

УДК 514.18

О.В. ВОРОНЦОВ

Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка»

I.В. ВОРОНЦОВА

Полтавський коледж нафти і газу Національного університету
«Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка»

СПОСІБ ОДНОВИМІРНОЇ ДИСКРЕТНОЇ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ЗА КООРДИНАТАМИ ТРЬОХ ТОЧОК ЧИСЛОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ НА ПРИКЛАДІ ПОКАЗНИКОВИХ ФУНКЦІЙ

Дискретне геометричне моделювання має на меті дискретне представлення та визначення геометричних образів (будь-яких інженерних об'єктів, процесів чи явищ).

Розв'язання більшості інженерних задач вимагає побудови і аналізу геометричних моделей, процесів, явищ у дискретному вигляді. Основні вимоги до таких моделей — адекватність, наочність, простота, точність. Створювані моделі із заданою точністю повинні відображати усі характерні риси об'єктів і одночасно бути максимально доступними при дослідженнях. Дискретне геометричне трактування чисельних методів, зокрема методу скінчених різниць, тісно пов'язане з конкретними прикладними задачами, надає чисельним методам наочності і робить їх ефективним інструментом проектування геометричних об'єктів.

Реалізація процесу дискретного геометричного моделювання передбачає, зокрема, розроблення ефективних алгоритмів переходу від дискретно представленого образу до його неперервного аналогу і навпаки тому, що найбільш суттєві теоретичні та прикладні результати створення методик моделювання отримані для неперервних форм вхідних даних, а більшість вхідних даних, цільових умов та вимог вирішуваних прикладних задач, форми представлення, обробки та аналізу даних на ПЕОМ мають дискретний характер. Залучення геометричного апарату суперпозицій дозволяє простими методами виконувати такі переходи.

Застосування геометричного апарату суперпозицій у поєднанні з класичним методом скінчених різниць, дозволяє істотно підвищити ефективність та розширити можливості процесу дискретного моделювання геометричних образів (ГО). Зокрема дослідити можливість використання у якості інтерполянтів не тільки параболічних, а й будь-яких інших функціональних залежностей.

На прикладі показникової функції показано, що одержані формули обчислення величин коефіцієнтів суперпозиції заданих трьох вузлових точок для обраних розрахункових схем, дозволяють розв'язувати задачі суцільної дискретної інтерполяції та екстраполяції числовими послідовностями будь-яких одновимірних функціональних залежностей (визначати ординати шуканих точок дискретних кривих за трьома заданими ординатами вузлових точок) без трудомістких операцій складання та розв'язання великих систем лінійних рівнянь.

Ключові слова: дискретне моделювання, геометричні образи, метод скінчених різниць, геометричний апарат суперпозицій, показникові функції.

О. В. ВОРОНЦОВ

Национальный университет «Полтавская политехника имени Юрия Кондратюка»

И.В. ВОРОНЦОВА

Полтавский колледж нефти и газа Национального университета
«Полтавская политехника имени Юрия Кондратюка»

СПОСОБ ОДНОМЕРНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПО КООРДИНАТАМ ТРЕХ ТОЧЕК ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ НА ПРИМЕРЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Целью дискретного геометрического моделирования является дискретное представление и определение геометрических образов (любых инженерных объектов, процессов или явлений).

Решение большинства инженерных задач требует построения и анализа геометрических моделей, процессов, явлений в дискретном виде. Основные требования к таким моделям - адекватность, наглядность, простота, точность. Создаваемые модели с заданной точностью должны отражать все характерные черты объектов и одновременно быть максимально доступными при исследованиях. Дискретная геометрическая трактовка численных методов, в частности метода конечных разностей, тесно связано с конкретными прикладными задачами, придает численным методам наглядности и делает их эффективным инструментом проектирования геометрических объектов.

Реализация процесса дискретного геометрического моделирования предусматривает, в частности, разработку эффективных алгоритмов перехода от дискретно представленного образа к его непрерывному аналогу и наоборот потому, что наиболее существенные теоретические и прикладные результаты создания методик моделирования получены для непрерывных форм входных данных, а большинство входных данных, целевых условий и требований решаемых прикладных задач, формы представления, обработки и анализа данных на ПЭВМ имеют дискретный характер. Привлечение геометрического аппарата суперпозиций позволяет простыми методами выполнять такие переходы.

Применение геометрического аппарата суперпозиций в сочетании с классическим методом конечных разностей, позволяет существенно повысить эффективность и расширить возможности процесса дискретного моделирования геометрических образов (ГО). В частности исследовать возможность использования в качестве интерполянтов не только параболических, но и любых других функциональных зависимостей.

На примере показательной функции показано, что полученные формулы вычисления величин коэффициентов суперпозиции заданных трех узловых точек для избранных расчетных схем, позволяют решать задачи сплошной дискретной интерполяции и экстраполяции числовыми последовательностями любых одномерных функциональных зависимостей (определять ординаты искомым точек дискретных кривых по трем заданным ординатами узловых точек) без трудоемких операций составления и решения больших систем линейных уравнений.

Ключевые слова: дискретное моделирование, геометрические образы, метод конечных разностей, геометрический аппарат суперпозиций, показательные функции.

O.V. VORONTSOV

National University «Yuri Kondratyuk Poltava Polytechnic»

I.V. VORONTSOVA

Poltava Oil and Gas College of National University «Yuri Kondratyuk Poltava Polytechnic»

METHOD OF ONE-DIMENSIONAL DISCRETE INTERPOLATION, USING COORDINATES OF THREE POINTS OF NUMERIC SEQUENCES, IN THE CASE OF EXPONENTIAL FUNCTIONS

The purpose of discrete geometric modeling is a discrete representation and definition of geometric images (any engineering objects, processes or phenomena).

Solving of most engineering problems requires constructing and analyzing geometric models, processes, phenomena in a discrete form. The main demands for such models are adequacy, clarity, simplicity and accuracy. Created models with a given accuracy should reflect all the characteristic features of objects and at the same time be as accessible as possible during research. A discrete geometric interpretation of numerical methods, in particular the finite difference method, is closely related to specific applied problems, gives more visualization to the numerical methods and makes them an effective tool for designing geometric objects.

An implementation of the discrete geometric modeling process involves, in particular, a development of effective algorithms of transition from a discretely presented image to its continuous analogue and vice versa. It is necessary, because the most significant theoretical and applied results of creating modeling techniques were obtained for continuous forms of input data, but the most of input data, target conditions and requirements of applied tasks, their presentation, processing and analysis of data are discrete. Using the geometric apparatus of superposition allows to perform such transitions in the simplest way.

Using the geometric apparatus of superpositions in combination with the classical method of finite differences can significantly increase efficiency and expand capabilities of the process of geometric images discrete modeling. In particular, it allows investigating a possibility of using not only parabolic, but also any other functional dependencies as interpolants.

By the example of the exponential function, it is shown that the obtained formulas for calculating the superposition coefficients values of given three nodal points for selected computational schemes allow to solve problems of continuous discrete interpolation and extrapolation by numerical sequences of any one-dimensional functional dependences (to determine ordinates of desired points of discrete curves by three given ordinates of nodal points) without laborious operations of compiling and solving huge systems of linear equations.

Keywords: discrete modeling, geometric images, finite difference method, geometric apparatus of superposition, exponential functions.

Постановка проблеми

Для дискретного моделювання геометричних образів можуть бути використані чисельний метод скінчених різниць, статико-геометричний метод, математичний апарат числових послідовностей, що мають свої переваги і недоліки відносно розв'язання конкретних практичних завдань.

Залучення геометричного апарату суперпозицій і математичного апарату числових послідовностей для формування дискретно визначених геометричних образів (ДВГО) значно розширює можливості дискретного геометричного моделювання об'єктів, процесів та явищ. Оскільки далеко не всі числові послідовності є дискретними

аналогами неперервних аналітичних залежностей, що визначають відповідні геометричні образи, тому актуальною вбачається проблема вивчення можливостей використання суперпозицій точкових множин нескінченних числових послідовностей для дискретного моделювання неперервних геометричних образів.

У даній статті пропонується застосування у поєднанні з вище переліченими методами геометричного апарату суперпозицій, що дозволяє істотно підвищити ефективність і розширити можливості процесу дискретного моделювання (ГО), а також дає можливість збагачення їх новими ефективними алгоритмами, вдосконалення їх моделюючих можливостей, розширення кола практичних завдань і оптимізації створюваних для їх реалізації моделей. Зокрема моделювати одновимірні ГО без складання і розв'язання великих систем лінійних рівнянь,

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Питанням застосування для дискретного моделювання ГО геометричного апарату суперпозицій в поєднанні з класичним методом скінченних різниць, статико-геометричним методом, математичним апаратом числових послідовностей присвячені роботи авторів даної статті [1–6].

Мета дослідження

Метою даного дослідження є розроблення способу, що дозволяє розв'язувати задачі суцільної дискретної інтерполяції та екстраполяції числовими послідовностями будь-яких одновимірних функціональних залежностей (визначати ординати шуканих точок дискретних кривих за трьома заданими ординатами вузлових точок) без трудомістких операцій складання та розв'язання великих систем лінійних рівнянь.

Викладення основного матеріалу дослідження

Згідно доведеної властивості [4, с. 728], координати будь-якої точки одновимірної множини точок є суперпозицією (1) координат трьох довільних точок цієї множини:

$$\begin{aligned} x_0 &= k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 \\ y_0 &= k_1y_1 + k_2y_2 + k_3y_3 \end{aligned} \quad (1)$$

де $k_3 = 1 - k_1 - k_2$.

Виведемо загальні формули обчислення величин коефіцієнтів суперпозиції трьох заданих довільних точок: $A_1(i+p_1)$, $A_2(i+p_2)$, $A_3(i+p_3)$ – одновимірних числових послідовностей що представляють нескінченні дискретні форми певних функціональних залежностей, для визначення координат невідомих вузлових точок даних послідовностей. При введенні позначень: $i + p_n = V_n$, $i + p = V$, $T_n = T_n(V_n)$, $T = T(V)$, система рівнянь для визначення коефіцієнтів суперпозиції має вигляд (2):

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^3 k_n = 1; \\ \sum_{n=1}^3 k_n V_n = V; \\ \sum_{n=1}^3 k_n T_n = T. \end{cases} \quad (2)$$

Коефіцієнти суперпозиції обчислюються за формулами (3):

$$k_s = \frac{\Delta_s}{\Delta}, \quad s = \overline{1,3}. \quad (3)$$

Перевіримо вірність рівнянь (2) на прикладі одновимірної числової послідовності:

$$y_i = a^i \quad (4)$$

для вихідних даних:

$$i=0; p_1=-10; p_2=0; p_3=10; p=-10; \dots; 0; \dots; 10;$$

$$V_1=-10; V_2=0; V_3=10;$$

$$V=-10; -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10.$$

$$a=2.$$

Звідси, для послідовності (4) маємо:

$$T_n = a^{V_n}.$$

Результати розв'язання системи рівнянь (2) для послідовності (4) при умові: $T_1=1/1024; T_2=1; T_3=1024$, у вигляді дискретного ряд точок показано на рис. 1.

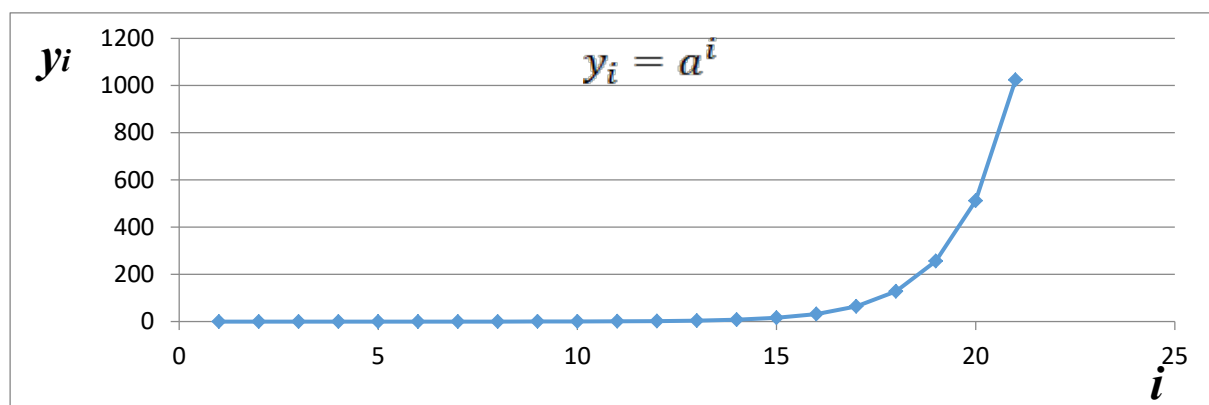


Рис. 1. Дискретний ряд точок послідовності $y_i = a^i$.

Дискретні значення величин коефіцієнтів суперпозиції: k_1, k_2, k_3 – графічно представлено на рис. 2 а), б), в).

На підставі одержаних вище значень величин коефіцієнтів суперпозиції для вихідних умов розрахункової схеми, представленої на рис. 3, обчислимо дискретні значення вузлових точок модельованої кривої за формулою (5), як

$$y_i = k_1 y_{i_1} + k_2 y_{i_2} + k_3 y_{i_3}, \quad (5)$$

суперпозиції двох контурних і центральної вузлових точок за вихідними даними (6):

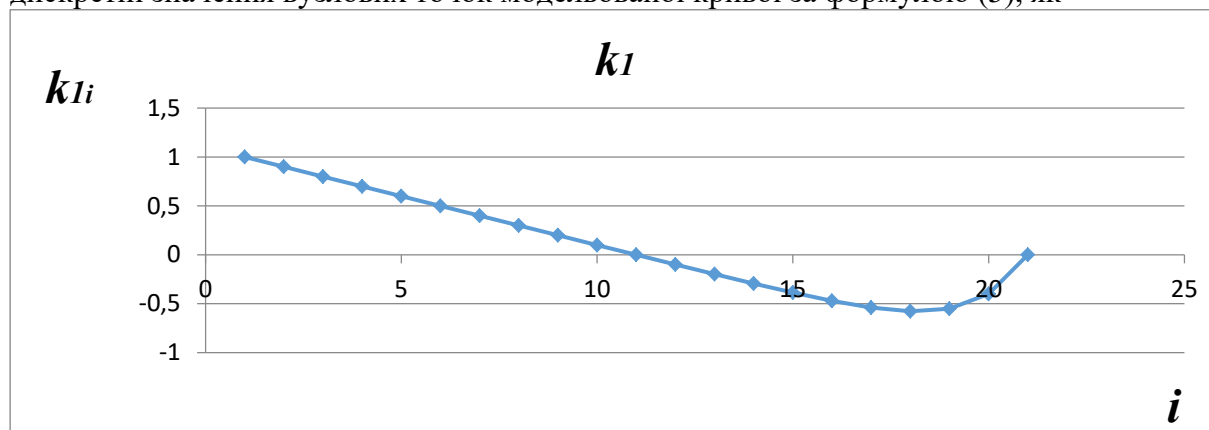
$$i_1 = -10, i_2 = 0, i_3 = 10; y_{i_1} = 1, y_{i_2} = 3, y_{i_3} = 20. \quad (6)$$

Результати обчислень дискретних значень ординат модельованої кривої графічно показано на рис. 4.

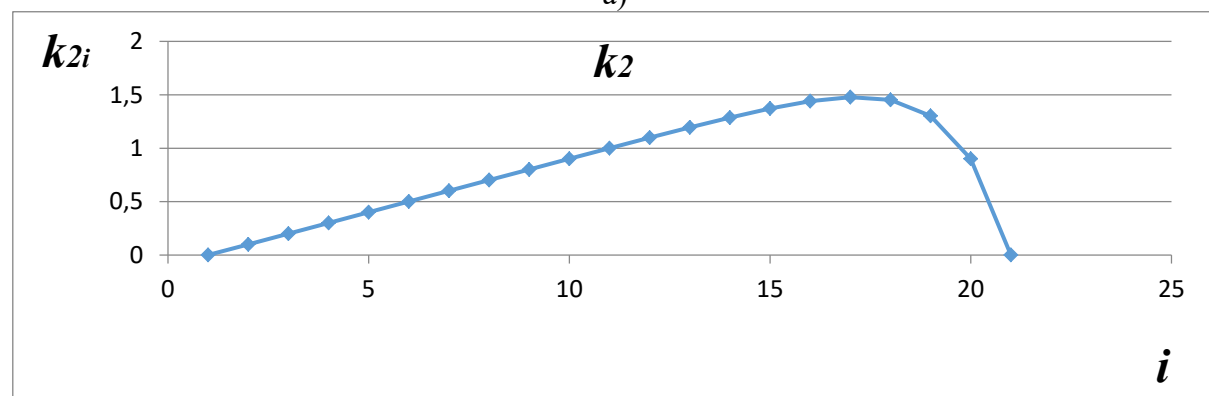
Як видно із наведених вище значень ординат y_i рис. 4, отримані дискретні значення ординат модельованої кривої являють собою числову послідовність, подібної до одновимірної числової послідовності виду (4).

Таким чином, виконано дискретну інтерполяцію суперпозиціями координат трьох точок одновимірної числової послідовності (4).

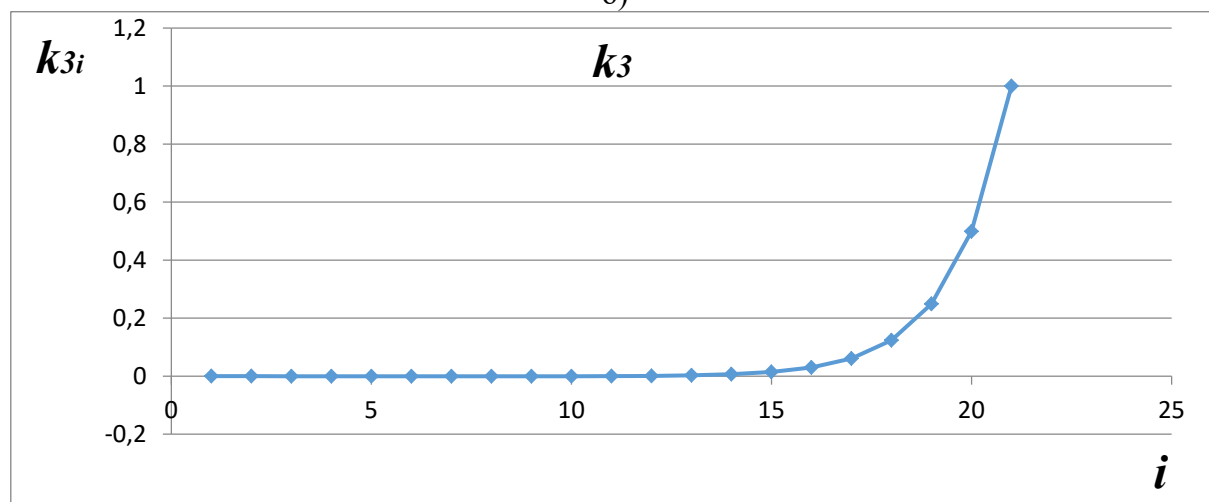
Також, на підставі одержаних вище значень величин коефіцієнтів суперпозиції для симетричних вихідних умов розрахункової схеми, представленої на рис. 5, обчислимо дискретні значення вузлових точок модельованої кривої за формулою (5), як



а)



б)



в)

Рис. 2. Дискретні значення величин коефіцієнтів суперпозиції: а) k_1 ; б) k_2 ; в) k_3 .

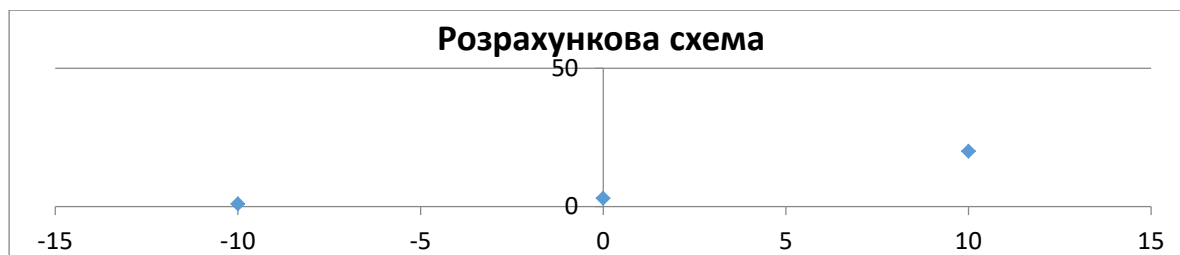


Рис. 3. Розрахункова схема моделювання кривих за вихідними умовами:
 $i_1 = -10; i_2 = 0; i_3 = 10; y_{i_1} = 1; y_{i_2} = 3; y_{i_3} = 20$.

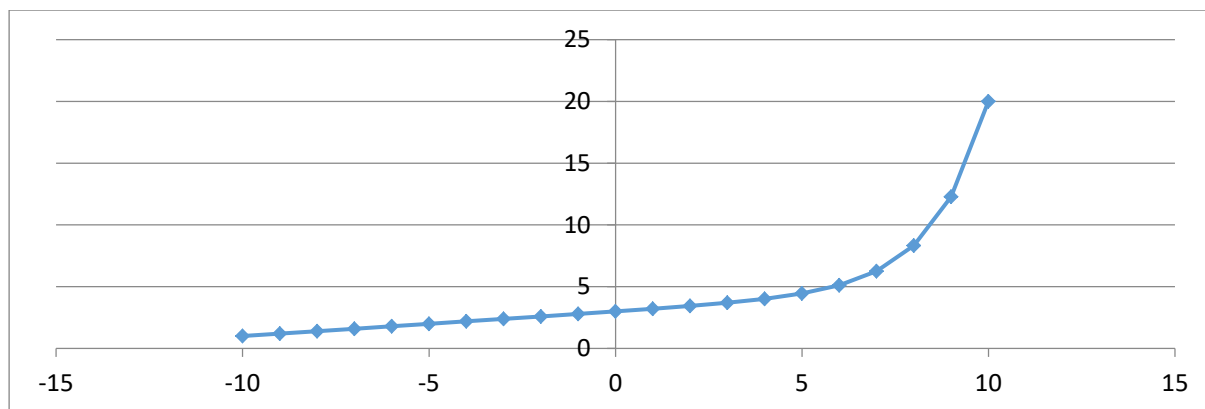


Рис. 4. Дискретний ряд точок модельованої кривої виду $y_i = a^i$.



Рис. 5. Розрахункова схема моделювання кривих за симетричними вихідними умовами:
 $i_1 = -10; i_2 = 0; i_3 = 10; y_{i_1} = 10; y_{i_2} = 0; y_{i_3} = 10$.

суперпозиції двох контурних і центральної вузлових точок за іншими вихідними даними (7):

$$i_1 = -10, i_2 = 0, i_3 = 10; y_{i_1} = 10, y_{i_2} = 0, y_{i_3} = 10. \quad (7)$$

Результати обчислень дискретних значень ординат модельованої кривої представлені на рис. 6.

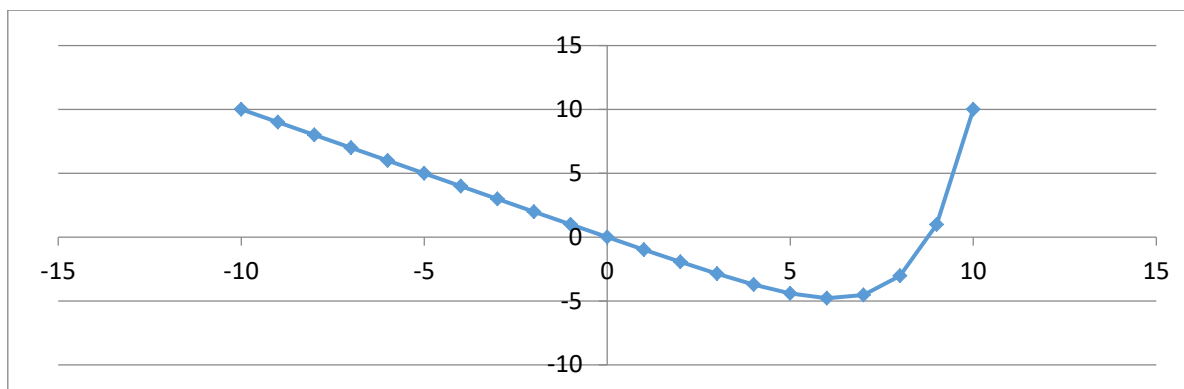


Рис. 6. Дискретний ряд точок модельованої кривої.

Таким чином виконано дискретну інтерполяцію суперпозиціями координат трьох точок одновимірної числової послідовності (4).

Висновки

На основі геометричного апарату суперпозицій розроблено спосіб, що дозволяє формувати одновимірні ГО у вигляді дискретних рядів точок кривих, які проходять через довільно задані три вузлові точки. На прикладі показникової функціональної залежності показано, що запропонований спосіб дозволяє за трьома довільно заданими точками виконувати суцільну одновимірну дискретну інтерполяцію числовими послідовностями будь-яких функціональних залежностей.

Таким чином, результати даної роботи можуть бути основою подальших досліджень одновимірної інтерполяції ГО за трьома довільно заданими точками числовими послідовностями будь-яких інших функціональних залежностей.

Список використаної літератури

1. Vorontsov O. V., Tulupova L. O., Vorontsova I. V. Discrete Modeling of Mesh Frames of Covering Surfaces by Chains of Superpositions. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 2016. Vol. 69 (2). P. 651–656.
2. Воронцов О. В. Дискретна інтерполяція суперпозиціями одновимірних точкових множин показникових функцій. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2018. Вип. 94. С. 296–300. DOI: 10/323447/0131-579X.2019.96
3. Воронцов О. В., Тулупова Л. О., Воронцова І. В. Визначення координат внутрішніх вузлів, як суперпозицій заданих координат центрального та двох контурних вузлів дискретно представлені кривої. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2019. Вип. 2(69). Ч. 3. С. 249–253. DOI: 10.32782
4. Воронцов О. В., Тулупова Л. О., Воронцова І. В. Визначення координат внутрішніх вузлів, як суперпозицій заданих координат центрального та двох контурних вузлів дискретно представлені кривої. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2018. Вип. 3(66). Ч. 2. С. 120–124. DOI: 10.32782
5. Vorontsov O., Tulupova L., Vorontsova I. Discrete Modeling of Building Structures Geometric Images. *International Journal of Engineering & Technology*. 2018. Vol. 7. № 3.2. P. 727–731. DOI: 10.14419/ijet.v7i3.2.15467
6. Vorontsov O., Tulupova L., Vorontsova I. Geometric and Computer Modeling of Building Structures Forms. *International Journal of Engineering & Technology*. 2018. Vol. 7. № 4.8, Special Issue 8. P. 560–565. DOI: 10.14419/ijet.v7i4.8.27306

References

1. Vorontsov, O. V., Tulupova, L. O., & Vorontsova, I. V. (2016). Discrete Modeling of Mesh Frames of Covering Surfaces by Chains of Superpositions. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. **69** (2), 651–656.
2. Vorontsov, O. V. (2018). Dyskretna interpoliatsiia superpozytsiiamy odnovymirnykh tochkovykh mnozhyn pokaznykovykh funktsii. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*. 94, 296–300.
3. Vorontsov, O. V., Tulupova, L. O., & Vorontsova, I. V. (2019). Vyznachennia koordynat vnutrishnikh vuzliv, yak superpozytsii zadanykh koordynat tsentralnoho ta dvokh konturnykh vuzliv dyskretno predstavlenoi kryvoi. *Visnyk Khersonskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu*. **2**(69), 3, 249–253.
4. Vorontsov, O. V., Tulupova, L. O., & Vorontsova, I. V. (2018). Vyznachennia koordynat vnutrishnikh vuzliv, yak superpozytsii zadanykh koordynat tsentralnoho ta dvokh konturnykh vuzliv dyskretno predstavlenoi kryvoi. *Visnyk Khersonskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu*. **3**(66), 2, 120–124.
5. Vorontsov, O. V., Tulupova, L. O., & Vorontsova, I. V. (2018). Discrete Modeling of Building Structures Geometric Images. *International Journal of Engineering & Technology*. **7**, 3.2, 727–731.
6. Vorontsov, O. V., Tulupova, L. O., & Vorontsova, I. V. (2018). Geometric and Computer Modeling of Building Structures Forms. *International Journal of Engineering & Technology*. **7**, 4.8, Special Issue 8, 560–565.

Воронцов Олег Вікторович – к.т.н., доцент, завідувачий кафедрою нарисної геометрії і графіки Національного університету «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка», e-mail: voronoleg6163@gmail.com, ORCID: 0000-0001-7339-9196.

Воронцова Ірина Валеріївна – к.пед.н., викладач Полтавського коледжу нафти і газу Національного університету «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка», e-mail: ira061061@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9131-2816.