УДК 514.18

В.М. ВЕРЕЩАГА, О.М. ПАВЛЕНКО
Мелітопольський державний педагогічний університет ім. Б. Хмельницького
Мелітопольська школа прикладної геометрії ім. В. Найдиша

ТРИРОЗМІРНІ КОМПОЗИЦІЙНІ МАТРИЦІ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДЛЯ СТВОРЕННЯ КОМПОЗИЦІЙНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ОБ'ЄМНИХ ОБ'ЄКТІВ ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ

У дослідженні запропоновано геометричний спосіб створення моделей динаміки у просторі дискретно поданих окремих станів процесу, на базі використання методів композиційної геометрії.

Вводиться означення базисних станів, трирозмірних композиційних матриць, пропонуються правила позначення індексації елементів трирозмірних композиційних матриць (компоматриць).

Вказується на те, що трирозмірну композиційну матрицю неможливо подати у вигляді однієї таблиці, тому запропоновано подавати її у вигляді сукупності таблиць за напрямками параметризації геометричної фігури, для якої складається ця трирозмірна компоматриця.

Наведено приклади загального та розгорнутого подання таких таблиць.

Нагадується, що у композиційному геометричному моделюванні (КГМ) кожну вихідну геометричну фігуру (ГФ), перед розв'язанням задачі, необхідно уніфікувати, тобто привести до вигляду, придатного для її використання у композиційному геометричному моделюванні.

Геометрична складова уніфікованої ГФ подається у вигляді точкових компоматриць за напрямками параметризації.

Параметрична складова уніфікованої ГФ подається у вигляді параметричних компоматриць.

Наголошується, що усі розрахункові операції здійснюються через використання тривимірних координатних (розрахункових) компоматриць, які складаються за схемою відповідних точкових компоматриць.

Вказується на те, що початково сформована трирозмірна параметрична компоматриця, майже завжди, є негармонізованою, тобто сума всіх її елементів не дорівнює одиниці.

Надається алгоритм гармонізацііі параметричної трирозмірної компоматриці.

Надається послідовність операцій у компоматричній формі щодо здобуття трирозмірної компоматриці для об'ємної геометричної фігури довільної форми.

Ключові слова: трирозмірна компоматриця, композиційна модель, гармонізований точковий поліном, геометричний спосіб інтерполяції, базисний стан, види компоматриць, позначення компоматриць, точкові компоматриці, параметричні компоматриці, координатні компоматриці.

V. M. VERESHCHAHA, O. M. PAVLENKO
Melitopol State Pedagogical University named after B. Khmelnytsky
Melitopol School of Applied Geometry named after V. Naidysh

THREE-DIMENSIONAL COMPOSITION MATRIXES AND THEIR APPLICATIONS FOR CREATION OF COMPOSITIONAL GEOMETRIC MODELS OF VOLUME OBJECTS OF ANY ARBITRARY FORM

In the research the geometrical way of creation of models of dynamics in space of discretely presented separate states of process on the basis of use of methods of compositional geometry is offered.

The definition of basic states, three-dimensional composite matrices is introduced, the rules of designation of indexing of elements of three-dimensional composite matrices (compomatrices) are offered.

It is pointed out that a three-dimensional composite cannot be presented in the form of a single table, so it is proposed to provide them in the form of a set of tables in the areas of parameterization of the geometric figure for which this three-dimensional computer matrix is compiled.

Examples of their general and detailed presentation are given.

It is reminded that in composite geometric modeling (CGM) each initial geometric figure (GF), before solving the problem, must be unified, ie lead to a form suitable for its use in composite geometric modeling.

The geometric component of the unified GF is presented in the form of point matrix matrices in parametric directions.

The parametric component of the unified GF is presented in the form of parametric compomatrix.

It is emphasized that all calculation operations are carried out through the use of three-dimensional coordinate matrices (calculated), which are compiled according to the scheme of the corresponding point compomatrices.

It is pointed out that the initially formed three-dimensional computer matrix is parametric, almost always, non-harmonized, ie the sum of all its elements is not equal to one.

An algorithm for harmonizing a parametric three-dimensional computer matrix is provided.

The sequence of operations in the compomatrix form concerning obtaining a compomatrix of three-dimensional for a three-dimensional geometric figure of arbitrary form is given.

Keywords: three-dimensional compomatrix, composite model, harmonized point polynomial, geometric method of interpolation, basis state, types of compomatrices, designation of compomatrices, compomatrices point, compomatrices parametric, compomatrices coordinate.

В. М. ВЕРЕЩАГА, А. М. ПАВЛЕНКО

Мелитопольский государственный педагогический университет им. Б. Хмельницкого

Мелитопольская школа прикладной геометрии им. В. Найдыша

ТРЁХРАЗМЕРНЫЕ КОМПОЗИЦИОННЫЕ МАТРИЦЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ СОЗДАНИЯ КОМПОЗИЦИОННЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ОБЪЕМНЫХ ОБЪЕКТОВ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

В исследовании предложено геометрический способ создания моделей динамики в пространстве дискретно представленных отдельных состояний процесса, на базе использования методов композиционной геометрии.

Вводится определение базисных состояний, трёхразмерных композиционных матриц, предлагаются правила обозначения индексации элементов трирозмирних композиционных матриц (компоматриц).

Указывается на то, что трёхразмерную композиционную матрицу невозможно представить в виде одной таблицы, поэтому предложено представлять её в виде совокупности таблиц по направлениям параметризации геометрической фигуры, для которой составляется эта трёхразмерная компоматрица.

Приведены примеры общего и развернутого представления таких таблиц.

Напоминается, что в композиционном геометрическом моделировании (КГМ) каждую исходную геометрическую фигуру (ГФ), перед решением задачи, необходимо унифицировать, то есть привести к виду, пригодному для ее использования в композиционном геометрическом моделировании.

Геометрическая составляющая унифицированной ГФ подается в виде точечных компоматриц при параметрических направлениях.

Параметрическая составляющая унифицированной ГФ подается в виде параметрических компоматриц.

Отмечается, что все расчетные операции осуществляются через использование координатных (расчетных) трёхразмерных компоматриц, которые составляются по схеме соответствующих точечных компоматриц.

Указывается на то, что изначально сформированная трёхразмерная параметрическая компоматрица почти всегда является негармонизированной, то есть сумма всех ее элементов не равна единице.

Предоставляется алгоритм гармонизациии параметрической трёхразмерной компоматрицы.

Предоставляется последовательность операций в компоматричной форме по получению трёхразмерной компоматрици для объемной геометрической фигуры произвольной формы.

Ключевые слова: трёхразмерная компоматрица, композиционная модель, гармонизированный точечный полином, геометрический способ интерполяции, базисное состояние, виды компоматриц, обозначения компоматриц, точечные компоматрицы, параметрические компоматрицы, координатные компоматрицы.

Постановка проблеми

Нагадується, що у композиційному геометричному моделюванні (КГМ) кожну вихідну геометричну фігуру (ГФ), перед розв'язанням задачі, необхідно уніфікувати, тобто привести до вигляду, придатного для її використання у КГМ. Уніфікація кожної ГФ відбувається шляхом розділення її на дві складові: геометричну та параметричну.

Надається послідовність операцій у компоматричній формі щодо здобуття трирозмірної компоматриці для об'ємної геометричної фігури довільної форми.

Вказується, що сума елементів створеної трирозмірної компоматриці ГФ являє собою гармонізований точковий поліном, який континуально інтерполює сегмент об'ємної геометричної фігури. При цьому, за допомогою рівняння цього гармонізованого трипараметричного точкового поліному, що інтерполює сегмент об'ємної ГФ, можна знайти будь-яку поточну точку не тільки на його поверхні, а й в середині цього сегменту.

Наголошується на тому, що можливість континуального визначення, за допомогою рівняння точкового поліному, поточних точок всередині геометричного тіла, є надзвичайно важливою і актуальною для створення програмних продуктів для 3D-принтерів, що розширить їх можливості і зробить роботу більш ефективною.

Акцентується увага на тому, що у цьому дослідженні побудовано композиційну модель сегменту геометричного тіла, що складається із трьох точок у кожному із параметричних напрямків. Також вказується на те, що запропонований алгоритм буде правдивим для створення моделей сегментів об'ємних геометричних фігур, які утримують більшу кількість точок у кожному із трьох напрямків, що вказують розміри цього сегменту.

Метод дослідження. У цій роботі дослідження проводиться методами композиційної геометрії – (13)? потужними інструментами формування точкових поліномів, які задовольняють початкові умови й композиційні матриці.

КГ має своєю основою точкове числення Балюби-Найдиша (точкове БН-числення). (1)?

Однопараметричний точковий негармонізований поліном – це параметрична крива, що визначається сумою добутків цілих раціональних функцій та базисними точками, при цьому раціональні функції (характеристичні функції) подаються у вигляді добутків різниць між значеннями параметрів для базисних точок та поточним параметром $0 \le t \le 1$, які складаються для кожної з базисних точок окремо та мають однаковий степінь (*n-1*) для усіх його (точкового полінома) доданків. Цей поліном має вигляд:

$M = \sum_{j=1}^{n} A_j P_j(t),$ де A_j $(j = \overline{1, n})$ – базисні точки вихідної геометричної композиції; $P_j(t)$ – характеристичні функції (раціональні функції) у *j*-му вузлі, які обчислюються із наступного виразу:

$$P_j(t) = \frac{1}{\lambda_j} \prod_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{n} (t_i - t), \quad j = \overline{1, n}; \quad 0 \le t \le 1, \quad \text{де} \quad \lambda_j = \prod_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{n} (t_i - t_j); \quad \frac{1}{\lambda_j} - \text{коефіцієнт}$$

перетворення на одиницю характеристичної функції? $P_j(t)$ коли *i=j*.

Двопараметричний точковий поліном – це параметрична крива, що складається із суми добутків базисних точок – A_{ij} та двопараметричних цілих раціональних функцій - $F_{ij}(u,v)$ для $i = \overline{1, l};\ j = \overline{1, m}.$ Цей поліном має вигляд:

$\underset{l \times m}{M} = \sum_{i=j=1}^{l,m} A_{ij} F_{ij}(u,v);$ для $0 \le u,v \le 1$, де *u, v* – напрями параметризації досліджуваної геометричної фігури.

Трипараметричний точковий поліном – параметрична крива, що складається із суми добутків базисних точок – A_{ijk} та трипараметричних цілих раціональних функцій $F_{ijk}(u,v,w)$ для $i = \overline{1, l};\ j = \overline{1, m}; k = \overline{1, n}$ та має вигляд:

$\underset{l\times m\times n}{M} = \sum_{i=j=k=1}^{l,m,n} A_{ijk} F_{ijk}(u,v,w)$; для $0 \le u,v,w \le 1$, де u, v, w – напрями параметризації досліджуваної геометричної фігури.

Геометрична композиція має своїми елементами непусту скінчену дискретну множину точок, частина з яких може утворювати певну підмножину і, при цьому, для кожного з елементів цієї геометричної композиції встановлено їх власні розміри та розміри, що визначають взаємне розташування усіх її елементів. Зміна або заміна будь-якої точки, або декількох точок, геометричної композиції ніяким чином не впливає на положення чи властивості решти її точок.

Композиційна матриця (компоматриця) – це таблиця елементів, серед яких записи дійсних елементів у ній, за кількістю і за формою їх розташування у цій таблиці, знаходяться у повній відповідності з розташуванням відповідних точок на вихідній геометричній фігурі (ГФ). Елементами компоматриці можуть бути функції, вирази, константи, компоматриці тощо. Кожен елемент компоматриці, за необхідності, може бути змінений або замінений незалежно від решти інших її елементів.

У точковій компоматриці елементами є точки вихідної ГФ, які можуть бути *l*-значними, тобто мати *l* координат простору параметрів.

У параметричній компоматриці елементами є параметри – характеристичні функції, що віддзеркалюють взаємне розташування точок вихідної ГФ і забезпечують геометричний спосіб інтерполяції.

Гармонізація параметричної компоматриці – зміна значень її параметрів-елементів шляхом ділення кожного з елементів цієї параметричної компоматриці на суму усіх її елементів.

Компоматриці вважаються однаково орієнтованими, якщо вони складені для одного параметричного напрямку.

У дослідженні композиційне моделювання динамічних процесів здійснюється у просторі станів.

Стан – зафіксовані (зняті), у певну мить, значення параметрів (факторів), що характеризують перебіг будь-якого процесу.

Базисні стани – це такі стани серед решти, які найбільш характерні для процесу, і які обираються у якості вузлів інтерполяції.

Для моделювання застосовується метод рухомого симплексу.

Рухомий симплекс – це миттєво визначені, в результаті перетину ліній з площиною, точки у кількості на одиницю більше, ніж координатний простір, у якому розглядається геометричний об’єкт. На базі визначених в результаті перетину вершин симплексу відбувається побудова поточних точок геометричного об’єкту, що моделюється.

Кінцевим результатом у дослідженні є композиційна модель сегменту динамічного процесу.

Сегмент процесу – частина динамічного процесу, що досліджується, на певному відтинку часу.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Посилаючись на [9] погоджуємось, що моделі динаміки є значно складнішими за моделі статики. Це спричинено тим, що моделі статики описують перетворення вхідної величини на вихідну, а моделі динаміки описують перетворення вхідної функції часу на вихідну функцію часу.

Однак, застосування диференціальних рівнянь для створення моделей у просторі станів є достатньо громіздким процесом [9], який потребує спеціальної математичної підготовки та певного досвіду їх застосування. Ця вимога лишається навіть із застосуванням методів спрощення диференціальних рівнянь шляхом їх перетворення на звичайні алгебраїчні рівняння за допомогою створення оператора диференціювання. Таке спрощення можливо застосовувати лише для моделей лінійних стаціонарних систем з нульовими початковими умовами. Окрім сказаного, алгебраїчні методи позбавлені очевидної візуалізації.

Особливістю композиційного геометричного моделювання (КГМ) є те, що будь-яка вихідна геометрична фігура (ГФ) перед зануренням у КГМ має бути поділена на геометричну і параметричну складові. За рахунок того, що розв'язок отримується також у вигляді двох складових, у композиційному моделюванні є можливість локального управління формою шуканої ГФ. Однак, у роботах [4, 1, 7, 5, 6], розглядається побудова композиційних геометричних моделей лише для одно- та двопараметричних ГФ з використанням одно- та дворозмірних композиційних точкових, параметричних та координатних матриць. Розроблені у вказаних джерелах методи композиційного геометричного моделювання придатні тільки для побудови моделей лінії та поверхонь, які можна застосовувати лише для створення статичних моделей.

Виходячи з проведеного аналізу, актуальною є проблема геометричних способів побудови моделей динаміки, які були б математично формалізовані методами композиційної геометрії.

Мета дослідження

Розробити правила формування трирозмірних композиційних точкових, параметричних, координатних матриць та компоматриці геометричної фігури в цілому. Розробити правила умовних позначень усіх згаданих композиційних матриць. З використанням трирозмірних компоматриць створити методику формування гармонізованих трипараметричних точкових поліномів.

Викладення основного матеріалу дослідження

На теперішній час базою та інструментарієм для створення моделей динаміки у просторі станів є диференціальні рівняння [9], для складання яких треба враховувати багато вихідних вимог, які не завжди легко алгоритмізувати. У той же час, застосування диференціальних рівнянь для створення моделей у просторі станів є достатньо громіздким процесом [9]. Використання диференціальних рівнянь для моделювання потребує спеціальної математичної підготовки та певного досвіду їх застосування.

Розглянемо найпростіший випадок, коли процес описано лише трьома базисними станами, у кожному з яких визначено по дев’ять базисних точок (рис. 1). У наших дослідженнях терміном «стан» будемо визначати –зафіксовані (зняті) у певну мить значення параметрів (факторів), що характеризують перебіг будь-якого процесу.

Перша цифра в індексі вказує на зміну номерів базисних точок у додатному напрямку параметру U.

Друга цифра – на зміну, у бік збільшення, номерів базисних точок у додатному напрямку параметру V.

Третя цифра – на збільшення номерів базисних точок у додатному напрямку параметру W.

У випадку, коли будь-який з номерів складається з двох або більше цифр, то пропонуємо, для виокремлення цього числа, його підкреслювати. Наприклад, $\underline{42}$ 36; 2$\underline{12}$4; $\underline{21}$ $\underline{32}$ $\underline{43}$.

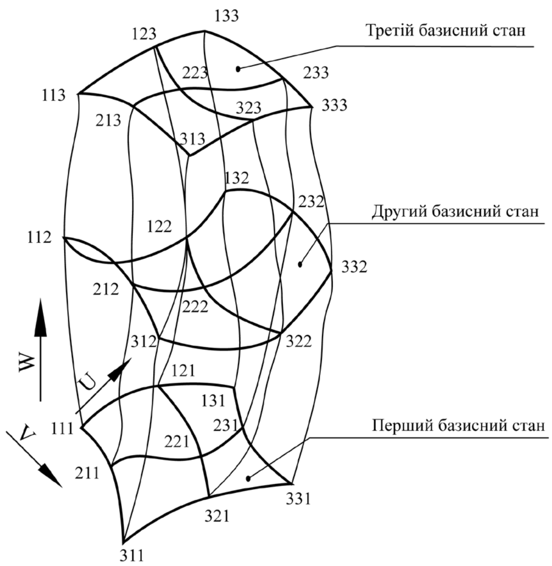

Рис. 1. Вихідна геометрична фігура для моделі динаміки у просторі станів

Для створення геометричної фігури (ГФ) (рис.1), розглядається геометрична композиція, серед точок якої обираються ті, що визначають перший, другий та третій базисні стани. Вербальна складова уніфікованої ГФ визначає, що утворені базисні стани є, у певну мить, перерізами процесу, який моделюється, і що з їх використанням необхідно створити континуальну модель тіла цього процесу, яка визначається трьома параметрами U, V, W. Для того, щоб було зрозуміло за напрямком якого з параметрів складено компоматрицю, вгорі над дужкою будемо записувати позначення цього параметру:

$$\underset{l\times m\times n}{\overset{u}{[[\,A_T\,]]}};\quad \underset{l\times m\times n}{\overset{u}{[[\,A_n\,]]}};\quad \underset{l\times m\times n}{\overset{v}{[[\,A_T\,]]}};\quad \underset{l\times m\times n}{\overset{v}{[[\,A_n\,]]}};\quad \underset{l\times m\times n}{\overset{w}{[[\,A_T\,]]}};\quad \underset{l\times m\times n}{\overset{w}{[[\,A_n\,]]}}. \qquad (1)$$

Розкриємо трирозмірні точкові компоматриці (1) для прикладу об'ємного процесу довільної форми, що наведено на рис. 1.

Не торкаючись техніки утворення характеристичних функцій, покажемо алгоритм формування параметричної компоматриці, в цілому, для ГФ (рис.1).

Для першого базисного стану композиційна матриця параметрів у напрямку U матиме вигляд:

$$[[p_{ij1}]] = \left[\begin{bmatrix} p_{111} & p_{121} & p_{131} \\ p_{211} & p_{221} & p_{231} \\ p_{311} & p_{321} & p_{331} \end{bmatrix}\right];\ i:j=\overline{1{,}3}, \qquad (2)$$

а у напрямку V:

$$[[q_{ij1}]] = \left[\begin{bmatrix} q_{111} & q_{121} & q_{131} \\ q_{211} & q_{221} & q_{231} \\ q_{311} & q_{321} & q_{331} \end{bmatrix}\right];\ i:j=\overline{1{,}3}. \qquad (3)$$

Керуючись методом рухомого симплексу [2] знайдемо їх добуток – компоматрицю $[[a_{ij1}]]$:

$$[[\bar{a}_{ij1}]]=[[p_{ij1}]]\bullet[[q_{ij1}]]=\left[\left[\begin{matrix} p_{111}\cdot q_{111} & p_{121}\cdot q_{211} & p_{131}\cdot q_{311} \\ p_{211}\cdot q_{121} & p_{221}\cdot q_{221} & p_{231}\cdot q_{321} \\ p_{311}\cdot q_{131} & p_{321}\cdot q_{231} & p_{331}\cdot q_{331} \end{matrix}\right]\right]= \\ =\left[\left[\begin{matrix} \bar{a}_{111} & \bar{a}_{121} & \bar{a}_{131} \\ \bar{a}_{211} & \bar{a}_{221} & \bar{a}_{231} \\ \bar{a}_{311} & \bar{a}_{321} & \bar{a}_{331} \end{matrix}\right]\right];i:j=\overline{1,3} \tag{4}$$

Для другого базисного стану параметрична компоматриця у напрямку параметра U матиме вигляд:

$$[[p_{ij2}]]=\left[\left[\begin{matrix} p_{112} & p_{122} & p_{132} \\ p_{212} & p_{222} & p_{232} \\ p_{312} & p_{322} & p_{332} \end{matrix}\right]\right];\ i:j=\overline{1,3}, \tag{5}$$

а у напрямку V:

$$[[q_{ij2}]]=\left[\left[\begin{matrix} q_{111} & q_{121} & q_{131} \\ q_{211} & q_{221} & q_{231} \\ q_{311} & q_{321} & q_{331} \end{matrix}\right]\right];\ i:j=\overline{1,3}. \tag{6}$$

Знайдемо добуток компоматриць (5) та (6) – компоматрицю $[[\bar{a}_{ij2}]]$:

$$[[\bar{a}_{ij2}]]=[[P_{ij2}]]\bullet[[q_{ij2}]]=\left[\left[\begin{matrix} P_{112}\cdot q_{112} & P_{122}\cdot q_{212} & P_{132}\cdot q_{312} \\ P_{212}\cdot q_{122} & P_{222}\cdot q_{222} & P_{232}\cdot q_{322} \\ P_{312}\cdot q_{132} & P_{322}\cdot q_{232} & P_{332}\cdot q_{332} \end{matrix}\right]\right]= \\ =\left[\left[\begin{matrix} \bar{a}_{112} & \bar{a}_{122} & \bar{a}_{132} \\ \bar{a}_{212} & \bar{a}_{222} & \bar{a}_{232} \\ \bar{a}_{312} & \bar{a}_{322} & \bar{a}_{332} \end{matrix}\right]\right];i:j=\overline{1,3} \tag{7}$$

Результат, аналогічний результатам (4) і (7), запишемо для третього базисного стану:

$$[[\bar{a}_{ij3}]]=[[P_{ij3}]]\bullet[[q_{ij3}]]=\left[\left[\begin{matrix} P_{113}\cdot q_{113} & P_{123}\cdot q_{213} & P_{133}\cdot q_{313} \\ P_{213}\cdot q_{123} & P_{223}\cdot q_{223} & P_{233}\cdot q_{323} \\ P_{313}\cdot q_{133} & P_{323}\cdot q_{233} & P_{333}\cdot q_{333} \end{matrix}\right]\right]= \\ =\left[\left[\begin{matrix} \bar{a}_{113} & \bar{a}_{123} & \bar{a}_{133} \\ \bar{a}_{213} & \bar{a}_{223} & \bar{a}_{233} \\ \bar{a}_{313} & \bar{a}_{323} & \bar{a}_{333} \end{matrix}\right]\right];\ i:j=\overline{1,3} \tag{8}$$

Кожна з параметричних компоматриць (4), (7), (8) є дворозмірною. За участю цих компоматриць утворюються двопараметричні точкові поліноми, що інтерполюють, відповідно, перший, другий та третій базисні стани. Наявність складових (4), (7), (8) для точкових поліномів (інтерполянтів), дискретно подає трипараметричний процес, геометричну схему якого зображено на рис. 1.

Наявність трирозмірної параметричної компоматриці надасть можливість скласти трипараметричний точковий поліном, який континуально буде описувати сегмент процесу, який зображено на рис. 1. Це означає, що будь-яка точка цього сегменту не тільки на поверхні, а й всередині процесу буде визначатися за допомогою рівнянь цього точкового поліному.

Знаходження параметричної компоматриці (19) разом із відповідною точковою компоматрицею, які однаково орієнтовані з (13), дозволяє знайти компоматрицю сегменту простової трипараметричної ГФ, тобто $[[M_\phi]]$, як добуток двох компоматриць:

$$[[M_\phi]] = [[A_T]] \cdot [[A_П]] = [[A_{ijk} \cdot a_{ijk}]]; \begin{cases} i,j,k = \overline{1,3}; \\ ijk(A) = ijk(a) \end{cases}, \qquad (14)$$

де запис $ijk(A)$ – потрійний індекс біля літери «*A*», запис $ijk(a)$ – потрійний індекс біля літери «*a*».

Однак, запропонований метод буде справедливим для різної кількості точок у цих параметричних напрямках, і буде обмежуватись можливостями комп’ютерної техніки та виникненням розрахункових похибок, які, природньо, будуть збільшуватись зі збільшенням кількості базисних точок.

Висновки

У дослідженні запропоновано геометричний спосіб створення композиційним методом сегментів динамічних моделей у просторі станів. Введені означення базисних станів, трирозмірних композиційних матриць, які запропоновано надавати у вигляді сукупності таблиць за параметричними напрямками. На базі трирозмірних композиційних матриць надано послідовність утворення композиційної матриці геометричної фігури, яка є основою для побудови трипараметричного точкового поліному, що являє собою континуальну композиційну геометричну модель об’ємного об’єкту довільної форми.

Така можливість є надзвичайно важливою для використання на 3D принтерах, що дозволить друкувати вироби з необхідними порожнинами всередині, а також для моделювання траєкторії руху маніпуляторів.

Список використаної літератури

1. Адоньєв Є. О. Композиційний метод геометричного моделювання багатофакторних систем: дис. ... д-ра техн. наук: 05.01.01. КНУБА, Київ, 2018. 512 с.
2. Балюба И. Г. Конструктивная геометрия многообразий в точечном исчислении: дис. … доктора тех. наук: 05.01.01. МИСИ, Макеевка, 1995. 227 с.
3. Балюба И. Г., Найдыш В. М.: Точечное исчисление [учебное пособие] / под ред. Верещаги В. М. Мелитополь: МГПУ им. Б.Хмельницкого, 2015. 234 с.
4. Верещага В. М. Композиційне геометричне моделювання: Моногафія. Мелітополь: ФОП Однорог Т. В., 2017. 108с.
5. Верещага В. М., Найдиш А. В., Адоньєв Є. О. Метод композиційного геометричного моделювання: монографія. Мелітополь: ФОП Однорог Т. В., 2019. 310 с.
6. Верещага В. М., Павленко О. М., Найдиш А. В. Моделювання горизонтального земельного майданчика у точковому численні: монографія. Мелітополь: МДПУ імені Богдана Хмельницького, 2019. 187 с.

7. Верещага В. М., Найдиш А. В., Адоньєв Є. О., Лисенко К. Ю. Основи композиційного геометричного моделювання: навчальний посібник. Мелітополь: ФОП Однорог Т. В., 2019. 255 с.
8. Давиденко І. П. Конструювання поверхонь просторових форм методом рухомого симплексу: автореф. дис... канд. техн. наук: 05.01.01. Мелітополь, 2012. 23 с.
9. Дубовой В. М., Квєтний Р. Н., Михальов О. І., Усов А. В. Моделювання та оптимізація систем: підручник. Вінниця: ПП «ТД «Едельвейс», 2017. 804 с.

References

1. Adoniev, E. O. (2018). Kompozytsiinyi metod heometrychnoho modeliuvannia bahatofaktornykh system: dys. … doktora tekh. nauk: 05.01.01. KNUBA, Kyiv.
2. Baliuba, Y. H. (1995). Konstruktyvnaia heometryia mnohoobrazyi v tochechnom yschyslenyy: dys. … doktora tekh. nauk: 05.01.01. MISI, Makeyevka.
3. Baliuba, Y. H., & Naidysh, V. M. (2015). Tochechnoe yschyslenye [uchebnoe posobye]; pod red. Vereshchahy V. M. Melitopol': MGPU im. B.Khmel'nitskogo.
4. Vereshchaha, V. M. (2017). Kompozytsiine heometrychne modeliuvannia: Monohafiia. Melitopolʹ: FOP Odnoroh T. V.
5. Vereshchaha, V. M., Naidysh, A. V., & Adoniev, E. O. (2019). Metod kompozytsiinoho heometrychnoho modeliuvannia: monohrafiia. Melitopolʹ: FOP Odnoroh T. V.
6. Vereshchaha, V. M., Pavlenko, O. M., & Naidysh, A. V. (2019). Modeliuvannia horyzontalnoho zemelnoho maidanchyka u tochkovomu chyslenni: monohrafiia. Melitopolʹ: MDPU imeni Bohdana Khmelʹnytsʹkoho.
7. Vereshchaha, V. M., Naidysh, A. V., Adoniev, E. O., & Lysenko, K. U. (2019). Osnovy kompozytsiinoho heometrychnoho modeliuvannia.: navchalnyi posibnyk. Melitopolʹ: FOP Odnoroh T. V.
8. Davydenko, I. P. (2012). Konstruiuvannia poverkhon prostorovykh form metodom rukhomoho sympleksu: avtoref. dys... kand. tekhn. nauk: 05.01.01. Melitopol'.
9. Dubovoi, V. M., Kvietnyi, R. N., Mykhalov, O. I., & Usov, A. V. (2017). Modeliuvannia ta optymizatsiia system: pidruchnyk. Vinnytsya: PP «TD «Edelʹveys».

Верещага Віктор Михайлович - доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри математики та фізики, Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького, вул. Гетьманська, 20, м. Мелітополь, Україна, 72300,
e-mail: mail337@i.ua, ORCID: 0000-0003-0038-8300.

Павленко Олександр Михайлович – кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри управління та адміністрування, Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького, вул. Гетьманська, 20, м. Мелітополь, Україна, 72300. e-mail: opavlenko@mdpu.org.ua, ORCID: 0000-0002-8646-2622.