УДК 514.12

Е.В. СТЕГАНЦЕВ
Запорожский национальный университет

КЛАССИФИКАЦИЯ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО ИХ ПРООБРАЗАМ ПРИ СТЕРЕОГРАФИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ

Из аналитической геометрии известны аффинная и метрическая классификации кривых второго порядка. Тот или иной класс кривых характеризуется определенным набором инвариантов. В данной статье предлагается способ определения класса кривой второго порядка по ее прообразу в стереографической проекции. Само понятие стереографической проекции довольно часто используется в разных областях математики, а также в астрономии и географии. Известно, что образами окружностей при стереографической проекции всегда являются либо окружности, либо прямые линии. Целью данной статьи является получение критериев, которые позволят определить тип кривой второго порядка, если известен ее прообраз на сфере при стереографической проекции.

В статье получены формулы прямого и обратного стереографического отображения. Показано, что прообраз кривой второго порядка на сфере можно задать системой алгебраических уравнений. Одним из уравнений в этой системе является уравнение сферы, а левая часть второго уравнения - это однородный многочлен. Применены свойства стереографической проекции сферы на плоскость для формулирования и доказательства теоремы об особенностях расположения точек прообразов кривых второго порядка. Сформулирован критерий, который позволяет по известному прообразу невырожденной кривой второго порядка на сфере определить тип этой кривой. Аналогичный критерий сформулирован для вырожденных кривых второго порядка. При получении и доказательстве этих критериев существенно использовался тот факт, что коэффициенты в уравнении кривой второго порядка и коэффициенты в уравнении, задающем прообраз этой кривой, одинаковы. Поэтому тип образа можно определить, не переходя к его уравнению, а пользуясь только уравнением прообраза. Для этого нужно использовать инварианты кривых второго порядка. В статье приведены примеры, иллюстрирующие работу критериев.

Ключевые слова: кривая второго порядка; невырожденная кривая второго порядка; вырожденная кривая второго порядка; стереографическая проекция; образ; прообраз; инвариант; однородный многочлен; сфера; окружность; прямая; плоскость; центр проекции; координаты; система уравнений; окрестность точки; эллипс; гипербола; парабола; взаимнооднозначное отображение.

Є.В. СТЄГАНЦЕВ
Запорізький національний університет

КЛАСИФІКАЦІЯ КРИВИХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗА ІХ ПРООБРАЗАМИ ПРИ СТЕРЕОГРАФІЧНІЙ ПРОЕКЦІЇ

Із аналітичної геометрії відомі афінна та метрична класифікації кривих другого порядку. Той чи інший клас кривих характеризується певним набором інваріантів. В даній статті пропонується спосіб визначення класу кривої другого порядку за її прообразом в стереографічній проекції. Саме поняття стереографічної проекції доволі часто використовується в різних областях математики, а також в астрономії і географії. Відомо, що образами кіл при стереографічній проекції завжди є

10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-1.24

або кола, або прямі лінії. Метою даної статті є отримання критеріїв, які дозволять визначити тип кривої другого порядку, якщо відомий її прообраз на сфері при стереографічній проекції.

В статті отримані формули прямого та оберненого стереографічного відображення. Показано, що прообраз кривої другого порядку на сфері можна задати системою алгебраїчних рівнянь. Одним з рівнянь в цій системі є рівняння сфери, а ліва частина другого рівняння - це однорідний многочлен. Застосовано властивості стереографічної проекції сфери на площину для формулювання і доведення теореми про особливості розташування точок прообразів кривих другого порядку. Сформульовано критерій, який дозволяє за відомим прообразом невиродженої кривої другого порядку на сфері визначити тип цієї кривої. Аналогічний критерій сформульовано для вироджених кривих другого порядку. При отриманні і доведенні цих критеріїв істотно використовувався той факт, що коефіцієнти в рівнянні кривої другого порядку і коефіцієнти в рівнянні, що задає прообраз цієї кривої, однакові. Тому тип образу можна визначити, не переходячи до його рівняння, а використовуючи тільки рівняння прообразу. Для цього треба використовувати інваріанти кривих другого порядку. В статті наведені приклади, які ілюструють роботу критеріїв.

Ключові слова: крива другого порядку; невироджена крива другого порядку; вироджена крива другого порядку; стереографічна проекція; образ; прообраз; інваріант; однорідний многочлен; сфера; коло; пряма; площина;, центр проекції; координати; система рівнянь; окіл точки; еліпс; гіпербола; парабола; взаємнооднозначне відображення.

E.V. STEGANTSEV
Zaporozhye national university

THE CLASSIFICATION OF THE CONICS ACCORDING TO THEIR INVERSE IMAGES IN THE STEREOGRAPHIC PROJECTION

An analytical geometry gives the affine and metrical classifications of the conics. Each class of the curves is characterized by the certain group of the invariants. This article deals with the technique which gives an opportunity to determine the class of the conic according to its inverse image in the stereographic projection. The concept of the stereographic projection is frequently used in the different branches of mathematics, and also in astronomy and geography. It is known that the images of the circumferences in the stereographic projection are always either circumferences or the straight lines. The aim of this article is the obtaining of the criteria, which an the opportunity to determine the type of the conic in the case when its inverse image in the stereographic projection is given.

The formulae for the direct and inverse stereographic mapping have been obtained in the article. It has been shown that the inverse image of the conic on the sphere can be specified with the help of the system of the algebraic equations. One of the equations in this system is the equation of the sphere, and the left-hand side of the other equation is the homogeneous polynomial. The properties of the stereographic projection have been used for the formulating and the proof of the theorem on the particularities of the location of the points of the inverse images of the conics. The criterion, which gives an opportunity to determine the type of the non-degenerate conic in the case when its inverse image on the sphere is given, has been obtained. The similar criterion for the degenerate conics has been formulated. The fact that the coefficients in the equation of the conic and the coefficients in the equation of its inverse image are the same has been used essentially in the formulating and in the proof of these criteria. Hence, in order to determine the type of the image it is not necessary to know

10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-1.24

its equation. One can use only the equation of the inverse image. For these purpose, it is necessary to use the invariants of the conics. The examples, which show how the criteria work, have been given in the article.

Keywords: conic; non-degenerate conic; degenerate conic; stereographic projection; image; inverse image; invariant; homogeneous polynomial; sphere; circumference; straight line; plane; center of the projection; coordinates; system of the equations; neighborhood of the point; ellipse; hyperbola; parabola; one-to-one correspondence.

Постановка задачи

Рассмотрим сферу в трехмерном евклидовом пространстве. Зафиксируем одну из ее точек P. Построим плоскость σ, перпендикулярную диаметру, проходящему через точку P. Каждой точке M сферы (кроме точки P) поставим в соответствие точку N плоскости σ, являющуюся пересечением прямой PM с этой плоскостью. Такое центральное проектирование принято называть стереографической проекцией сферы на плоскость.

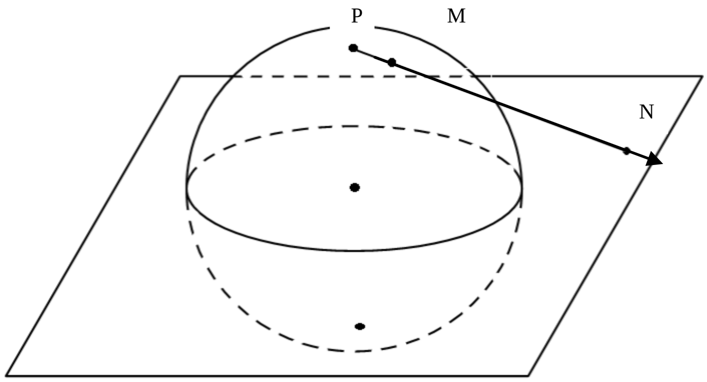

Рис. 1. Стереографическая проекция.

Выберем плоскость σ так, чтобы она проходила через центр сферы (рис. 1). Приведем одно из трех наиболее известных свойств стереографической проекции [4], которое будет использоваться в статье.

Свойство. Проекциями окружностей, которые лежат на сфере, и не проходят через центр проекции, являются окружности на плоскости σ. Если окружности на сфере проходят через центр проекции, то их проекциями являются прямые на плоскости σ.

Выберем декартову систему координат с центром в центре сферы, тогда плоскость σ имеет уравнение $Z = 0$. Любая окружность сферы (прообраз окружности на плоскости $Z = 0$) может быть задана системой уравнений

$$\begin{cases} F(X,Y,Z) = 0, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \end{cases} \qquad (1)$$

где F – линейный многочлен от переменных X, Y, Z, то есть окружность является пересечением некоторой плоскости со сферой. Поскольку других плоских кривых (кроме окружностей) на сфере нет, то понятно, что прообразами кривых второго порядка, отличных от окружности, есть неплоские кривые. Любая сферическая кривая задается системой уравнений (1), где F – некоторая функция от переменных X, Y, Z. Возникает вопрос, какой вид должна иметь функция F для того, чтобы система уравнений (1) задавала сферическую кривую, являющуюся прообразом отличной от окружности кривой второго порядка при стереографической проекции.

Стереографическая проекция является взаимнооднозначным отображением сферы с выколотой точкой на плоскость, проходящую, например, через центр сферы. Координаты X, Y, Z точки на сфере связаны с координатами x, y ее образа на плоскости $Z=0$ формулами

$$x=\frac{X}{1-Z},\ y=\frac{Y}{1-Z},\ Z\neq 1. \tag{2}$$

Анализ последних исследований и публикаций

Определение и основные свойства стереографической проекции рассмотрены в работе [4]. Также в этой работе авторами рассмотрены некоторые ее применения. Несколько другой подход к стереографической проекции дан в книге [2]. В этой же работе описаны свойства сферической метрики, напрямую связанные с рассматриваемым видом проектирования. Определение типа невырожденной кривой второго порядка по ее прообразу при стереографической проекции рассмотрено в работе [8].

Цель исследования

Получить критерии распознавания типа кривой второго порядка на плоскости $Z=0$ по ее прообразу на сфере.

Изложение основного материала исследования

1. Задание прообраза кривой второго порядка.

Для начала определим вид функции F в системе уравнений (1), задающей прообраз отличной от окружности кривой второго порядка при стереографической проекции. Может ли эта функция быть произвольным многочленом? Обратим внимание на следующую особенность этого многочлена. В силу биективности стереографической проекции можно найти формулы, обратные к формулам (2), то есть формулы для нахождения образа точки при стереографической проекции сферы на плоскость. Они имеют вид

$$X=\frac{2x}{x^2+y^2+1},\ Y=\frac{2y}{x^2+y^2+1},\ Z=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}, \tag{3}$$

где X, Y, Z – координаты точки на сфере, а x, y – координаты ее образа на плоскости $Z=0$. Из этих формул ясно, что многочлен $F(X,Y,Z)$ не может быть произвольным многочленом второй степени. Вывод о виде этого многочлена легко получается, если заметить, что последняя из формул (3) дает

$$1-Z=\frac{2}{x^2+y^2+1}.$$

Заметим также, что система уравнений

$$\begin{cases} F(X,Y,Z)=0,\ Z\neq 1,\\ X^2+Y^2+Z^2=1, \end{cases} \tag{4}$$

может иметь несколько равносильных видов, переход от одного из которых к другому осуществляется с помощью известных элементарных преобразований. Например, если система (4) имеет вид $\begin{cases} X^2+8Y^2+2+2Z=0, \\ X^2+Y^2+Z^2=1,\ Z\neq 1, \end{cases}$ то можно перейти к равносильной ей системе $\begin{cases} 2X^2+9Y^2+(1-Z)^2=0, \\ X^2+Y^2+Z^2=1,\ Z\neq 1, \end{cases}$ заменив первое уравнение суммой первого и второго уравнений. Проведенные рассуждения позволяют сформулировать следующий факт.

Теорема 1. Для того, чтобы система уравнений (4) задавала на сфере прообраз при стереографической проекции отличной от окружности кривой второго порядка, необходимо и достаточно, чтобы либо функция F была однородным многочленом второй степени относительно $X, Y, 1-Z$, либо можно было с помощью элементарных преобразований перейти к системе уравнений, равносильной системе (4), для которой указанное свойство выполняется.

2. Особенности расположения точек прообразов невырожденных кривых.

Теорема 2. Если кривая на сфере является прообразом эллипса, то существует такая окрестность точки $P(0,0,1)$ на сфере, что в этой окрестности нет ни одной точки прообраза. Если кривая на сфере является прообразом гиперболы или параболы, то в любой окрестности точки $P(0,0,1)$ на сфере существуют точки прообраза.

Покажем, что в случае эллипса достаточно провести доказательство для эллипса с центром в начале координат и имеющего каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{5}$$

Действительно, пусть эллипс расположен на плоскости $Z=0$ так, что выбранная система координат не является канонической. Тогда, «охватим» этот эллипс другим таким эллипсом, который относительно выбранной системы координат имеет каноническое уравнение. Пример одного такого «охвата» дает рис. 2.

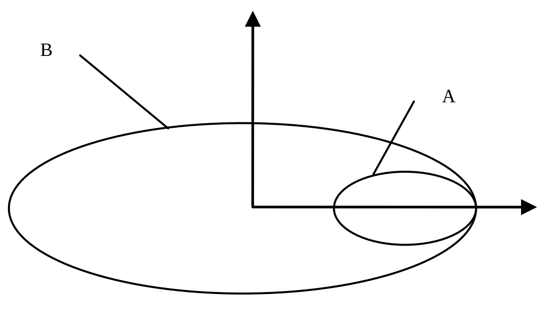

Рис. 2. «Охват» эллипса.

Тот факт, что если теорема справедлива для эллипса, заданного уравнением (5), то она справедлива и для любого «охваченного» им эллипса, следует из простого, достаточно очевидного, свойства стереографической проекции: чем дальше точка на плоскости $Z=0$ удаляется от центра сферы, тем ближе ее прообраз приближается к центру проектирования. Итак, докажем теорему для эллипса, заданного уравнением (5).

Первое уравнение системы (1), задающей прообраз этого эллипса, получаем после подстановки в уравнение (5) формул (2) и умножения на знаменатель $(1-Z)^2$. Вторым уравнением будет уравнение сферы. Итак

10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-1.24

$$\begin{cases} b^2X^2 + a^2Y^2 - a^2b^2(1-Z)^2 = 0,\ Z \neq 1, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 1. \end{cases} \tag{6}$$

Пересечем сферу плоскостью $Z = 1-\varepsilon$. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} b^2X^2 + a^2Y^2 - a^2b^2(1-Z)^2 = 0, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,\ Z \neq 1, \\ Z = 1-\varepsilon,\ \varepsilon > 0. \end{cases} \tag{7}$$

Покажем, что эта система не имеет решений в некоторой окрестности точки $P(0,0,1)$. Действительно, после нахождения Y^2

$$Y^2 = \frac{b^2\varepsilon^2(a^2+1) - 2b^2\varepsilon}{(a^2-b^2)},$$

нужно рассмотреть два случая: $a^2 - b^2 > 0$ и $a^2 - b^2 < 0$. Первый из этих случаев дает $\varepsilon < \frac{2}{a^2+1}$. Таким образом, в ε - окрестности точки $P(0,0,1)$ при $\varepsilon \in \left(0; \frac{2}{a^2+1}\right)$ система (7) не имеет решений, то есть в этой окрестности нет ни одной точки кривой (4). Аналогично, во втором случае такая окрестность тоже найдется, а именно, при $\varepsilon \in \left(0; \frac{a^2}{1+b^2}\right)$ система уравнений (7) не имеет решений.

Пример кривой на сфере дает система уравнений

$$\begin{cases} X^2 + 8Y^2 - 4(1-Z)^2 = 0, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,\ Z \neq 1. \end{cases} \tag{8}$$

При $\varepsilon \in \left(0; \frac{2}{5}\right)$ она не имеет решений. Таким образом, согласно теореме кривая, определяемая системой (8), может быть прообразом эллипса.

Аналогичное доказательство проводится для гиперболы и параболы.

3. Классификация невырожденных кривых второго порядка по их прообразам при стереографической проекции.

Выясним, как по указанному прообразу определить вид невырожденной кривой второго порядка на плоскости $Z = 0$. Найдем образ на плоскости $Z = 0$ сферической кривой, заданной системой уравнений

$$\begin{cases} a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + a_{33}(1-Z)^2 + 2a_{12}XY + 2a_{13}X(1-Z) + 2a_{23}Y(1-Z) = 0, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \\ Z \neq 1. \end{cases} \tag{9}$$

Для этого подставим в первое уравнение системы (9) формулы (3). После элементарных преобразований получим уравнение

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + 1 = 0 \tag{10}$$

кривой второго порядка на плоскости $Z = 0$. Тип этой кривой (эллиптическая, параболическая, гиперболическая) определяется детерминантом $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Если же кроме этого определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ отличен от нуля, то кривая (10) будет невырожденной. Но поскольку коэффициенты в уравнении (10) такие же, как и в первом уравнении системы (9), то тип образа мы можем определить, не переходя к его уравнению, а пользуясь только уравнением прообраза. То есть может быть сформулирована следующая

Теорема 3. Система уравнений (9) задает прообраз эллипса (параболы, гиперболы) тогда и только тогда, когда число $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ отлично от нуля, а число $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ положительно (равно нулю, отрицательно).

4. Классификация вырожденных кривых второго порядка по их прообразам при стереографической проекции.

Теорема 4. Система уравнений (9) задает прообраз вырожденной кривой эллиптического (параболического, гиперболического) типа тогда и только тогда, когда число $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ равно нулю, а число $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ положительно (равно нулю, отрицательно).

Следствие 1. Система уравнений (9) задает прообраз действительной точки, тогда и только тогда, когда число $\Delta = 0$, а число $\delta > 0$.

Следствие 2. Система уравнений (9) задает прообраз вырожденной параболы, тогда и только тогда, когда число $\Delta = 0$, а число $\delta = 0$.

Следствие 3. Система уравнений (9) задает прообраз вырожденной гиперболы (пара действительных пересекающихся прямых), тогда и только тогда, когда число $\Delta = 0$, а число $\delta < 0$.

Дополним следствие 3, добавив к критерию классификации сведения, касающиеся инварианта относительно поворота системы координат:

$$B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Следствие 4. Система уравнений (9) задает прообраз пары действительных параллельных прямых (одной действительной прямой, получающейся при совпадении параллельных прямых, пары мнимых параллельных прямых, которые не содержат ни одной действительной точки), тогда и только тогда, когда число $\Delta = 0$, число $\delta < 0$, а число $B < 0$ ($B = 0$, $B > 0$).

10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-1.24

Приведем примеры. Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} 4X^2 + 3Y^2 + 36(1-Z)^2 + 24X(1-Z) = 0, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 1 \end{cases} \tag{11}$$

Найдем инварианты первого уравнения заданной кривой

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 12 \\ 0 & 3 & 0 \\ 12 & 0 & 36 \end{vmatrix} = 0 .$$

Согласно теореме 4 система (11) задает прообраз вырожденной кривой второго порядка, поэтому это не будет ни эллипс, ни парабола, ни гипербола. Найдем δ, для определения типа вырожденной кривой:

$$\delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 12 > 0 ,$$

Искомое $\delta > 0$, поэтому согласно следствию 1 система уравнений (11) задает прообраз вырожденной кривой эллиптического типа, а именно действительной точки.

Рассмотрим теперь другую систему уравнений:

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 + Z^2 + 4XY + 2X(1-Z) + 4Y(1-Z) = 0, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 1 \end{cases} \tag{12}$$

Найдем инварианты первого уравнения системы

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 < 0 ,\ \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Согласно теореме 4 и следствию, система (12) задает прообраз вырожденной гиперболы (пары мнимых параллельных прямых).

Выводы

В работе получены критерии распознавания типа кривой второго порядка на плоскости $Z = 0$ по ее прообразу при стереографической проекции.

Список использованной литературы:

1. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1986. 760 с.
2. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. М.: Изд - во Моск. ун –та, 1980. 439 с.
3. Энциклопедия элементарной математики. Книга четвертая – геометрия. М.: Физматгиз, 1963. 568 с.

10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-1.24

4. Розенфельд Б. А., Сергеева Н. Д. Стереографическая проекция. М.: Наука, 1973. 48 с.
5. Яглом И. М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. М.: Наука, 1969. 304 с.
6. Кованцов Н. И., Зражевская Г. М, Кочаровский В. Г., Михайловский В. И. Дифференциальная геометрия, топология, тензорный анализ. Сборник задач. К.: Вища школа, 1989. 398 с.
7. Понарин Я. П. Неевклидовы геометрии с аффинной базой. Киров: Кировский государственный педагогический институт, 1991. 121 с.
8. Стеганцев Е. В. Распознавание типа кривой второго порядка по ее прообразу при стереографической проекции. *Вестник Херсонского национального технического университета*. 2013. Вып. 2(47). С. 319–322.

References

1. Dubrovin, B. A., Novikov, S. P., & Fomenko, A. T. (1986). Sovremennaya geometriya. Metodyi i prilozheniya. M.: Nauka.
2. Mischenko, A. S., & Fomenko, A. T. (1980). Kurs differentsialnoy geometrii i topologii. M.: Izd - vo Mosk. un–ta..
3. Entsiklopediya elementarnoy matematiki (1963). Kniga chetvertaya – geometriya. M.: Fizmatgizs.
4. Rozenfeld, B. A., & Sergeeva, N. D. (1973). Stereograficheskaya proektsiya. M.: Nauka.
5. Yaglom, I. M. (1969). Printsip otnositelnosti Galileya i neevklidova geometriya. M.: Nauka.
6. Kovantsov, N. I., Zrazhevskaya, G. M, Kocharovskiy, V. G., & Mihaylovskiy V. I. (1989). Differentsialnaya geometriya, topologiya, tenzornyiy analiz. Sbornik zadach. K.: Vischa shkola.
7. Ponarin, Ya. P. (1991). Neevklidovyi geometrii s affinnoy bazoy. Kirov: Kirovskiy gosudarstvennyiy pedagogicheskiy institut.
8. Stegantsev, E. V. (2013). Raspoznavanie tipa krivoy vtorogo poryadka po ee proobrazu pri stereograficheskoy proektsii. *Vestnik Hersonskogo natsionalnogo tehnicheskogo universiteta*. **2**, 319–322.

Стеганцев Евгений Викторович – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры общей математики Запорожского национального университета, e-mail: znu@znu.edu.ua

10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-1.24