УДК 514.18

В.Д. БОРИСЕНКО
Миколаївський національний університет імені В.О. Сухомлинського
С.А. УСТЕНКО
Державний університет "Одеська політехніка"
І.В. УСТЕНКО
Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова

АРБЕЛОС І ПОВ'ЯЗАНІ З НИМ КОЛА

Геометрія як наука зародилася в стародавній Греції, її аксіоматичні побудови описані в "Началах" Евкліда. Евклідова геометрія займалася вивченням найпростіших фігур на площині та в просторі. Грецькомовні математики, які жили в період між VI століттям до н.е. і V століттям н.е., поставили та розв'язали багато цікавих геометричних задач. Більшість цих задач розв'язувалася графічним шляхом, що вимагало виконання великої кількості різноманітних складних побудов. На той час вважалося, що "істинно геометричними" є ті задачі, які розв'язувалися тільки за допомогою таких "наукових інструментів" як циркуль та лінійка. Особливу увагу древньогрецькі математики приділяли одному із найважливіших геометричних образів – колу, яке навіть у ті часи знаходило широке практичне застосування. Суттєвий внесок у дослідження кола зробив Архімед Сіракузький, який вперше ввів поняття арбелос. Під арбелосом він розумів плоску геометричну фігуру, утворену деяким півколом, з якого вирізані два менших півкола з діаметрами, що лежать на діаметрі вихідного кола і розбивають його на дві частини. Таким чином, утворювався криволінійний трикутник, обмежений трьома півколами.

У пропонованій роботі розглядається питання розв'язання відомих старовинних геометричних задач із застосуванням сучасних методів інженерної графіки, аналітичної геометрії та числових методів, без проведення додаткових побудов, які використовуються при графічному розв'язанні розглянутих задач. При числовій реалізації поставлена задача зводилася до розв'язання нелінійного рівняння з однією змінною. Нелінійні рівняння пов'язані із знаходженням радіусів вписаних або описаних кіл та координат їх центрів. У роботі, зокрема, побудовані коло, вписане в арбелос, спарені кола Архімеда, відомі як кола-близнюки, ланцюг Паппи Олександрійського. Спираючись на дослідження сучасних математиків, присвячених арбелосу, розв'язані задачі побудови кіл Банкова (Bankoff), Шоха (Schoch), Ву (Woo).

Ключові слова: арбелос, старовинні задачі, коло, кола-близнюки, кола Банкова, Шоха, Ву, числові методи, комп'ютерна реалізація.

В.Д. БОРИСЕНКО
Николаевский национальный университет имени В.А. Сухомлинского
С.А. УСТЕНКО
Государственный университет "Одесская политехника"
И.В. УСТЕНКО
Национальный университет кораблестроения имени адмирала Макарова

АРБЕЛОС И СВЯЗАННЫЕ С НИМ ОКРУЖНОСТИ

Геометрия как наука зародилась в Древней Греции, ее аксиоматические построения описаны в "Началах" Евклида. Евклидова геометрия занималась изучением простейших фигур на плоскости и в пространстве. Грекоязычные математики, которые жили в период между VI веком до н.э. и V веком н.э., поставили и решили много интересных геометрических задач. Большинство этих задач решалось *графическим путем, что требовало выполнения большого количества разнообразных сложных построений. В то время считалось, что "истинно геометрическими" являлись те задачи, которые решались только с помощью таких "научных инструментов" как циркуль и линейка. Особое внимание древнегреческие математики уделяли одному из важнейших геометрических образов – окружности, которая даже в те времена находила широкое практическое применение. Существенный вклад в исследование окружности сделал Архимед Сиракузский, который впервые ввел понятие арбелос. Под арбелосом он понимал плоскую геометрическую фигуру, образованную некоторою полуокружностью, из которой вырезались две меньших полуокружности с диаметрами, лежащими на диаметре исходной полуокружности и разбивающие его на две части. Таким образом, образовывался криволинейный треугольник, ограниченный тремя полуокружностями.*

В предлагаемой работе рассматриваются решения известных старинных геометрических задач с применением современных методов инженерной графики, аналитической геометрии и численных методов, без проведения дополнительных построений, которые используются при графическом решении рассматриваемых задач. При численной реализации поставленная задача сводилась к решению нелинейного уравнения с одним неизвестным. Нелинейные уравнения связаны с нахождением радиусов вписанных или описанных окружностей и координат их центров. В работе, в частности, построены окружности, вписанные в арбелос, спаренные окружности Архимеда, известные как окружности-близнецы, цепь Паппы Александрийского. Опираясь на исследования современных математиков, посвященные арбелосу, решены задачи построения окружностей Банкова (Bankoff), Шоха (Schoch), Ву (Woo).

Ключевые слова: арбелос, старинные задачи, окружность, окружности-близнецы, окружности Банкова, Шоха, Ву, численные методы, компьютерная реализация.

V.D. BORISENKO
V.O. Sukhomlinsky Mykolayiv National University
S.A. USTENKO
Odessa National Technical University
I.B. USTENKO
Admiral Makarov National University of Shipbuilding

ARBELOS AND ASSOCIATED CIRCLES

Geometry as a science originated in Ancient Greece, its axiomatic constructions are described in the "Elements" of Euclid. Euclidean geometry studied the simplest figures on the plane and in space. Greek-speaking mathematicians who lived between the 6^{th} century BC and 5^{th} century AD, posed and solved many interesting geometric problems. Most of these tasks were solved graphically, which required the execution of a large number of various complex constructions. At that time it was believed that "truly geometric" are those tasks that were solved only with the help of such "scientific instruments" as a compass and a ruler. Ancient Greek mathematicians paid special attention to one of the most important geometric figures – circles, which even in those days were widely used in practice. Archimedes of Syracuse, who first introduced the concept of arbelos, made a significant contribution to the study of the circle. By arbelos, he understood a flat geometric figure formed by a certain semicircle, from which two smaller semicircles with diameters lying on the diameter of the *original semicircle were cut out and divided into two parts. Thus, a curvilinear triangle was formed, bounded by three semicircles.*

This work considers the issue of solving well-known ancient geometric problems using modern methods of engineering graphics, analytical geometry and numerical methods, without additional constructions, which are used in the graphical solution of the problems under consideration. When implemented numerically, the problem was reduced to solving a nonlinear equation with one unknown. Nonlinear equations are associated with finding the radii of inscribed or circumscribed circles and the coordinates of their centers. In the work, in particular, circles inscribed in arbelos, paired circles of Archimedes, known as twin circles, the Pappa chain of Alexandria are constructed. Based on the research of modern mathematicians on arbelos, the problems of constructing the circles of Bankoff, Schoch, Woo were solved.

Key words: arbelos, old problems, circle, twin circles, Banckoff, Shoch, Woo circles, numerical methods, computer implementation.

Постановка проблеми

Старовинні математики поставили та розв’язали багато цікавих геометричних задач. Більшість цих задач розв’язувалася графічним шляхом, що вимагало виконання великої кількості різноманітних складних побудов. На той час вважалося, що "істинно геометричними" є ті задачі, які розв’язувалися тільки за допомогою таких "наукових інструментів" як циркуль та лінійка. Дивує те, як за допомогою примітивних креслярських інструментів ці математики виконували складні геометричні побудови з високою точністю. Серед цих математиків почесне місце займає Архімед Сіракузький, який приділив значну увагу дослідженню кола та арбелоса – криволінійного трикутника, обмеженого трьома півколами. Подальші дослідження арбелоса призвели до появи багатьох цікавих геометричних задач, які також розв’язувалися ручним графічним способом. Зрозуміло, що ці задачі мали чисто теоретичний інтерес. У світі викладеного цілком слушним є розв’язання старовинних задач із застосуванням сучасних знань математики, зокрема, числових методів та комп’ютерної техніки, яка не тільки суттєво прискорює виконання розрахунків з високою точністю, але й дозволяє бачити результати розв’язків на дисплеї.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Архімед приділив багато уваги арбелосу в книзі "Леми". До наших часів ця книга дійшла у перекладі, виконаним арабським ученим Сабітом ібн Куррой. Під арбелосом Архімед розумів плоску геометричну фігуру, утворену великим півколом, з якого вирізані два менших півкола, діаметри яких лежать на діаметрі великого півкола та розбивають цей діаметр на дві частини. Існує й інше визначення арбелоса. Якщо три точки A, B і C знаходяться на одній прямій, тоді три півкола з діаметрами AB, BC і AC, розташовані по один бік від цієї прямої, обмежують арбелос. Арбелос – це грецьке слово, яке перекладається як шевський ніж. Лезо шевського ножа схоже на арбелос (рис. 1).

Арбелос і пов’язані з ним різноманітні задачі цікавлять і сучасних дослідників, які знаходять нові кола, асоційовані з арбелосом. У всесвітній мережі Інтернет можна знайти розв'язки різноманітних старовинних задач, які у більшості випадків виконувалися графічним способом [1]. У джерелі [2] пропонуються декілька теорем, які визначають певні особливості, пов’язані з арбелосом, проте ці теореми стосуються графічного способу побудови арбелосу. У роботі [3] доводиться, що в арбелосі можна побудувати кола-близнюки. Кола Банкова і Ву розглядаються в роботі [4]. Автори цієї публікації знаходять подальші шляхи можливої їх побудови. Цікавою є робота [5], в якій запропоновано швидкий метод побудові кіл в арбелосі завдяки застосуванню інверсії. Але реалізація методу також базується на ручних графічних побудовах.

Рис. 1. Шевський ніж

Мета дослідження

Метою роботи є розв'язання відомих старовинних геометричних задач із застосуванням сучасних методів інженерної графіки, аналітичної геометрії, числових методів, комп'ютерної графіки, без проведення додаткових побудов, які використовуються при графічному розв'язанні розглянутих задач.

Викладення основного матеріалу дослідження

Викладення основного матеріалу дослідження виконаємо шляхом розв'язання п'яти задач: побудови кола, вписаного в арбелос, кола Банкова, спарених кіл Архімеда, кіл Шоха і Ву, ланцюга Паппи Олександрійського.

1. Побудова кола, вписаного в арбелос

Розв'яжемо задачу, пов'язану з вписуванням кола в арбелос. На рис. 2, запозиченому із джерела [1], показано один із способів побудови кола, вписаного в арбелос, сформований півколом з центром у точці *O* та двома півколами з центрами у точках *D* і *E*. Вписаним колом є коло з центром в точці *N*. З розгляду цього рисунка видно, що вписане коло торкається двох заданих півкіл. Точка торкання вписаного кола з півколом з центром в точці *O* не позначена, але її наявність очевидна. Точки *P* і *Q* є точками перетину кола з центром в точці *H* з двома заданими півколами. Знаходження положення точки *H* не викликає сумнівів, а радіус кола дорівнює віддаленню точки *H* від прямої *AB*.

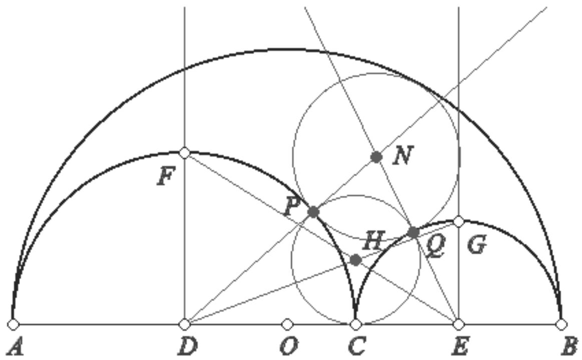

Рис. 2. Графічний спосіб вписування кола в арбелос

Розглянемо дугу PQ вписаного в арбелос кола як дугу зовнішнього спряження двох півкіл з центрами в точках D і E. З інженерної графіки відомо, що центр дуги спряження знаходиться в точці перетину двох кіл, радіуси яких дорівнюють сумі радіусів заданих півкіл та радіуса дуги спряження. Тобто, вони дорівнюють $R_1 + R$ і $R_2 + R$, де R_1 – радіус півкола з центром в точці D; R_2 – радіус півкола з центром в точці E; R – радіус дуги спряження.

На перший погляд, координати центра дуги спряження можна знайти розв'язанням двох рівнянь другого степеня, якими описуються два допоміжних кола. Але цю задачу краще розв'язувати іншим способом, який не передбачає застосування двох квадратичних рівнянь. Розглянемо цей спосіб, базуючись на ідеях джерела [6].

На рис. 3 показані два перетинних, довільно розташованих кола. Треба знайти координати точок O_3 і O_4 їх перетину.

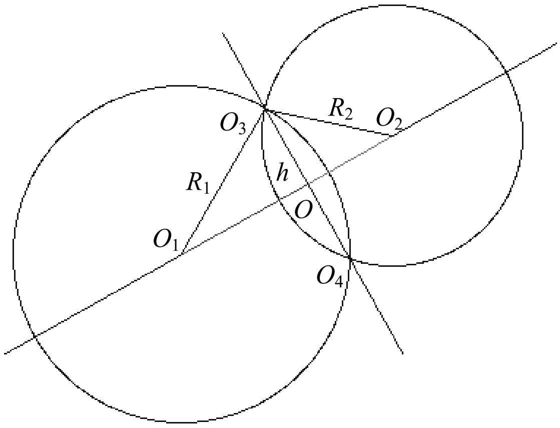

Рис. 3. Визначення точок перетину двох кіл

Позначимо відрізок O_1O літерою a, відрізок OO_2 – літерою b. Літерою h позначимо відстань від точки O_3 перетину розглядуваних кіл до прямої O_1O_2. Розглядаючи два прямокутних трикутника O_1OO_3 і O_2OO_3, можна записати два наступних рівняння:

$$a^2 + h^2 = R_1^2 \text{ і } b^2 + h^2 = R_2^2.$$

Приймаючи $d = a + b$, після перетворень отримуємо вираз для розрахунку a

$$a = \frac{R_1^2 - R_2^2 + d^2}{2d}.$$

Маючи a, визначаємо h

$$h^2 = R_1^2 - a^2.$$

Розраховуємо координати точки O за наступними виразами:

$$x_O = x_{O_1} + a\left(x_{O_2} - x_{O_1}\right)/d; \quad y_O = y_{O_1} + a\left(y_{O_2} - y_{O_1}\right)/d.$$

І, нарешті, визначаємо координати точок O_3 і O_4 перетину двох кіл:

$$x_{O_3} = x_O - h\left(y_{O_2} - y_{O_1}\right)/d; \quad y_{O_3} = y_O + h\left(x_{O_2} - x_{O_1}\right)/d; \tag{1}$$

$$x_{O_4} = x_O + h\left(y_{O_2} - y_{O_1}\right)/d; \quad y_{O_4} = y_O - h\left(x_{O_2} - x_{O_1}\right)/d. \tag{2}$$

Таким чином, знайдені вирази для розрахунку координат точок перетину двох довільно розташованих кіл без сумісного розв'язання рівнянь другого степеня. Надалі під R_1 і R_2 будемо мати на увазі суми радіусів кіл, що спрягаються, з дугою радіуса R дуги для зовнішнього спряження. Для внутрішнього спряження радіус R віднімається.

При вписуванні кола в арбелос радіус R є невідомим. Його величину знаходимо числовим методом шляхом зведення до нуля кореня нелінійного рівняння:

$$f = R_0 - R - \sqrt{x_i^2 + y_i^2}, \tag{3}$$

де x_i, y_i – поточні координати центра кола, вписаного в арбелос.

Для розв'язання цього рівняння застосовано високоефективний алгоритм, запропонований в роботі [7], який сполучає безвідмовність бісекції з асимптотичною швидкістю методу січних.

Результат розв'язання задачі у графічному вигляді показаний на рис. 4.

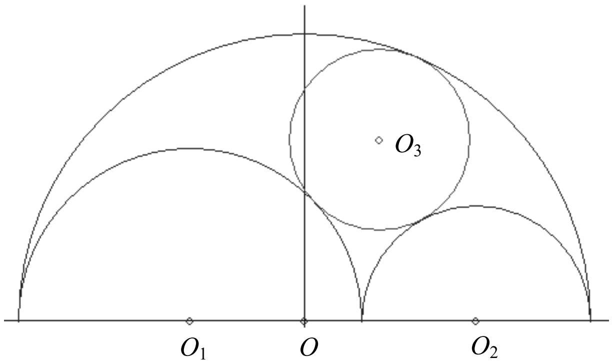

Рис. 4. Коло, вписане в арбелос

У якості вихідних даних застосовувалися наступні: R_0 = 100 (радіус півкола з центром в точці O), R_1 = 60 (радіус півкола з центром в точці O_1), R_2 = 40 (радіус півкола з центром в точці O_2). За цих даних радіус вписаного кола становив R_3 = = 31,57894. Задача розв'язувалася із застосуванням виразів (1). Похибка, пов'язана з числовим розв'язанням нелінійного рівняння, не перевищувала 4,841731E-06.

Зрозуміло, що вписування кола в арбелос графічним способом з вказаною точністю неможливо. Крім того, треба додати, що при вписуванні в арбелос кола ніякі аналітичні залежності, пов'язані з визначенням координат центра цього кола та його радіуса, не застосовувалися. Усього було використано шість ітерацій.

2. Коло Банкова

Арбелос, який вперше досліджувався Архімедом, і до сих пір цікавить науковців. Дослідження з цього питання можна знайти, наприклад, в роботах [2–4]. Нас цікавитиме робота [3], автором якої є Банков (Bankoff). Банков у 1974 році знайшов ще одне коло, яке на його честь назване колом Банкова. Це коло можна побудувати в арбелосі, в який вписано коло Архімеда. Між двома заданими півколами та вписаним колом утворюється трикутник з трьома криволінійними сторонами (рис. 5).

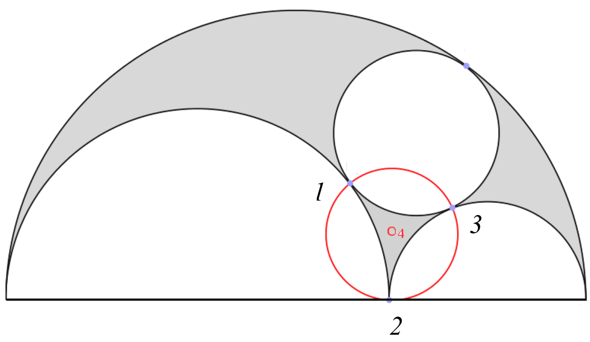

Рис. 5. Коло Банкова

Після побудови в арбелосі вписаного кола Архімеда маємо результат, показаний на рис. 4. На цьому рисунку бачимо точки торкання вписаного кола з двома заданими півколами, але їх координати невідомі.

Визначимо координати цих точок. Для точки *1* маємо координати центра O_1 і центра O_3, вписаного в арбелос кола, що надає можливість знайти кут φ нахилу прямої, яка з'єднує вказані центри кіл. Відомо, що ця пряма пройде через точку торкання півкола і кола. Тоді координати точки *1* визначаться за виразами:

$$x_1 = x_{O_1} + R_1 \cos\varphi; \quad y_1 = R_1 \sin\varphi.$$

Подібним же чином можна знайти координати точки *3*:

$$x_3 = x_{O_2} - R_2 \cos\psi; \quad y_3 = R_2 \sin\psi.$$

Точки, через які має пройти коло Банкова, показані на рис. 6.

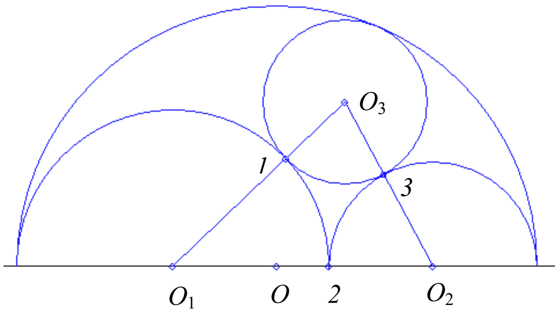

Рис. 6. Точки для побудови кола Банкова

Отже, для побудови кола Банкова маємо три точки. Це дві точки торкання кола Архімеда з відповідними півколами, які мають координати (x_1, y_1) і (x_3, y_3). Третя точка – це точка (x_2, y_2) торкання півкіл на горизонтальній лінії. Для визначення тангенсів кутів нахилу і вільних членів рівнянь прямих ліній, проведених через точки з координатами (x_1, y_1) і (x_2, y_2) та (x_2, y_2) і (x_3, y_3), необхідно розв'язати наступну систему рівнянь:

$$y_1 = a_1 x_1 + b_1; \quad y_2 = a_1 x_2 + b_1.$$

У результаті розв'язання цієї системи рівнянь матимемо a_1 і b_1:

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \quad b_1 = \frac{y_2 x_1 - y_1 x_2}{x_1 - x_2}. \tag{4}$$

Аналогічно для другої прямої можна отримати:

$$y_2 = a_2 x_2 + b_2; \quad y_3 = a_2 x_3 + b_1;$$

$$a_2 = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}; \quad b_2 = \frac{y_2 x_3 - y_3 x_2}{x_2 - x_3}. \tag{5}$$

Система рівнянь прямих, які проходять через середини відрізків ліній, що з'єднують точки з вище вказаними координатами, може бути записана наступним чином:

$$y = -\frac{1}{a_1} x + b_3; \quad y = -\frac{1}{a_2} x + b_4,$$

де $$b_3 = \frac{y_2 + y_1}{2} + \frac{x_2 + x_1}{2a_1}; \quad b_4 = \frac{y_3 + y_2}{2} + \frac{x_3 + x_2}{2a_2}.$$

Перетин цих двох ліній визначає точку, яка є центром вписаного кола:

$$x = \frac{(b_4 - b_3)a_1 a_2}{a_1 - a_2}; \quad y = \frac{b_3 a_1 - b_4 a_2}{a_1 - a_2}.$$

Радіус кола визначається виразом

$$R = \sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2}.$$

На рис. 7. показано коло Банкова, побудоване за вихідними даними, наведеними вище.

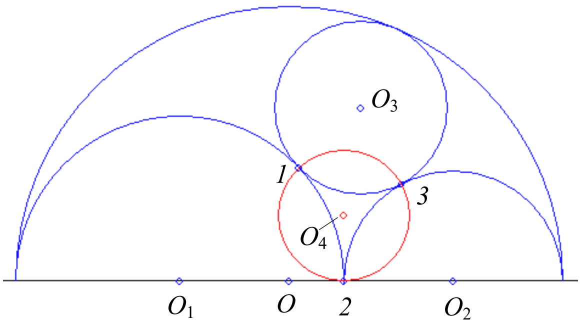

Рис. 7. Результат побудови кола Банкова

Як видно з розгляду цього рисунка, коло Банкова чітко проходить через точки *1* – *3*. Можна також відзначити, що коло Банкова побудоване без застосування числових методів, але це було зроблено за наявності кола Архімеда.

3. Спарені кола Архімеда

Під спареними колами розуміються два спеціальних кола, пов'язаних з арбелосом. Ці кола вперше з'явилися в книзі "Лем". Архімедом було доведено (п'яте твердження), що ці два кола є конгруентними. Дуже часто їх називають колами-близнюками.

Якщо арбелос розділений на дві менші області відрізком прямої, проведеної через точку C перпендикулярно до лінії ACB, тоді кожне з двох спарених кіл Архімеда α і β будуть лежати в межах однієї з цих двох областей, дотичної до її двох напівкруглих сторін і до сегмента розщеплення CD (рис. 8).

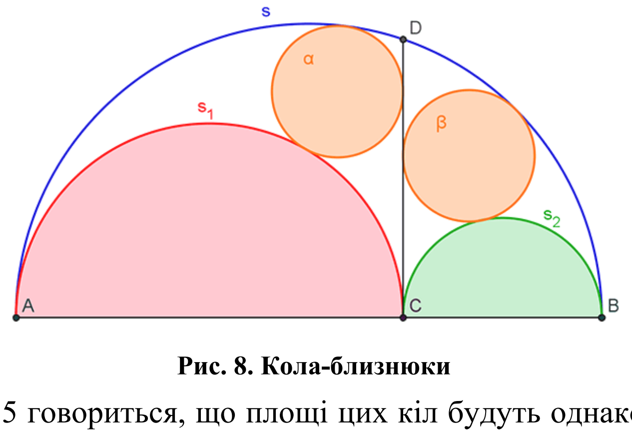

Рис. 8. Кола-близнюки

У твердженні 5 говориться, що площі цих кіл будуть однаковими незалежно від розташування точки C, у зв'язку з чим вони називаються колами-близнюками Архімеда.

Побудуємо спарені кола Архімеда, застосовуючи числовий метод визначення центрів кіл та їх радіус.

Коло α будемо розглядати як коло, яке дозволяє здійснити плавний перехід від дуги s до дуги s_1. З точки зору інженерної графіки це є випадок змішаного спряження.

Для дуги s спряження буде внутрішнім, тому допоміжну дугу будемо проводити радіусом $R_0 - R$, де R – радіус дуги спряження, який визначається числовим методом шляхом зведення до нуля рівняння

$$f = x_i + R - x_C,$$

де x_i – поточна абсциса центра кола; x_C – абсциса розташування прямої CD, яка розділяє арбелос на дві частини.

Спряження кола-близнюка α з дугою s_1 є зовнішнім, тому допоміжна дуга проводиться радіусом $R_1 + R$.

Для визначення координат поточного центра кола-близнюка застосовуються вирази (2).

На рис. 9 показане коло-близнюк, розташоване зліва по відношенню до прямої CD. Результат отримано за три ітерації. Радіус отриманого кола дорівнює 24 з нульовою похибкою, що пояснюється простотою нелінійної функції та цілим значенням абсциси центра кола O_4.

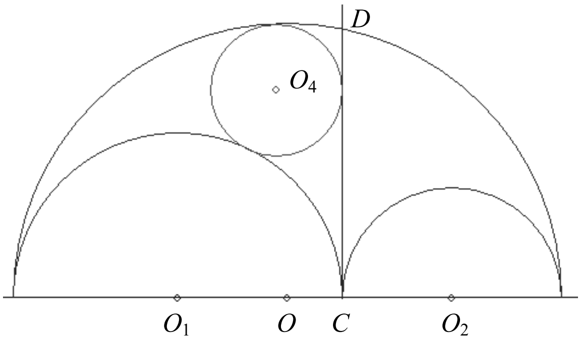

Рис. 9. Лівостороннє коло-близнюк

Аналогічним чином будується правостороннє коло-близнюк, але для визначення координат поточного центра застосовуються вирази (1). Остаточний результат наведено на рис. 10.

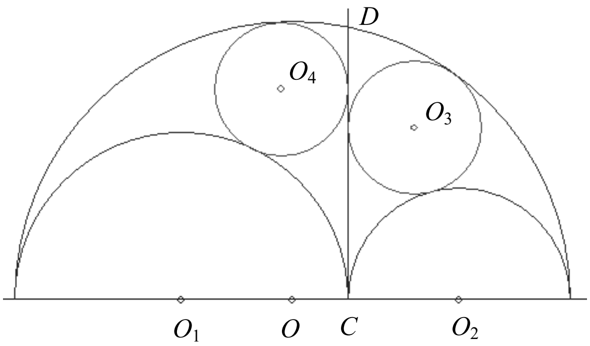

Рис. 10. Спарені кола-близнюки

Отримане правостороннє коло також має радіус, який дорівнює 24. Це підтверджує справедливість п’ятого твердження Архімеда.

4. Коло Шоха

У 1979 році Томас Шох (Schoch) відкрив дюжину нових кіл Архімеда (рис. 11). Розглянемо побудову одного з кіл Шоха. Для цього з крайньої лівої точки A півкіл, як із центра, проводимо дугу кола C_1 радіусом $2R_1$, а з правої крайньої точки C – дугу C_2 радіусом $2R_2$. Між дугами C_1, C_2 і C_3 утворюється арбелос, в який треба вписати коло.

Координати центра і радіус вписаного кола визначаємо числовим методом так, як це було зроблено вище. При цьому застосовується нелінійне рівняння (3).

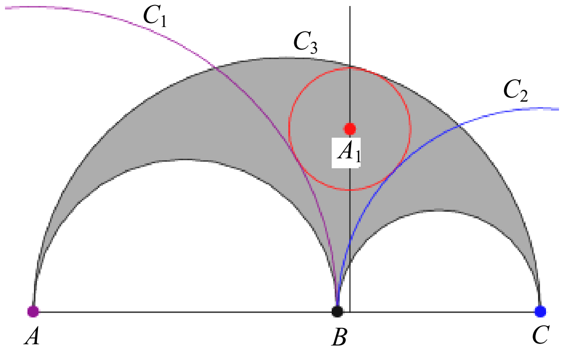

Рис. 11. До побудови кола Шоха

Результат побудови кола Шоха наведено на рис. 12. Це коло відповідає подвійним колам Архімеда, що робить його колом Архімеда; це одне з кіл Шоха. Лінія Шоха перпендикулярна прямій AC і проходить через точку A_1. Це також місце розташування центрів нескінченної кількості кіл Архімеда.

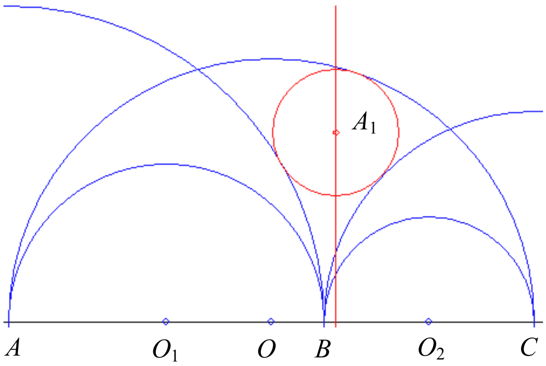

Рис. 12. Коло Шоха

Розглядаючи рис. 12, можна зробити висновок, що побудоване коло Шоха є дотичним до трьох дуг C_1, C_2 і C_3. Результат отримано за шість ітерацій. Радіус кола Шоха дорівнює 24, тобто він такий, як і у кіл-близнят. Похибка розрахунків становить 8,372188E-06.

У 1998 році Пітер Ву (Peter Woo) з університету Біола опублікував висновки Шоха на своєму веб-сайті. Узагальнюючи два кола Шоха, Ву в 1999 році виявив нескінченне сімейство архімедівських кіл, названих колами Ву. Ці кола мають центри, розташовані на лінії Шоха. Їх побудова виконується за умов, що радіуси R_1 і R_2 півкіл з центрами в точках O_1 і O_2 множаться на деякий коефіцієнт m. Цими радіусами проводяться дуги кіл з виконанням умови, що вони торкаються на прямій AC. Далі в ці дуги вписуються кола таким чином, як це зроблено вище з побудовою кола Шоха.

На рис. 13 показані коло Шоха і приклад одного з кіл Ву, яке було розраховано з коефіцієнтом m, рівним 1,5. З розгляду рисунка видно, що центр A_2 кола Ву знаходиться на лінії Шоха A_1B.

5. Ланцюг Паппи Олександрійського

У восьмому твердженні "Лем" Архімед згадує ланцюг кіл, які формально ввів Паппа Олександрійський (рис. 14).

Побудуємо ланцюг Паппи Олександрійського, скориставшись числовими методами.

Першим будується коло з центром в точці F. Координати центра і радіус цього кола відомі. Далі у циклі з передумовою будуються подальші кола. Кількість цих кіл апріорі невідома, оскільки розрахунки в циклі продовжуються до тих пір, поки радіус чергового кола не стане менше 0,75. До речі, збільшенням вказаного параметра можна зменшити кількість побудованих кіл, а зменшенням – навпаки, збільшити кількість кіл Паппи Олександрійського. Програма побудови кіл Паппи Олександрійського налаштована таким чином, що розраховуються координати центрів кіл та їх радіуси, розташованих вище осі абсцис. Кола, розташовані нижче цієї осі, будуються за розрахованими параметрами, тільки з від'ємними значеннями ординат центів кіл.

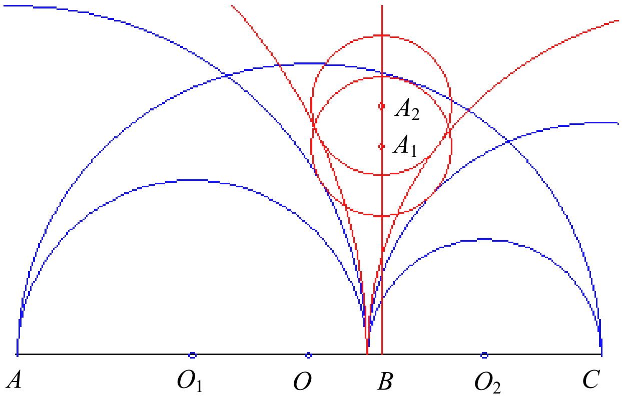

Рис. 13. Коло Ву

Побудовані ланцюги кіл Паппи Олександрійського показані на рис. 15.

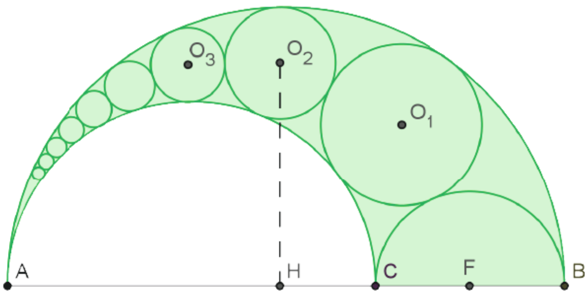

Рис. 14. Приклад кіл Паппи Олександрійського

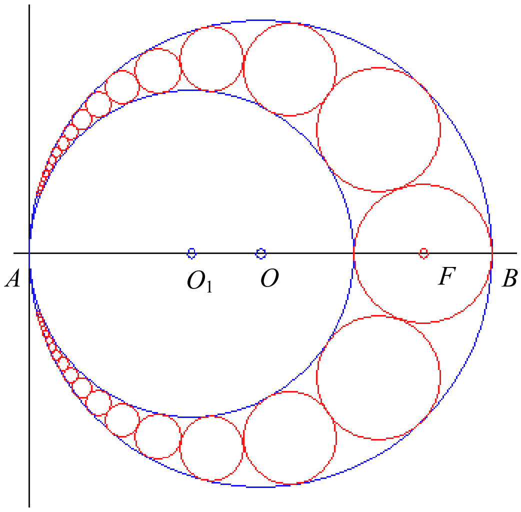

Рис. 15 Ланцюг кіл Паппи Олександрійського

Кола будуються наступним чином. Кожне наступне коло розглядається як коло дуги спряження попередньо побудованого кола ланцюга з колом з центром в точці O_1. Маємо приклад зовнішнього спряження. Оскільки радіус дуги спряження невідомий, то формується нелінійне рівняння виду (3), яке зводиться до нуля підпрограмою *zeroin* [7]. Тобто, параметри кола ланцюга розраховуються таким чином, щоб поточне коло торкалося кола з центром в точці O (найбільше коло на рис. 15).

Висновки

1. Застосуванням методів геометричного креслення, аналітичної та обчислювальної геометрії, числових методів розв'язані задачі, пов'язані з вписуванням кіл в арбелос, для чого був розроблений комп'ютерній код в середовищі програмування

Fortran PowerStation. Розв'язання старовинних геометричних задач відбувалося з візуалізацією отриманих результатів на дисплеї комп'ютера.

2. У роботі практично доведена можливість числового розв'язання задач Архімеда, побудови кіл Банкова, Шоха, Ву, ланцюга Паппи Олександрійського без застосування трудомістких графічних побудов і складних математичних викладок, головною задачею було доцільне формування нелінійного рівняння та області пошуку розв'язків задач.

Список використаних джерел

1. http://www.ddekov.eu/geometric_constructions_ru/htm/Ad02.htm
2. Brian M. The Geometry of The Arbelos. *Carleton University*. April, 1998. 6 p.
3. Bankoff L. Are the Twin Circles of Archimedes Really Twins? *Mathematics Magazine.* **47**.1974. С. 214–218.
4. Okumura H., Watanabe M. The Twin Circles of Archimedes in a Skewed Arbelos. *Forum Geometricorum*. 2004. Volume 4. P. 229–251.
5. Жижилкин И.Д. Инверсия. Москва: Изд-во МЦНМО, 2009. 72 с.
6. http://paulbourke.net/geometry/circlesphere/
7. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. Москва. Мир. 1980. 280 с.

References

1. http://www.ddekov.eu/geometric_constructions_ru/htm/Ad02.htm
2. Brian, M. (1998). The Geometry of The Arbelos. *Carleton University*. April.
3. Bankoff, L. (1974). Are the Twin Circles of Archimedes Really Twins? *Mathematics Magazine.* **47**, 214–218.
4. Okumura, H., & Watanabe, M. (2004). The Twin Circles of Archimedes in a Skewed Arbelos. *Forum Geometricorum*. **4**, 229–251.
5. Zhizhilkin, I.D. (2009). Inversiya. Moskva: Izd-vo MTSNMO.
6. http://paulbourke.net/geometry/circlesphere/
7. Forsayt, Dzh., Malkolm, M., & Mouler, K. (1980). Mashinnyie metodyi matematicheskih vyichisleniy. Moskva. Mir.

Борисенко Валерій Дмитрович – д. т. н., професор, професор кафедри інформаційних технологій Миколаївського національного університету імені В. О. Сухомлинського, e-mail: borisenko.valery@gmail.com, ORCID: 0000-0002-0857-0708

Устенко Сергій Анатолійович – д. т. н., доцент, професор кафедри проектного навчання в інформаційних технологіях Державного університету "Одеська політехніка", e-mail: ustenko.s.a@gmail.com, ORCID: 0000-0003-4968-1233.

Устенко Ірина Валеріївна – к. т. н., доцент, доцент кафедри програмного забезпечення автоматизованих систем Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова, e-mail: ustenko.irina@gmail.com, ORCID: 0000-0003-1541-2414.