УДК 517.91:532.2

С.Г. БЛАЖЕВСЬКИЙ, О.М. ЛЕНЮК
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
О.М. НІКІТІНА
Чернівецький ліцей №1 математичного та економічного профілів
М.І. ШИНКАРИК
Тернопільський національний економічний університет

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ БЕССЕЛЯ-ЕЙЛЕРА-БЕССЕЛЯ НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ

На сучасному етапі науково-технічного прогресу, особливо у зв'язку з широким використанням композитних матеріалів, існує нагальна потреба у вивченні фізико-технічних характеристик таких матеріалів, що знаходяться в різних умовах експлуатації, що математично призводить до задачі розв'язування сепаратної системи диференціальних рівнянь другого порядку на кусково-однорідному інтервалі з відповідними початковими та крайовими умовами, зокрема, задача динаміки математично призводить до побудови розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу.

Одним із ефективних методів побудови інтегральних зображень аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру задач математичної фізики є метод гібридних інтегральних перетворень.

У цій роботі побудовано розв'язок задачі динаміки на трискладовій полярній осі $r \geq R_0 > 0$ *з двома точками спряження методом гібридного інтегрального перетворення Бесселя-Ейлера-Бесселя.*

Задача динаміки на трискладовій полярній осі математично призводить до побудови обмеженого розв'язку сепаратної системи трьох диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу з відповідними початковими умовами, умовами спряження та крайовими умовами. Застосувавши до цієї крайової задачі гібридне інтегральне перетворення Бесселя-Ейлера-Бесселя, отримаємо задачу Коші. Знайшовши розв'язок задачі Коші, ми застосовуємо до нього обернене гібридне інтегральне перетворення Бесселя-Ейлера-Бесселя.

Пряме інтегральне перетворення Бесселя-Ейлера-Бесселя на полярній осі з двома точками спряження записується у вигляді матриці-рядка. Вихідна система та початкові умови записуються в матричній формі, і ми застосовуємо операторну матрицю-рядок до заданої задачі за правилом множення матриць. В результаті отримуємо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння. Обернене перетворення Бесселя-Ейлера-Бесселя записується у вигляді операторної матриці-стовпця, і ми застосовуємо його до побудованого розв'язку задачі Коші. Після здійснення певних перетворень ми отримуємо єдиний розв'язок вихідної задачі.

Побудовані розв'язки крайових задач мають алгоритмічний характер, що дозволяє використовувати їх як у теоретичних дослідженнях, так і в числових розрахунках.

Ключові слова: гібридний диференціальний оператор; задача динаміки; гібридне інтегральне перетворення.

С.Г. БЛАЖЕВСКИЙ, О.М. ЛЕНЮК
Черновицкий национальный университет имени Юрия Федьковича
О.М. НИКИТИНА
Черновицкий лицей №1 математического и экономического профилей
Н.И. ШИНКАРИК
Тернопольский национальный экономический университет

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ МЕТОДОМ ГИБРИДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТИПА БЕССЕЛЯ-ЭЙЛЕРА-БЕССЕЛЯ НА ПОЛЯРНОЙ ОСИ

На современном этапе научно-технического прогресса, особенно в связи с широким использованием композитных материалов, существует настоятельная потребность в изучении физико-технических характеристик таких материалов, находящихся в различных условиях эксплуатации, что математически приводит к задаче решения сепаратной системы дифференциальных уравнений второго порядка на кусочно-однородном интервале с соответствующими начальными и краевыми условиями, в частности, задача динамики математически приводит к построению решения сепаратной системы дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа.

Одним из эффективных методов построения интегральных изображений аналитических решений алгоритмического характера задач математической физики является метод гибридных интегральных преобразований.

В этой работе построено решение задачи динамики на трехкомпонентной полярной оси $r \geq R_0 > 0$ *с двумя точками сопряжения методом гибридного интегрального преобразования Бесселя-Эйлера-Бесселя.*

Задача динамики на трехкомпонентной полярной оси математически приводит к построению ограниченного решения сепаратной системы трех дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа с соответствующими начальными условиями, условиями сопряжения и краевыми условиями. Применив к этой краевой задаче гибридное интегральное преобразование Бесселя-Эйлера-Бесселя, получим задачу Коши. Найдя решение задачи Коши, мы применяем к нему обратное гибридное интегральное преобразование Бесселя-Эйлера-Бесселя.

Прямое интегральное преобразование Бесселя-Эйлера-Бесселя на полярной оси с двумя точками сопряжения записывается в виде матрицы-строки. Исходная система и начальные условия записываются в матричной форме, и мы применяем операторную матрицу-строку к заданной задаче по правилу умножения матриц. В результате получаем задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. Обратное преобразование Бесселя-Эйлера-Бесселя записывается в виде операторной матрицы-столбца, и мы применяем его к построенному решению задачи Коши. После осуществления определенных преобразований мы получаем единственное решение исходной задачи.

Построенные решения краевых задач имеют алгоритмический характер, что позволяет использовать их как в теоретических исследованиях, так и в числовых расчетах.

Ключевые слова: гибридный дифференциальный оператор; задача динамики; гибридное интегральное преобразование.

S.G. BLAZHEVSKIY, O.M. LENYUK
Chernivtsi National University by Yuriy Fed'kovych
O.M. NIKITINA
Chernivtsi Lyceum №1 of Mathematical and Economic Profiles
M.I. SHYNKARYK
Ternopil National Economic University

MODELING OF DYNAMIC PROCESSES BY THE METHOD OF HYBRID INTEGRAL TRANSFORM OF BESSEL-EULER-BESSEL TYPE ON THE POLAR AXIS

At the present stage of scientific and technological progress, especially in connection with the widespread use of composite materials, there is an urgent need to study the physical and technical characteristics of such materials that are in different operating conditions, which mathematically leads to the problems of solving a separate system of differential equations of the second order on a piecewise homogeneous interval with the corresponding initial and boundary conditions, in particular, the dynamics problem mathematically leads to the construction of a solution of a separate system of partial differential equations of hyperbolic type.

One of the effective methods for constructing of integral representations of analytic solutions of the algorithmic nature of the problems of mathematical physics is the method of hybrid integral transforms.

In this paper we construct a solution of the dynamics problem on the three-component polar axis $r \geq R_0 > 0$ *with two points of conjugation by the method of hybrid integral Bessel-Euler-Bessel transform. The problem of dynamics on the three-component polar axis mathematically leads to the construction of a limited solution of a separate system of three partial differential equations of hyperbolic type with corresponding initial conditions, conjugation conditions and boundary conditions. Applying to this boundary-value problem the hybrid integral Bessel-Euler-Bessel transform, we obtain the Cauchy problem. Finding a solution to the Cauchy problem, we apply to it the inverse hybrid integral Bessel-Euler-Bessel transform.*

A straight integral Bessel-Euler-Bessel transform on the polar axis with two points of conjugation is written in the form of a matrix row. The output system and the initial conditions are written in a matrix form and we apply the operator matrix row to the given problem by the rule of multiplication of matrices. As a result we obtain the Cauchy problem for the ordinary differential equation. The inverse Bessel-Euler-Bessel transform is written in the form of an operator matrix column and we apply it to the constructed solution of the Cauchy problem. After completing certain transformations, we obtain the unique solution of the original problem.

The constructed solutions of boundary value problems have an algorithmic character, which allows us to use them both in theoretical studies and in numerical calculations.

Keywords: hybrid differential operator; problem of dynamic; hybrid integral transform.

Постановка проблеми

На сучасному етапі науково-технічного прогресу, особливо у зв'язку із широким застосуванням композитних матеріалів, виникає гостра потреба у вивченні фізико-технічних характеристик даних матеріалів, які знаходяться в різних умовах експлуатації, що математично приводить до задач інтегрування сепаратної системи диференціальних рівнянь другого порядку на кусково-однорідному інтервалі з відповідними початковими та крайовими умовами [1–3], зокрема задача динаміки математично приводить до побудови розв’язку сепаратної системи рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Одним із ефективних методів побудови інтегральних зображень аналітичних розв’язків алгоримтічного характеру задач математичної фізики є метод гібридних інтегральних перетворень [1–6].

В [6] побудовано гібридне інтегральне перетворення (ГІП), породжене на полярній осі $r \ge R_0 > 0$ з двома точками спряження гібридним диференціальним оператором (ГДО) Бесселя-Ейлера-Бесселя.

Мета дослідження

Побудувати розв’язок задачі динаміки на трискладовій полярній осі $r \ge R_0 > 0$ з двома точками спряження за допомогою гібридного інтегрального перетворення типу Бесселя-Ейлера-Бесселя.

Викладення основного матеріалу дослідження

Задача динаміки на трискладовому сегменті математично приводить до побудови в області

$$D_2^+ = \{(t,r): t > 0, r \in I_2^+\},\ I_2^+ = \{r : r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty); R_0 > 0\}$$

обмеженого розв’язку системи рівнянь гіперболічного типу

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2 B_{\nu_1,\alpha_1}[u_1] = f_1(t,r),\ r \in (R_0, R_1),\\ &\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \gamma_2^2 u_2 - a_2^2 B_{\alpha_3}^*[u_2] = f_2(t,r),\ r \in (R_1, R_2),\\ &\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \gamma_3^2 u_3 - a_3^2 B_{\nu_2,\alpha_2}[u_3] = f_3(t,r),\ r \in (R_2, \infty), \end{aligned} \tag{1}$$

з початковими умовами

$$u_j(t,r)\big|_{t=0} = g_j(r), \quad \frac{\partial u_j}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_j(r), \quad r \in (R_{j-1}, R_j), \quad j = \overline{1,3}, \quad R_3 = \infty, \tag{2}$$

умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k\right) u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k\right) u_{k+1}\right]\Big|_{r=R_k} = 0,\ j,k = 1,2, \tag{3}$$

та крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0\right) u_1 \big|_{r=R_0} = 0, \quad \lim_{r\to\infty} \frac{\partial^k u_3}{\partial r^k} = 0, \quad k = 0,1. \tag{4}$$

Тут беруть участь диференціальний оператор Бесселя $B_{\nu,\alpha}$ та диференціальний оператор Ейлера другого порядку B_{α}^{*} [6].

На коефіцієнти, що беруть участь в постановці задачі, накладаються певні природні умови обмеження [6].

В [6] побудовано пряме $H_{(\nu,\alpha)}$ й обернене $H_{(\nu,\alpha)}^{-1}$ гібридне інтегральне перетворення, породжене на множині I_2^{+} гібридним диференціальним оператором

$$M_{(\nu,\alpha)} = \theta(r-R_0)\theta(R_1-r)a_1^2 B_{\nu_1,\alpha_1} + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)a_2^2 B_{\alpha_3}^{*} + \theta(r-R_2)a_3^2 B_{\nu_2,\alpha_2} \ :$$

$$H_{(\nu,\alpha)}[g(r)] = \int_{R_0}^{\infty} g(r)V_{(\nu,\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr \equiv \tilde{g}(\beta), \tag{5}$$

$$H_{(\nu,\alpha)}^{-1}[\tilde{g}(\beta)] = \int_{0}^{\infty} \tilde{g}(\beta)V_{(\nu,\alpha)}(r,\beta)\Omega_{(\nu,\alpha)}(\beta)d\beta \equiv g(r), \tag{6}$$

та виведена основна тотожність інтегрального перетворення гібридного диференціального оператора $M_{(\nu,\alpha)}$:

$$H_{(\nu,\alpha)}[M_{(\nu,\alpha)}[g(r)]] = -\beta^2\tilde{g}(\beta) - \sum_{i=1}^{3} k_i^2 \tilde{g}_i(\beta) + (-\alpha_{11}^{0})^{-1} V_{(\nu,\alpha);1}(R_0,\beta)a_1^2\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1} g_0 +$$

$$+\sum_{k=1}^{2} d_k [Z_{(\nu,\alpha);12}^{k}(\beta)\omega_{2k} - Z_{(\nu,\alpha);22}^{k}(\beta)\omega_{1k}]. \tag{7}$$

Тут $\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда, спектральна вектор-функція

$$V_{(\nu,\alpha)}(r,\beta) = \sum_{k=1}^{3} \theta(r-R_{k-1})\theta(R_k-r)V_{(\nu,\alpha);k}(r,\beta), \quad R_3 = \infty,$$

вагова функція

$$\sigma(r) = \theta(r-R_0)\theta(R_1-r)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1} + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\sigma_2 r^{2\alpha_3-1} + \theta(r-R_2)\sigma_3 r^{2\alpha_2+1}$$

та спектральна щільність

$$\Omega_{(\nu,\alpha)}(\beta) = \beta b_3^{2\alpha_2}\left(\left[\omega_{(\nu,\alpha);1}(r,\beta)\right]^2 + \left[\omega_{(\nu,\alpha);2}(r,\beta)\right]^2\right)^{-1},$$

а також інші величини та функції, виписані в [6].

Знайдемо інтегральне зображення аналітичного розв'язку задачі (1) – (4) методом гібридного інтегрального перетворення типу Бесселя-Ейлера-Бесселя на трискладовій полярній осі $r \geq R_0 > 0$ з двома точками спряження, запровадженого правилами (5) – (7).

Запишемо систему (1) та початкові умови (2) у матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\gamma_1^2-a_1^2 B_{\nu_1,\alpha_1}\right)u_1(t,r) \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\gamma_2^2-a_2^2 B_{\alpha_3}^*\right)u_2(t,r) \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\gamma_3^2-a_3^2 B_{\nu_2,\alpha_2}\right)u_3(t,r) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t,r) \\ f_2(t,r) \\ f_3(t,r) \end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{pmatrix} u_1(t,r) \\ u_2(t,r) \\ u_3(t,r) \end{pmatrix}\right|_{t=0} = \begin{pmatrix} g_1(r) \\ g_2(r) \\ g_3(r) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial t}\left.\begin{pmatrix} u_1(t,r) \\ u_2(t,r) \\ u_3(t,r) \end{pmatrix}\right|_{t=0} = \begin{pmatrix} \varphi_1(r) \\ \varphi_2(r) \\ \varphi_3(r) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Інтегральний оператор $H_{(\nu,\alpha)}$ згідно правила (5) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$H_{(\nu,\alpha)}[\ldots] = \left[\int_{R_0}^{R_1} \ldots V_{(\nu,\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr \quad \int_{R_1}^{R_2} \ldots V_{(\nu,\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2 r^{2\alpha_3-1}dr \right.$$
$$\left. \int_{R_2}^{\infty} \ldots V_{(\nu,\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3 r^{2\alpha_2+1}dr \right]. \tag{9}$$

Застосуємо операторну матрицю-рядок (9) за правилом множення матриць до задачі (8). Внаслідок основної тотожності (7) отримуємо задачу Коші:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\beta^2\right)\tilde{u}(t,\beta) + \left(k_1^2+\gamma_1^2\right)\int_{R_0}^{R_1} u_1(t,r)V_{(\nu,\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr +$$
$$+\left(k_2^2+\gamma_2^2\right)\int_{R_1}^{R_2} u_2(t,r)V_{(\nu,\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2 r^{2\alpha_3-1}dr +$$
$$+\left(k_3^2+\gamma_3^2\right)\int_{R_2}^{\infty} u_3(t,r)V_{(\nu,\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3 r^{2\alpha_2+1}dr = \tilde{f}(t,\beta),$$
$$\tilde{u}(t,\beta)\big|_{t=0} = \tilde{g}(\beta), \quad \frac{d\tilde{u}}{dt}\Big|_{t=0} = \tilde{\varphi}(\beta).$$

Припустимо, що $\max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\} = \gamma_1^2$. Покладемо всюди $k_1^2=0$, $k_2^2=\gamma_1^2-\gamma_2^2 \ge 0$, $k_3^2=\gamma_1^2-\gamma_3^2 \ge 0$. Одержуємо задачу Коші:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\beta^2+\gamma_1^2\right)\tilde{u}(t,\beta) = \tilde{f}(t,\beta),$$
$$\tilde{u}\big|_{t=0} = \tilde{g}(\beta), \quad \frac{d\tilde{u}}{dt}\Big|_{t=0} = \tilde{\varphi}(\beta). \tag{10}$$

Безпосередньо перевіряється, що розв'язком задачі Коші (10) є функція [8]

$$\tilde{u}(t,\beta)=\frac{\sin\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}\,t}{\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}}\tilde{\varphi}(\beta)+\frac{d}{dt}\frac{\sin\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}\,t}{\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}}\tilde{g}(\beta)+\int_0^t\frac{\sin\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}\,(t-\tau)}{\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}}\tilde{f}(\tau,\beta)d\tau. \tag{11}$$

Інтегральний оператор $H^{-1}_{(\nu,\alpha)}$ згідно правила (6), як обернений до (9), зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$H^{-1}_{(\nu,\alpha)}[\ldots]=\begin{bmatrix}\int_0^\infty \ldots V_{(\nu,\alpha);1}(r,\beta)\Omega_{(\nu,\alpha)}(\beta)d\beta\\ \int_0^\infty \ldots V_{(\nu,\alpha);2}(r,\beta)\Omega_{(\nu,\alpha)}(\beta)d\beta\\ \int_0^\infty \ldots V_{(\nu,\alpha);3}(r,\beta)\Omega_{(\nu,\alpha)}(\beta)d\beta\end{bmatrix}. \tag{12}$$

Застосувавши операторну матрицю-стовпець (12) за правилом множення матриць до матриці-елемента

$$[\tilde{u}(t,\beta)],$$

де функція $\tilde{u}(t,\beta)$ визначена формулою (11), одержуємо єдиний розв'язок гіперболічної задачі (1) – (4):

$$\begin{aligned}u_j(t,r)&=\int_0^t\int_{R_0}^{R_1}\mathrm{H}_{(\nu,\alpha);j1}(t-\tau,r,\rho)[f_1(\tau,\rho)+\varphi_1(\rho)\delta_+(\tau)]\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}d\rho\, d\tau+\\&\int_0^t\int_{R_1}^{R_2}\mathrm{H}_{(\nu,\alpha);j2}(t-\tau,r,\rho)[f_2(\tau,\rho)+\varphi_2(\rho)\delta_+(\tau)]\sigma_2 r^{2\alpha_3-1}d\rho\, d\tau+\\&+\int_0^t\int_{R_2}^{\infty}\mathrm{H}_{(\nu,\alpha);j3}(t-\tau,r,\rho)[f_3(\tau,\rho)+\varphi_3(\rho)\delta_+(\tau)]\sigma_3 r^{2\alpha_2+1}d\rho\, d\tau+\\&+\frac{\partial}{\partial t}\int_{R_0}^{R_1}\mathrm{H}_{(\nu,\alpha);j1}(t,r,\rho)g_1(\rho)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}d\rho+\frac{\partial}{\partial t}\int_{R_1}^{R_2}\mathrm{H}_{(\nu,\alpha);j2}(t,r,\rho)g_2(\rho)\sigma_2\rho^{2\alpha_3-1}d\rho+\\&+\frac{\partial}{\partial t}\int_{R_2}^{\infty}\mathrm{H}_{(\nu,\alpha);j3}(t,r,\rho)g_3(\rho)\sigma_3 r^{2\alpha_2+1}d\rho\ .\end{aligned} \tag{13}$$

У рівностях (13) беруть участь породжені неоднорідністю системи функції впливу:

$$\mathrm{H}_{(\nu,\alpha);jk}(t,r,\rho)=\int_0^\infty \frac{\sin\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}\,t}{\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}} V_{(\nu,\alpha);j}(r,\beta)V_{(\nu,\alpha);k}(\rho,\beta)\Omega_{(\nu,\alpha)}(\beta)d\beta,\ \ j,k=1,2,3. \quad (14)$$

При цьому $\delta_+(t)$ – дельта-функція Дірака, зосереджена в точці $t=0+$. Вона використовується в рівності (13) для скорочення запису і означає, що потрібно брати значення відповідної функції в точці 0.

Зауваження. При $\max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\}=\gamma_m^2$, $k_j^2=\gamma_m^2-\gamma_j^2\ge 0,\ j=1,2,3,\ m=2,3,$ й у формулі (14) вираз $(\beta^2+\gamma_1^2)$ міняється на вираз $(\beta^2+\gamma_m^2)$.

Висновки

Побудований розв'язок (13) гіперболічної задачі (1)–(4) має алгоритмічний характер, що дозволяє використовувати його як в теоретичних дослідженнях, так і в числових розрахунках.

Список використаної літератури

1. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. К.: Наукова думка, 1992. 280 с.
2. Ленюк М. П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях. К.: Ін-т математики НАН України, 1997. 188 с.
3. Конет І. М., Ленюк М. П. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях. Чернівці: Прут, 2004. 276 с.
4. Нікітіна О. М. Гібридні інтегральні перетворення типу (Ейлера-Бесселя). Львів: Ін-т прикладних проблем математики і механіки ім. Я.С. Підстригача, 2008. 86 с. (Препринт. НАН України, Ін-т прикладних проблем математики і механіки ім. Я.С. Підстригача; 01-08).
5. Ленюк М. П., Шинкарик М. І. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. Тернопіль: Економ. Думка, 2004. 368 с.
6. Ленюк О. М. Запровадження гібридного інтегрального перетворення Бесселя-Ейлера-Бесселя на полярній осі $r\ge R_0>0$. *Крайові задачі для диференціальних рівнянь*. 2011. Вип. 20. С. 56–66.
7. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
8. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1959. 468 с.

References

1. Kolyano, Yu. M. (1992). Metodyi teploprovodnosti i termouprugosti neodnorodnogo tela. K.: Naukova dumka.
2. Leniuk, M. P. (1997). Temperaturni polia v ploskykh kuskovo-odnoridnykh ortotropnykh oblastiakh. K.: In-t matematyky NAN Ukrainy.
3. Konet, I. M., & Leniuk, M. P. (2004). Temperaturni polia v kuskovo-odnoridnykh tsylindrychnykh oblastiakh. Chernivtsi: Prut.
4. Nikitina, O. M. (2008). Hibrydni intehralni peretvorennia typu (Eilera-Besselia). Working paper 01-08, Lviv: In-t prykladnykh problem matematyky i mekhaniky im. Ya.S. Pidstryhacha.
5. Leniuk, M. P., & Shynkaryk, M. I. (2004). Hibrydni intehralni peretvorennia (Furie, Besselia, Lezhandra). Chastyna 1. Ternopil: Ekonom. Dumka.

6. Leniuk, O. M. (2011). Zaprovadzhennia hibrydnoho intehralnoho peretvorennia Besselia-Eilera-Besselia na poliarnii osi. *Kraiovi zadachi dlia dyferentsialnykh rivnian*. **20**, 56–66.
7. Tihonov, A. N., & Samarskiy, A. A. (1972). Uravneniya matematicheskoy fiziki. M.: Nauka.
8. Stepanov, V. V. (1959). Kurs differentsialnyih uravneniy. M.: Fizmatgiz.

Блажевський Степан Георгійович – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри диференціальних рівнянь Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, e-mail: blgs@ukr.net, ORCID: 0000-0003-3396-7253.

Ленюк Олег Михайлович – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри диференціальних рівнянь Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, e-mail: O.Lenyuk@chnu.edu.ua, ORCID: 0000-0001-9494-2864.

Нікітіна Ольга Михайлівна – к.ф.-м.н., доцент, вчитель математики Чернівецького ліцею №1 математичного та економічного профілів, e-mail o.nikitina.chv@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0702-0453.

Шинкарик Микола іванович – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри економіко-математичних методів, перший проректор Тернопільського національного економічного університету e-mail: shynkaryk_m@ukr.net, ORCID: 0000-0001-8191-8953.