

УДК 539.3

Є.С. КОНОНЕНКО

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України

КОЛИВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ПІД ДІСЮ ПЕРІОДИЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ З УРАХУВАННЯМ ЕФЕКТІВ ГІДРОПРУЖНОСТІ

Значна частина сучасного енергетичного обладнання працює в умовах взаємодії з оточуючим середовищем. Високі швидкості рідини спричиняють появу суттєвого тиску на поверхні конструктивних елементів. В свою чергу, коливання елементів машин та споруд в потоці рідини веде до зміни параметрів руху рідини. Тобто виникає зв'язана задача визначення міцнісних та динамічних характеристик таких систем. З одного боку коливання пружного тіла змінюють параметри течії, а з іншого саме наявність течії призводить до суттєвого впливу на динамічні характеристики конструкції. З точки зору механіки, такі задачі можна класифікувати як задачі взаємодії різних суцільних середовищ. Для опису руху суцільні середовища використовують загальні рівняння руху, рівняння стану, закони збереження. Різні суцільні середовища відрізняються різним зв'язком між компонентами тензорів напружень та тензорів деформацій або швидкостей деформації. За допомогою методу зважених нев'язок в роботі отримані основні співвідношення для визначення узагальнених переміщень. При цьому загальне формулювання передбачає можливість визначення частот та форм власних коливань конструкції без врахування приєднаних мас рідини, з їх урахуванням, а також досліджувати вимушені коливання елементів конструкцій з урахуванням та без урахування взаємодії з рідиною. Для в'язкої стисливої рідини отримано формулювання задачі в акустичному наближенні. Числова реалізація здійснена в припущенні безвихрового руху ідеальної та нестисливої рідини. Для розв'язання задачі з визначення тиску рідини отримано рівняння Лапласа з умовами не протікання в якості крайових. Задачу визначення гідродинамічного тиску із застосуванням методів теорії потенціалу зведено до розв'язання гіперсингулярного інтегрального рівняння. Форми власних коливань конструктивного елемента без врахування приєднаних мас рідини обрані як базисні для розв'язання задачі визначення динамічних характеристик з урахуванням рідини. Як приклад розглянуті власні частоти та форми коливань круглої пластинки як без урахування впливу рідини, та з її урахуванням. Досліджені також гармонічні коливання цієї пластинки.

Ключові слова: вимушені коливання, метод зважених нев'язок, методи скінченних та граничних елементів.

Y. KONONENKO

A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the Ukrainian Academy of Sciences

VIBRATIONS OF STRUCTURE ELEMENTS UNDER PERIODIC LOADS WITH FLUID-STRUCTURE INTERACTION EFFECTS

Much of modern power equipment operates in interaction with the environment. High fluid velocities cause significant pressure on the surface of structural elements. In turn, the oscillation of the elements of machines and structures in the fluid flow leads to a change in the parameters of fluid motion. That is, there is a related problem of determining the strength and dynamic characteristics of such systems. On the one hand, the oscillations of the elastic body change the parameters of the flow, and on the other hand, the presence of the flow leads to a significant impact on the dynamic characteristics of the structure. From the point of view of mechanics, such problems can be classified as problems of interaction of various continuous environments. To describe the motion of continuous media, use general equations of motion, equations of state, conservation laws. Different continuous media differ in the different relationship between the components of stress tensors and strain or strain rate tensors. Using the method of weighted residuals, the basic relations for determining the generalized displacements are obtained. The general formulation provides for the possibility of determining the frequencies and forms of natural oscillations of the structure without taking into account the attached masses of the liquid, taking them into account, as well as to investigate the forced oscillations of structural elements taking into account and without taking into account interacting with the liquid. For a viscous compressible fluid, the formulation of the problem in the acoustic approximation is obtained. Numerical realization is carried out under the assumption of vortex-free motion of an ideal and incompressible fluid. To solve the problem of determining the pressure of a liquid, we obtain the Laplace equation with non-flow conditions as boundary conditions. The problem of determining the hydrodynamic pressure using the methods of potential theory is reduced to solving a hypersingular integral equation. The forms of natural oscillations of the structural element without taking into account the attached masses of the liquid are chosen as the basic ones for solving the problem of determining the dynamic characteristics taking into account the liquid. As an

example, the natural frequencies and forms of oscillations of a round plate are considered both without taking into account the influence of the liquid, and with its taking into account. The harmonic oscillations of this plate are also investigated.

Keywords: forced vibrations, weighted residual method, boundary and finite element methods.

Е.С. КОНОНЕНКО

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины

КОЛЕБАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НАГРУЗОК С УЧЕТОМ ЭФФЕКТОВ ГИДРОУПРУГОСТИ

Значительная часть современного энергетического оборудования работает в условиях взаимодействия с окружающей средой. Высокие скорости жидкости вызывают появление существенного давления на поверхности конструктивных элементов. В свою очередь, колебания элементов машин и сооружений в потоке жидкости ведет к изменению параметров движения жидкости. То есть возникает связанная задача определения прочностных и динамических характеристик таких систем. С одной стороны колебания упругого тела изменяют параметры течения, а с другой именно наличие течения приводит к существенному влиянию на динамические характеристики конструкции. С точки зрения механики, такие задачи можно классифицировать как задачи взаимодействия различных сплошных сред. Для описания движения сплошных сред используют общие уравнения движения, уравнение состояния, законы сохранения. Различные сплошные среды отличаются разной связью между компонентами тензоров напряжений и тензоров деформаций или скоростей деформаций. С помощью метода взвешенных невязок в работе получены основные соотношения для определения обобщенных перемещений. При этом общая формулировка предполагает возможность определения частот и форм собственных колебаний конструкции без учета присоединенных масс жидкости, с их учетом, а также исследовать вынужденные колебания элементов конструкций с учетом и без учета взаимодействия с жидкостью. Для вязкой сжимаемой жидкости получена формулировка задачи в акустическом приближении. Числовая реализация осуществлена в предположении безвихревого движения идеальной и несжимаемой жидкости. Для решения задачи по определению давления жидкости получено уравнение Лапласа с условиями не протекания в качестве краевых. Задачу определения гидродинамического давления с применением методов теории потенциала сведено к решению гиперсингулярного интегрального уравнения. Формы собственных колебаний конструктивного элемента без учета присоединенных масс жидкости выбраны как базисные для решения задачи определения динамических характеристик с учетом жидкости. В качестве примера рассмотрены собственные частоты и формы колебаний круглой пластинки как без учета влияния жидкости и с ее учетом. Исследованы также гармонические колебания этой пластинки.

Ключевые слова: вынужденные колебания, метод взвешенных невязок, методы конечных и граничных элементов

Формулювання проблеми та її актуальність

Під час роботи гідротурбінного обладнання виникають інтенсивні коливання, пов'язані із впливом нестационарного потоку рідини. Ці коливання можуть привести до непередбаченого зростання тиску на поверхні конструктивних елементів, що в свою чергу може викликати вихід обладнання з ладу, втрату стійкості. Тому вивчення вільних та вимушених коливань елементів конструкцій при взаємодії з водним середовищем є актуальною задачею. Важливим моментом є саме врахування тиску з боку рідини, тобто такі задачі доцільно розв'язувати та формулювати в зв'язаному формулюванні, як задачі взаємодії двох суцільних середовищ.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Проблеми гідропружної взаємодії залишаються в центрі уваги багатьох дослідників протягом останніх десятиріч. Це пов'язано з надзвичайно широким колом прикладних задач, що стосується міцності та коливань різних конструктивних елементів, коли необхідно враховувати поверхневі сили з боку рідини або газу. При врахуванні ефектів гідропружності відбувається значний вплив на частоти власних коливань. Тобто, якщо ці явища не враховувати, то неможливо провести коректне відстроювання від небажаних резонансних частот [1]. До таких конструкцій відносяться кришки гідротурбін [2], баки

ракет-носіїв [4], резервуари для збереження рідини [6], парові турбіни [7], а також такі елементи конструкцій, як лопаті зворотно-лопатевих та радіально-вісьових гідротурбін, лопаті повітряних установок [8], крила літаків [9]. Питання підтоплення міських територій із застосуванням методів врахування взаємодії різних суцільних середовищ розглянуто в [10]. Зауважимо, що більшість вказаних задач неможливо розв'язати аналітичними методами. Натурні експерименти в цих випадках є коштовними і не завжди безпечними процедурами. Тому на перший фланг виходять методи комп'ютерного моделювання. Серед них відзначимо методи граничних та скінченних елементів, методи скінченних різниць та об'ємів, а також методи оптимального проектування [12-15]. При побудові скінченно-елементних та гранично-елементних формулювань задач динаміки конструктивних елементів зазвичай використовують метод зважених нев'язок [13]. При використанні цього метода здійснюється інтегрування частинами, що дає змогу не лише понизити порядок похідних в диференціальному рівнянні, а й отримати вираз для поверхневого інтегралу, який враховує тиск рідини. Цей підхід буде використано надалі при побудові математичної моделі гідропружної взаємодії.

Мета дослідження

Метою дослідження є побудова математичної моделі та створення методики розрахунку вільних коливань та вимушених коливань елементів конструкцій при взаємодії з рідиною.

Викладення основного матеріалу дослідження

Для опису руху як пружної конструкції, так і рідини використовуються основні співвідношення механіки суцільного середовища. Нехай пружне тіло займає область Ω з межею Γ . Припустимо, що на тіло діють задані об'ємні та поверхневі сили. Крім того, це тіло цілком занурено в рідину (Рис.1).

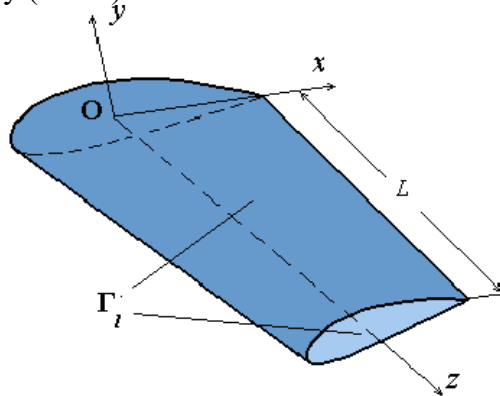


Рис. 1. Схема конструкції

Всі моделі суцільного середовища [14] передбачають визначення полів напружень σ_{ij} , деформацій ε_{ij} , переміщень u_i , а також температури T , тиску p та густини ρ в залежності від часу. Для знаходження цих величин маємо рівняння руху пружного тіла в переміщеннях

$$\mu \Delta u_j^e + (\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta^e}{\partial x_j} + X_j = \rho \frac{\partial^2 u_j^e}{\partial t^2}, \quad j=1,2,3. \quad (1)$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$, $\vartheta^e = \text{div} \mathbf{u}^e = \frac{\partial u_1^e}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^e}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3^e}{\partial x_3}$, $\mu = E[2(1+\nu)]^{-1}$ – модуль зсуву,

$\lambda = E\nu[(1+\nu)(1-2\nu)]^{-1}$ – коефіцієнт Ламе, E , ν – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона, відповідно.

Вважаємо, що на частині межі Γ_1 задані переміщення тіла, а на частині Γ_2 – зусилля; $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Зусилля виражаються за формулою

$$\mathbf{p}^e(\mathbf{x}, t) = \mathbf{T}^n(\partial_x, \mathbf{n}(\mathbf{x}, t))\mathbf{u}^e(\mathbf{x}, t) = 2\mu \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial \mathbf{n}} + \lambda \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{u}^e + \mu (\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{u}^e). \quad (2)$$

Тобто, граничні умови мають вигляд

$$\mathbf{u}^e(\mathbf{x}, t)|_{\Gamma_1} = \mathbf{U}(t), \quad \mathbf{p}^e(\mathbf{x}, t)|_{\Gamma_2} = \mathbf{P}(t). \quad (3)$$

Задаються також початкові умови

$$\mathbf{U}^e(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}^e(\mathbf{x}, 0)}{\partial t} = 0. \quad (4)$$

Для розв'язання задачі (1) – (4) застосовуємо метод зважених нев'язок. Невідомі подаємо у вигляді рядів за базисом з фінітних функцій $\{\psi_n\}_{n=1}^{N_1}$; як пробні використовуємо функції з цього ж базису. Після інтегрування отриманого співвідношення по об'єму та зведення частки об'ємних інтегралів до поверхневих отримуємо скінченно-елементне формулювання зазначеної задачі у вигляді

$$[\mathbf{M}_S] \ddot{\mathbf{u}}^e + [\mathbf{K}_S] \mathbf{u}^e = \{\mathbf{f}_S\} + \{\mathbf{f}_{pr}\}, \quad (5)$$

де $[\mathbf{M}_S], [\mathbf{K}_S]$ – матриці мас та жорсткості, відповідно, $\{\mathbf{f}_S\}$ – вектор заданих зовнішніх зусиль, що діють на пружне тіло, $\{\mathbf{f}_{pr}\}$ – вектор зусиль, що характеризують тиск рідини або газу на змочені поверхні пружного тіла, який буде визначено далі.

Для визначення вектору $\{\mathbf{f}_{pr}\}$ перейдемо до формулювання початково-крайової задачі з механіки рідини. Зробимо припущення відносно рідкого середовища. Вважаємо, що рідина є стисливою та нев'язкою, а її рух безвихровий. Припускаємо, що збурення тиску рідини внаслідок руху пружного тіла є малими, тобто розв'язуємо зв'язану задачу в лінійному формулюванні. Використовуємо загальні закони механіки рідини, а саме, закон збереження маси (рівняння нерозривності)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{V}_f) + Q, \quad (6)$$

де \mathbf{V}_f – вектор швидкості, ρ – густина рідини, Q – джерело, t – час.

Використовуємо рівняння руху у напруженнях (наслідок закону збереження імпульсу) з врахуванням об'ємних сил \mathbf{b}

$$\rho \frac{d\mathbf{V}_f}{dt} = \rho \mathbf{b} + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_f).$$

Для визначення компонент тензору напружень приймаємо гіпотезу

$$\boldsymbol{\sigma}_f = -p\mathbf{I} + \mathbf{T}; \quad \mathbf{T} = 2\mu \left(\dot{\mathbf{S}} - \frac{1}{3}(\operatorname{div} \mathbf{V}_f) \right), \quad (7)$$

де $\dot{\mathbf{S}}$ – девіатор швидкостей деформації.

З використанням рівняння стану, з (6) та (9) маємо наближені рівності

$$\operatorname{div} \mathbf{V}_f = -\frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{Q}{\rho_0}, \quad \frac{\partial \mathbf{V}_f}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{4\mu}{3\rho_0} \left(-\frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{Q}{\rho_0} \right).$$

Надалі вважаємо що рідина нестислива та нев'язка, а джерела відсутні. Тоді маємо $Q = 0, \mu = 0, \rho_0 = \text{const}, c \rightarrow \infty$. При цьому

$$\operatorname{div} \mathbf{V}_f = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial \mathbf{V}_f}{\partial t} = -\nabla p \quad (8)$$

Обчисливши дивергенцію від другого співвідношення (8), отримаємо, що тиск p є гармонічною функцією, тобто задовольняє рівнянню Лапласа, а саме

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \quad (9)$$

Саме перепад тиску входить в праву частину рівнянь (5).

Припустимо, що має місце таке розкладення для невідомих переміщень

$$\mathbf{u}^e(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^N c_k(t) \mathbf{u}_k(x, y, z), \quad (10)$$

де $c_k(t)$ – невідомі коефіцієнти, які залежать лише від часу; $\mathbf{u}_k(x, y, z)$ – відомі базисні функції. Функції часу $c_k(t)$ зазвичай розглядають як узагальнені координати. З огляду на (10), рівнянню (5) надаємо таку форму:

$$\sum_{k=1}^N \{ \ddot{c}_k(t) [\mathbf{M} \mathbf{u}_k] + c_k(t) [\mathbf{K} \mathbf{u}_k] \} = \{ \mathbf{f}_S \} + \{ \mathbf{f}_{pr} \}. \quad (11)$$

Надалі використовуємо метод зважених нев'язок [13], що в даному випадку еквівалентно виконанню скалярного добутку рівнянь (11) послідовно на функції $\mathbf{u}_l(x, y, z)$. Отримуємо

$$[\mathbf{M}][\ddot{\mathbf{c}}] + [\mathbf{K}][\mathbf{c}] = \{ \tilde{\mathbf{f}}_S \} + \{ \tilde{\mathbf{f}}_{pr} \}, \quad [\mathbf{M}] = \{ \mathbf{M} \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_l \}, \quad [\mathbf{K}] = \{ \mathbf{K} \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_l \}.$$

Якщо $\{ \tilde{\mathbf{f}}_S \} = \{ \tilde{\mathbf{f}}_{pr} \} = 0$, то маємо задачу на визначення частот та форм власних коливань елемента конструкції без врахування приєднаних мас рідини, якщо лише $\{ \tilde{\mathbf{f}}_S \} = 0$, то приходимо до задачі на визначення частот та форм вільних коливань елемента конструкції з врахуванням приєднаних мас рідини.

Таким чином, треба знайти праву частину в співвідношенні

$$[\mathbf{M}][\ddot{\mathbf{c}}] + [\mathbf{K}][\mathbf{c}] = \{ \tilde{\mathbf{f}}_{pr} \}. \quad (12)$$

Як було зазначено вище, тиск задовольняє рівнянню Лапласа (9). Для однозначного розв'язку цього рівняння треба сформулювати граничні умови. Вважаємо, що елемент конструкції досить тонкий, тому згідно з [17], вважаємо, що граничні умови можна задавати на серединній поверхні елемента, що розглядається. Сформулюємо граничну умову непротікання, яка полягає у рівності нормальних складових швидкостей рідини та конструктивного елемента, тобто $(\dot{\mathbf{u}}^e, \mathbf{n}) = (\mathbf{V}_f, \mathbf{n})$.

З другого з рівнянь (8) знаходимо:

$$\frac{\partial p^\pm}{\partial \mathbf{n}} = -\rho_l (\ddot{\mathbf{u}}^e, \mathbf{n}) = -\rho_l \sum_{k=1}^N \ddot{c}_k(t) (\mathbf{u}_k, \mathbf{n}). \quad (13)$$

Нормальна похідна від тиску має бути неперервною, але ж на поверхні елемента тиск має перепад, при чому функція, що описує тиск, є гармонічною.

Крім того, вказана гармонічна функція має задовольняти умові Зоммерфельда на нескінченності, а саме $\nabla p|_\infty = 0$.

Як відомо, такі властивості має потенціал подвійного шару [17]

$$p(\mathbf{P}_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma(\mathbf{P}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|} dS, \quad \mathbf{P} \in S, \quad (14)$$

де S – область, зайнята елементом конструкції; \mathbf{n} – одинична нормаль до поверхні S ; \mathbf{P} і \mathbf{P}_0 – точки тривимірного простору з координатами (x, y, z) та (x_0, y_0, z_0) , відповідно; $|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|$ – декартова відстань між \mathbf{P} і \mathbf{P}_0 ; $\Gamma(\mathbf{P})$ – густина потенціалу, задана на поверхні S .

Функція, що визначена формулою (14), задовольняє рівнянню Лапласа (9), має неперервну нормальну похідну, а при перетині поверхні S вздовж нормалі має скінченний розрив, а саме, $p^+(\mathbf{P}_0) - p^-(\mathbf{P}_0) = \Gamma(\mathbf{P}_0)$, $\mathbf{P}_0 \in S$. Тому використовуємо подання (14) для визначення тиску. Зауважимо, що для цього треба знайти невідому густину $\Gamma(\mathbf{P})$ на поверхні елемента тому треба задовольнити граничну умову (13). Це призводить до інтегрального рівняння у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_0} \frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma(\mathbf{P}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|} = -\rho_l(\mathbf{u}^e, \mathbf{n}), \quad \mathbf{P}, \mathbf{P}_0 \in S. \quad (15)$$

З рівняння (15) бачимо, що функція $\Gamma(\mathbf{P})$ може бути подана у вигляді такого ряду

$$\Gamma(\mathbf{P}) = \sum_{k=1}^N \ddot{c}_k(t) \Gamma_k(\mathbf{P}), \quad (16)$$

де функції $\Gamma_k(\mathbf{P})$ задовольняють таким гіперсингулярним рівнянням

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_0} \frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma_k(\mathbf{P}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|} = -\rho_l(\mathbf{u}_k, \mathbf{n}), \quad \mathbf{P}, \mathbf{P}_0 \in S$$

Якщо ввести позначення для оператора, що дає розв'язки означених гіперсингулярних рівнянь у вигляді $\Gamma_k(\mathbf{P}) = -\rho_l \mathbf{H}_k(\mathbf{u}_k)$, то знайдемо вираз для матриці приєднаних мас

$$\{\tilde{\mathbf{f}}_{pr}\} = -\rho_l [\mathbf{H}][\ddot{\mathbf{c}}], \quad [\mathbf{H}] = \{\mathbf{H}\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_l\}. \quad (17)$$

Таким чином, отримані рівняння для визначення частот та форм власних коливань елемента конструкції при двобічному контакті з рідиною – диференціальні рівняння (12), в яких $\{\tilde{\mathbf{f}}_{pr}\}$ обчислюється за формулою (17). Зауважимо, що для обчислення тиску рідини використовується пряме формулювання методу граничних елементів та методи числового розв'язання, розроблені в [18].

Якщо вектор $\{\tilde{\mathbf{f}}_s\}$ в рівнянні (11) не дорівнює нулю, то маємо формулювання задачі для визначення вимушених коливань.

Аналіз числових результатів

Власні частоти та форми коливань круглої пластинки.

Як приклад числової реалізації запропонованого підходу розглянемо задачу визначення частот та форм круглої пластинки, зануреної в рідину. Розглянуто кругову пружну пластинку радіуса R . Нехай $w(x, y, t)$ – прогин пластини, ρ_p – густина матеріалу пластини, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – циліндрична жорсткість. Розглянуті вільні коливання круглої пластинки в двох випадках граничних умов, а саме: жорсткого закріплення та шарнірного обпирання.

Умови жорсткого закріплення мають вигляд

$$w|_{\rho=R} = 0, \quad \left. \frac{dw}{dr} \right|_{\rho=R}. \quad (18)$$

Умови шарнірного обпирання є такими:

$$w|_{\rho=R} = 0, \quad M|_{\rho=R}, \quad (19)$$

де M – момент згину.

Розглянуто кругову пластинку за такими параметрами: модуль пружності $E = 2.06 \cdot 10^8$ кПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$, густина матеріалу $\rho = 7850$ кг/м³, товщина

пластинки $h = 0.01\text{м}$, радіус пластинки $R = 0.5\text{ м}$. Пластинка розглядалась за різними умовами закріплення (4.1) та (4.2).

Частоти та форми коливань пластинки визначені за допомогою методу скінченних елементів. Використовувались скінченні елементи Shell181, використовувався програмний комплекс ANSYS. Обиралась різна кількість скінченних елементів. На рис. 2 зображено скінченно-елементну сітку. В таблиці 1 наведені частоти коливань круглих пластин.

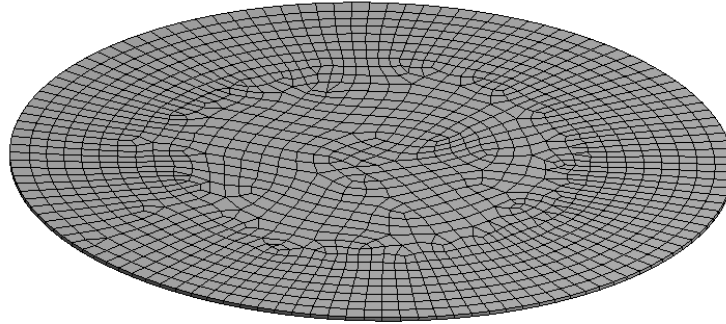


Рис.2. Скінченно-елементна сітка

Таблиця 1.

Частоти коливань круглих пластин за різні умови закріплення, Гц

номер частоти t	жорстке закріплення		шарнірне обпирання	
	аналітичний розв'язок	числовий розв'язок	аналітичний розв'язок	числовий розв'язок
1	100.8186	100.74	48.7043	48.697
2,3	209.8161	209.52	137.1592	137.02
4,5	344.1970	343.37	252.7743	252.19
6	392.4964	391.67	293.3029	293.04

Розрахунки довели, що результати, отримані запропонованим методом, гарно корелюють з аналітичним розв'язком [20].

На рис. 3 показані перші форми коливань жорстко-закріпленої пластинки

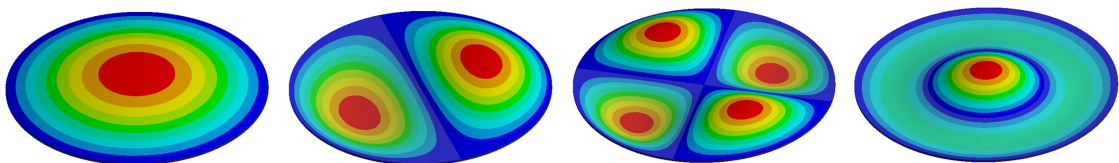


Рис. 3. Форми коливань круглої пластинки

Оскільки попередній аналіз виявив, що найнижчі частоти відповідають формам коливань $w_{01}, w_{02}, w_{11}, w_{21}$ «сухої» пластинки, то форми коливань пластинки з урахуванням приєднаних мас рідини зобразимо у вигляді

$$w(\rho, \theta, t) = c_1(t)w_{01}(\rho) + c_2(t)w_{11}(\rho)\cos\theta + c_3(t)w_{11}(\rho)\sin\theta + c_4(t)w_{21}(\rho)\cos 2\theta + c_5(t)w_{21}(\rho)\sin 2\theta.$$

В таблиці 2 подані значення частот для вказаних форм коливань для «сухої» пластинки Ω_{i1} , та пластинки, зануреної в рідину ω_{i1} , за умови жорсткого закріплення.

Таблиця 2.

Частоти коливань круглої пластинки, Гц

i	0	1	2
Ω_{i1}	100.74	209.52	343.37
ω_{i1}	48.697	137.02	252.19

Зазначимо, що форми коливань пластинки, що занурена в рідину, практично збігаються з формами вільних коливань «сухої» пластинки. Врахування наявності рідкого середовища приводить до суттєвого зменшення частот вільних коливань.

Коливання круглої пластинки під дією гармонічного навантаження

Розглянуто круглу пластинку з навантаженням рівномірно розподіленому тиску 101325 Па на всю поверхню, яке описується функцією $\{f_s\}$ в рівнянні (11).

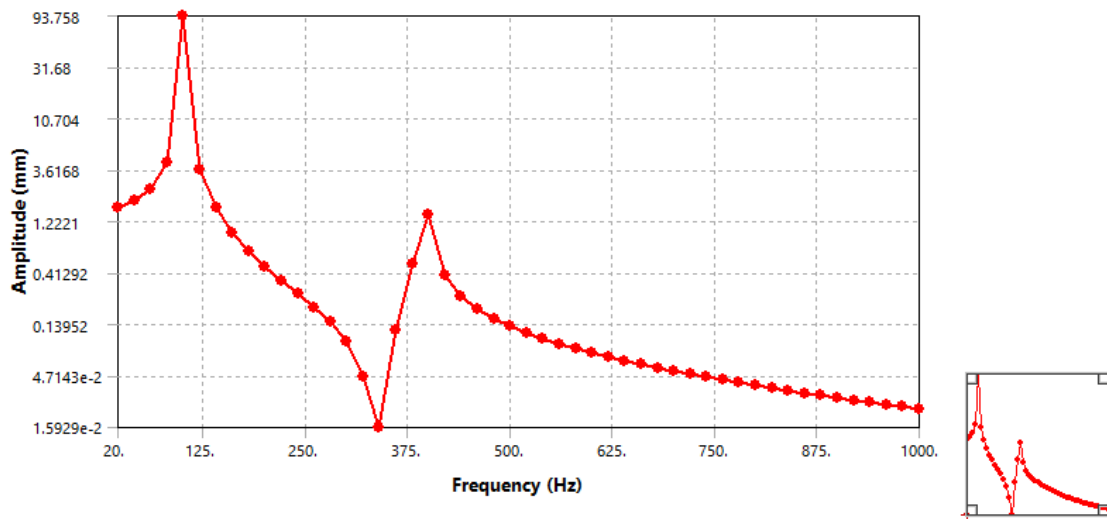


Рис. 4. Частотна характеристика жорстко закріпленої круглої пластинки

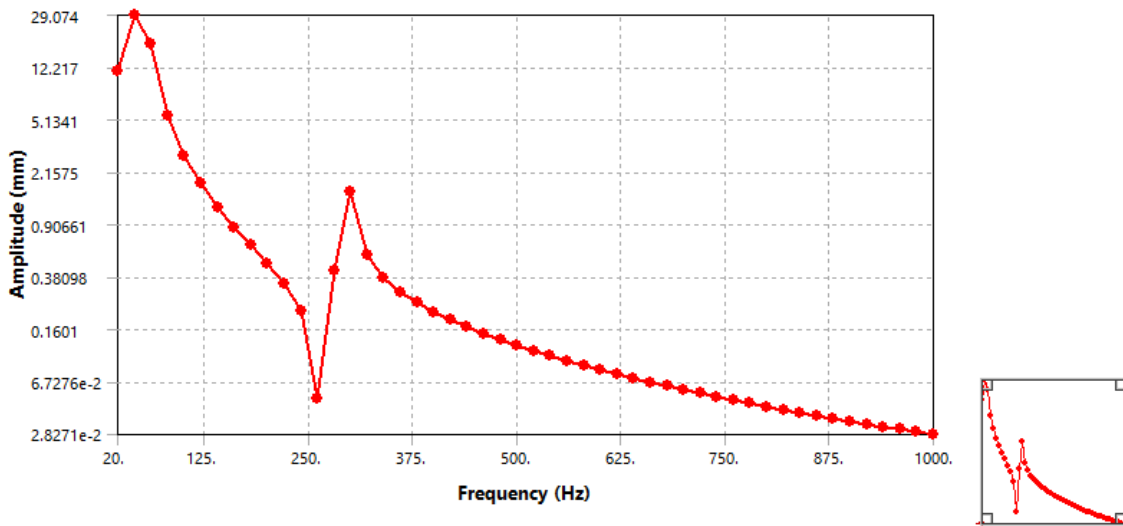


Рис. 5. Частотна характеристика шарнірно обертої круглої пластинки

Отримано залежності, які показані на рис. 4, 5. Ці залежності свідчать про те, що амплітуди коливань суттєво зростають при частотах періодичного навантаження які наближаються до частот власних коливань елементів конструкції.

Висновки

Створено математичну модель та розвинений метод дослідження частот і форм коливань елементів конструкцій при контакті з рідиною. З використанням методів зважених нев'язок та заданих форм, задачі що розглядаються, зведено до систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. При вивченні вільних коливань враховується відповідна залежність невідомих коефіцієнтів від часу, і задачі зводяться до проблем власних значень. Використано поєднання методів скінченних та граничних елементів. Методи скінченних елементів використовуються при пошуку частот і форм вільних коливань елементів конструкцій, що не взаємодіють з рідиною. Це дає змогу використання спеціальних програмних комплексів, що дозволяє дослідити елементи конструкцій складної просторової форми. Для визначення тиску рідини використовуються методи теорії потенціалу, що мають суттєві переваги у порівнянні з іншими методами, оскільки вимірність задачі зменшується на одиницю. Проведено тестування алгоритму та методів на прикладі круглої пластинки, зануреної в рідину, що довело вірогідність та ефективність запропонованого підходу.

Список використаної літератури

1. Ганчин Е. В., Ржевская И. Е., Стрельникова Е. А. Исследование динамических характеристик лопастей рабочих колес поворотного-лопастного гидротурбин при взаимодействии с жидкостью. *Вісник Харківського національного університету*. 2009. № 847. С. 79-86. URL: <http://mia.univer.kharkov.ua/11/30078.pdf>.
2. Medvedovskaya T., Strelnikova E., Medvedyeva K. Free Hydroelastic Vibrations of Hydroturbine Head Covers. *International Journal of Engineering and Advanced Research Technology*. 2015. Vol. 1. № 1. P. 45–50.
3. Місюра С. Ю., Сметанкіна Н. В., Місюра Є. Ю. Раціональне моделювання кришки гідротурбіни для аналізу міцності. *Вісник Національного технічного університету «ХПИ»*. Серія Динаміка і міцність машин. 2019. № 1. С. 34–39. URL: <http://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/44370>
4. Gnitko V., Naumenko V., Rozova L., Strelnikova E. Multi-domain boundary element method for liquid sloshing analysis of tanks with baffles. *Journal of Basic and Applied Research International*. 2016. 17(1). P. 75-87. URL: <https://www.researchgate.net/publication/301655238>.
5. Dodge F. T. The New “Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers”. San Antonio, Texas: Southwest Research Institute, 2000. 195 p.
6. Strelnikova E., Gnitko V., Krutchenko D., Naumenko Y. Free and forced vibrations of liquid storage tanks with baffles. *Journal Modern Technology & Engineering*. 2018. Vol. 3. No. 1. P. 15-52. <http://jomardpublishing.com/UploadFiles/Files/journals/JTME/V3No1/StrelnikovaE.pdf>.
7. Rusanow A. V., Lampart P., Pashchenko N. V., Rusanov R. A. Modelling 3D steam turbine flow using thermodynamic properties of steam IAPWS-95. *Polish Maritime Research*. 2016. Vol. 23. No. 1. P. 61-67. DOI: [10.1515/pomr-2016-0009](https://doi.org/10.1515/pomr-2016-0009).
8. Дегтярев К. Г., Стрельникова Е. А., Шелудько Г. А. Компьютерное моделирование лопастей ветроустановок с оптимальными параметрами. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна*. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2012. № 19. С. 81-86. URL: <http://mia.univer.kharkov.ua/19/30251.pdf>
9. Makeev V. I., Strelnikova E. A., Trofimenko P. E., Bondar A. V. On Choice of Design Parameters for an Aircraft. *Int. Appl. Mech.* 2013. 49(5). P. 588-596. [MR3132100 70P05 \(70M20\)](https://doi.org/10.1007/s11340-013-9700-0)

10. Serikova E., Strelnikova E., Yakovlev V. Mathematical model of dangerous changing the groundwater level in Ukrainian industrial cities. *Journal of Environment Protection and Sustainable Development*. 2015. Vol. 1. P. 86-90. URL: <https://www.researchgate.net/publication/281784323>
11. Serikova E., Strelnikova E., Pisia L., Pozdnyakova E. Flood risk management of Urban Territories. *Eco. Env. & Cons.* 2020. 26(3). P. 1068-1077. URL: <http://91.234.43.156/bitstream/123456789>
12. Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L. C. Boundary element techniques: theory and applications in engineering. Springer-Verlag: Berlin and New York, 1984. URL: <https://studizba.com/files/show/djvu/1932-1-brebbiya-k-telles-zh-vroubel-1--metody.html>
13. Шелудько Г. А., Стрельникова Е. А., Кантор Б. Я. Гибридные методы в задачах оптимального проектирования. Харьков: Новое слово, 2008. 188 с.
14. Кантор Б.Я. Стрельникова Е.А. Гиперсингулярные интегральные уравнения в задачах механики сплошной среды. Харьков : Новое слово, 2005. 252 с.
15. Gnitko V., Degtyariv K., Karaiev A., Strelnikova E., Multi-domain boundary element method for axisymmetric problems in potential theory and linear isotropic elasticity. *WIT Transactions on Engineering Sciences*. 2019. 122. WIT Press. P.13-25. DOI: 10.2495/BE410021.

References

1. Ganchin, E. V., Rzhetskaya, I. E., & Strelnikova, E. A. (2009). Issledovanie dinamicheskikh karakteristik lopastey rabochih koles povorotno-lopastnyih gidroturbin pri vzaimodeystvii s zhidkostyu. *Visnik Harkivskogo natsionalnogo unIversitetu*. **847**, 79-86. URL: <http://mia.univer.kharkov.ua/11/30078.pdf>.
2. Medvedovskaya, T., Strelnikova, E., & Medvedyeva, K. (2015). Free Hydroelastic Vibrations of Hydroturbine Head Covers. *Int. J. Eng. and Advanced Research Technology (IJEAT)*. 1(1), 45-50. DOI 10.13140/RG.2.1.3527.4961. URL: <https://www.researchgate.net/publication/282868308>
3. Misiura, C. Yu., Smetankina, N. V., & Misiura, Ye. Yu. (2019). Ratsionalne modeliuvannia kryshky hidroturbiny dlia analizu mitsnosti. *Visn. Nats. tekhn. un-tu «KhPI». Ser. Dynamika i mitsnist mashyn*. **1**, 34–39. URL: <http://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/44370>
4. Gnitko, V., Naumenko, V., Rozova, L., & Strelnikova, E. (2016). Multi-domain boundary element method for liquid sloshing analysis of tanks with baffles. *Journal of Basic and Applied Research International*. **17**(1), 75-87. URL: <https://www.researchgate.net/publication/301655238>.
5. Dodge F. T. (2000). The New “Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers”. San Antonio, Texas : Southwest Research Institute.
6. Strelnikova, E., Gnitko, V., Krutchenko, D., & Naumemko, Y. (2018). Free and forced vibrations of liquid storage tanks with baffles. *J. Modern Technology & Engineering*. **3**, 1, 15-52. URL: <http://jomardpublishing.com/UploadFiles/Files/journals/JTME/V3No1/StrelnikovaE.pdf>.
7. Rusanow, A. V., Lampart, P., Pashchenko, N. V., & Rusanov, R. A. (2016). Modelling 3D steam turbine flow using thermodynamic properties of steam IAPWS-95. *Polish Maritime Research*. **23**, 1, 61-67. DOI: 10.1515/pomr-2016-0009.
8. Degtyarev, K. G., Strelnikova, E. A., & Sheludko, G. A. (2012). Kompyuternoe modelirovanie lopastey vetroustanovok s optimalnymi parametrami. *Visnik Harkivskogo natsionalnogo unIversitetu ImenI V.N. KarazIna. SerIya: Matematichne modelyuvannya. InformatsIynI tehnologIyi. AvtomatizovanI sistemi upravlinnya*. **19**, 81-86. URL: <http://mia.univer.kharkov.ua/19/30251.pdf>.

9. Makeev, V. I., Strelnikova, E. A., Trofimenko, P. E., & Bondar, A. V. (2013). On Choice of Design Parameters for an Aircraft. *Int. Appl. Mech.* 49(5), 588-596. [MR3132100 70P05 \(70M20\)](#).
10. Serikova, E., Strelnikova, E., & Yakovlev, V. (2015). Mathematical model of dangerous changing the groundwater level in Ukrainian industrial cities. *Journal of Environment Protection and Sustainable Development.* 1, 86-90. URL: <https://www.researchgate.net/publication/281784323>.
11. Serikova, E., Strelnikova, E., Pisia, L., & Pozdnyakova, E. (2020). Flood risk management of Urban Territories. *Eco. Env. & Cons.* 26(3), 1068-1077. URL: <http://91.234.43.156/bitstream/123456789>.
12. Brebbia, C. A., Telles, J. C. F., & Wrobel, L. C. (1984). Boundary element techniques: theory and applications in engineering. Springer-Verlag : Berlin and New York. URL: <https://studizba.com/files/show/djvu/1932-1-brebbiya-k-telles-zh-vroubel-l--metody.html>.
13. Sheludko, G. A., Strelnikova, E.A., & Kantor, B. Ya. (2008). Gibridnyie metodyi v zadachah optimalnogo proektirovaniya. Poiskovyie metodyi. Harkov : Novoe slovo. URL: <http://irbis-nbuv.gov.ua>.
14. Kantor, B. Ya., & Strelnikova, E. A. (2005). Gipersingulyarnyie integralnyie uravneniya v zadachah mehaniki sploshnoy sredi. Harkov: Novoe slovo. URL: <http://mia.univer.kharkov.ua/11/30090.pdf>
15. Gnitko, V., Degtyariov, K., Karaiev, A., & Strelnikova, E. (2019). Multi-domain boundary element method for axisymmetric problems in potential theory and linear isotropic elasticity, *WIT Transactions on Engineering Sciences.* 122. WIT Press, 13-25. DOI: 10.2495/BE410021.

Кононенко Єгор Сергійович – аспірант, Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, м. Харків; тел.: (098) 026-73-80; e-mail: yehorkononenko@gmail.com. ORCID: 0000-0001-6221-3608.