBPAMHRIRDJ7BUXPYNW4X3S625>.

Верушкін Іван Олексійович – магістрант кафедри прикладної математики інституту проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України; e-mail: ivanveruskin86@gmail.com.

Стрельнікова Олена Олександрівна – д.т.н., професор, провідний науковий співробітник; Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України; e-mail: elena15@gmx.com. ORCID: 0000-0003-0707-7214.