

УДК 531

Е.Т. ГОРАЛИК, Н.Н. КРЮКОВ
Государственный университет инфраструктуры и технологий

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФАЗЫ ВРАЩЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ СХОЖДЕНИИ С НАКЛОННОЙ РАМПЫ

Известные математические модели движения твердых тел, сходящих с конвейера или наклонной рамп, основаны на построении систем трех дифференциальных уравнений в прямоугольной декартовой системе координат. Однако результаты расчетов параметров движения с использованием этих моделей и их сопоставление с другими расчетными и экспериментальными данными для конкретных объектов в открытой печати отсутствуют.

Цель работы заключается в построении и апробации новой адекватной математической модели фазы вращения движения твердого тела при схождении с наклонной рамп для исследования параметров его движения в начале свободного падения.

Рассматривается задача о фазе вращения твердого тела (схождение с опорной поверхности с нарастающим углом наклона с момента, когда центр масс тела оказывается над краем опоры, до отрыва от опоры его заднего конца), которое моделируется прямым однородным стержнем, при схождении с наклонной рамп в полярной системе координат. Дифференциальные уравнения движения стержня составлены с помощью уравнений Лагранжа второго рода. В качестве обобщенных координат приняты расстояние r от края опоры до центра масс стержня и полярный угол φ между горизонтальной осью и осью стержня. Для полученной нелинейной разрешающей системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка сформулирована соответствующая задача Коши, которая решается численно с помощью метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности. На основе предложенного подхода проведены численные эксперименты, результаты которых представлены в виде графиков зависимостей от начальной скорости центра масс времени фазы вращения, угла поворота, угловой скорости вращения и линейной скорости центра масс в конце фазы вращения для стержней длиной 5, 10 и 15 м при угле наклона рамп 35° .

Установлено, что увеличение начальной скорости центра масс приводит к возрастанию его конечной скорости, а также уменьшению времени фазы вращения, угла поворота и угловой скорости стержня. С увеличением длины стержня время фазы вращения и конечная скорость центра масс возрастают, а углы поворота и угловые скорости стержня уменьшаются.

Ключевые слова: плоскопараллельное движение; стержень; наклонная рамп; уравнения Лагранжа второго рода; обыкновенные дифференциальные уравнения; задача Коши; численное моделирование; метод Рунге-Кутты.

Є.Т. ГОРАЛІК, М.М. КРЮКОВ
Державний університет інфраструктури та технологій

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФАЗИ ОБЕРТАННЯ РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА ПРИ СХОЖДЕННІ З ПОХИЛОЇ РАМПИ

Відомі математичні моделі руху твердих тіл, що сходять з конвеєра або похилої рамп, базуються на побудові систем трьох диференціальних рівнянь у

прямокутній декартовій системі координат. Однак результати розрахунків параметрів руху за допомогою цих моделей і їх порівняння з іншими розрахунковими і експериментальними даними для конкретних об'єктів у відкритих джерелах не опубліковані.

Мета роботи полягає в побудові та апробації нової адекватної математичної моделі фази обертання руху твердого тіла при сходженні з похилої рампи для дослідження параметрів його руху на початку вільного падіння.

Розглянуто задачу про фазу обертання руху твердого тіла (сходження з опорної поверхні зі зростаючим кутом нахилу від моменту, коли центр маси тіла опиняється над краєм опори, до відриву від опори його заднього кінця), що моделюється прямим однорідним стрижнем, при сходженні з похилої рампи в полярній системі координат.

Диференціальні рівняння руху стрижня складені за допомогою рівнянь Лагранжа другого роду. В якості узагальнених координат прийняті відстань r від краю опори до центру мас стрижня і полярний кут φ між горизонтальною віссю і віссю стрижня. Для отриманої нелінійної розв'язувальної системи двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку сформульовано відповідну задачу Коші, яка розв'язується чисельно методом Рунге-Кутта четвертого порядку точності. Виходячи з запропонованого підходу, проведено чисельні експерименти, результати яких представлені у вигляді графіків залежностей тривалості фази обертання, кута повороту, кутової швидкості обертання і лінійної швидкості центру мас в кінці фази обертання від початкової швидкості центру мас стрижня для стрижнів довжиною 5, 10 і 15 м при куті нахилу рампи 35° .

Встановлено, що збільшення початкової швидкості центру мас призводить до збільшення його кінцевої швидкості, а також зменшення тривалості фази обертання, кута повороту і кутової швидкості стрижня. Зі збільшенням довжини стрижня тривалість фази обертання і кінцева швидкість центру мас зростають, а кути повороту і кутові швидкості стрижня зменшуються.

Ключові слова: плоскопаралельний рух, стрижень, похила рампа, рівняння Лагранжа другого роду, звичайні диференціальні рівняння, задача Коші, чисельне моделювання, метод Рунге-Кутта.

J.T. GORALIK, N.N. KRYUKOV
State University of Infrastructure and Technologies

MATHEMATICAL MODELING OF THE ROTATION PHASE OF A SOLID BODY MOVEMENT WHEN DESCENDING FROM THE INCLINED RAMP

Known mathematical models of solids coming off a conveyor belt or sloping ramp are based on the construction of three differential equation systems in a rectangular Cartesian system of coordinates. However, there are no results of calculations of motion parameters using these models and their comparison with other calculation and experimental data for specific objects in open print.

The aim of the work is to build and test a new adequate mathematical model of the phase of rotation of solid movement when coming down from the sloping ramp to study the parameters of its movement at the beginning of free fall.

The task of the solid body rotation phase (a convergence from the supporting surface with a growing angle of inclination from the moment when the center of the body mass is above the edge of the support, to the detachment from the support of its rear end) is

considered, which is simulated by a straight homogeneous rod, when descending from the inclined ramp in the polar coordinate system.

Differential equations of the rod movement are made with the help of Lagrange equations of the second kind. The generalized coordinates are the distance r from the edge of the support to the center of the rod masses and the polar angle φ between the horizontal axis and the axis of the rod. For the received non-linear resolution system of two ordinary differential equations of the second order, the corresponding task of Koshi is formulated, which is solved numerically by the Runge-Kutt method of the fourth order of accuracy. On the basis of the proposed approach, numerical experiments were conducted, the results of which are presented in the form of graphs dependencies time the rotation phase, angle of the turn and the angular speed and linear velocity of center of mass at the end of the rotation phase from the initial velocity of the center of mass of the rod for rods of 5, 10 and 15 m by an angle of ramp 35° .

It has been established that the increase in the initial speed of the center of the mass leads to an increase in its final speed, as well as a decrease in the time of the rotation phase, the angle of the turn and the angular speed of the rod. As the length of the rod increases, the rotational phase and the final speed of the center of the mass increase, and the turning angles and angular speeds of the rod decrease.

Keywords: plane-parallel motion, rod, inclined ramp, Lagrange equation of the second kind, ordinary differential equations, Cauchy problem, numerical simulation, Runge-Kutta method.

Постановка проблемы

При сходжении первоначально поступательно движущегося твердого тела (транспортного средства, заготовки или штучного груза) с опоры (рольганга, конвейера) оно начинает вращаться под действием момента пары сил, возникающего после перемещения центра тяжести за край опоры, то есть движется плоскопараллельно. Положение тела, а также величина опасного ударного импульса при последующем контакте с поверхностью других тел (земли, воды, штабеля и др.) зависит от параметров его движения при сходжении с опоры. Поскольку проведение экспериментальных и особенно натурных исследований при создании новых технических средств, как правило, весьма дорогостояще, математическое моделирование движения при сходжении с опоры штучных грузов, транспортных средств, в частности, спасательных шлюпок свободного падения и др., безусловно, актуально.

Анализ последних исследований и публикаций

Известны математические модели движения штучных грузов, сходящих с конвейера [1], спасательных шлюпок свободного падения при сходжении с наклонной рампы, например [2–3], с использованием систем трех дифференциальных уравнений плоскопараллельного движения и прямоугольных декартовых систем координат. Однако результаты расчетов параметров движения с использованием этих моделей для конкретных объектов в открытой печати, к сожалению, отсутствуют [4].

Цель исследования

Цель работы заключается в построении и апробации новой адекватной математической модели фазы вращения движения твердого тела при сходжении с наклонной рампы для исследования влияния его начальной скорости и длины на скорость, угловую скорость и угол поворота в начале свободного падения.

Изложение основного материала исследования

При исследовании плоскопараллельного движения тел его обычно представляют как сумму двух движений: поступательного вместе с центром масс и вращательного вокруг этой точки. При этом реальные тела во многих случаях с достаточной точностью могут моделироваться однородным прямым стержнем.

Первый этап падения тела при его схождении с опорной поверхности (фаза вращения) с нарастающим углом наклона начинается с момента, когда центр масс тела оказывается над краем опоры (крайним роликом рампы), и заканчивается в момент отрыва от опоры его заднего конца [3–4].

Рассмотрим в полярной системе координат (r, φ) именно этот этап – схождение с наклонной рампы однородного прямого стержня массой m длиной L , который имеет в начальный момент начальную скорость V_0 (рис. 1).

Перемещение центра масс стержня за край опоры на длину отрезка $r = OC$ под действием силы тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$ вызывает появление вращательного момента $M = Px = mgr \cos \varphi$, под действием которого стержень вращается с угловым ускорением в вертикальной плоскости.

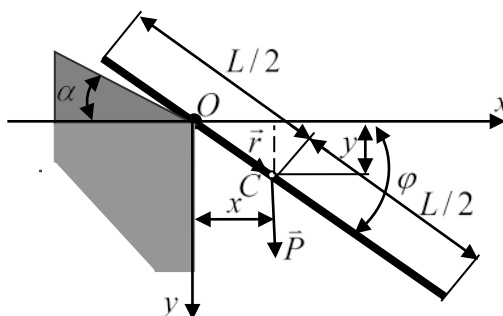


Рис. 1. Схождение однородного стержня с наклонной опоры.

Для составления дифференциальных уравнений движения стержня используем уравнения Лагранжа второго рода [5]. При этом силами трения пренебрегаем.

В качестве обобщенных координат принимаем радиус $r = OC$ – расстояние от центра масс стержня до края опоры и полярный угол φ между горизонтальной осью x и направлением OC – осью стержня.

В данном случае уравнение Лагранжа второго рода имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{\delta \dot{r}} \right) - \frac{\delta T}{\delta r} = Q_1,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{\delta \dot{\varphi}} \right) - \frac{\delta T}{\delta \varphi} = Q_2,$$

где T – кинетическая энергия стержня, $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ – модуль радиальной скорости центра масс, $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$ – модуль угловой скорости стержня, $\ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ – модуль углового ускорения стержня, Q_1 и Q_2 – обобщенные силы.

Кинетическая энергия стержня при его плоскопараллельном движении представляется в виде следующего выражения:

$$T = \frac{I_{zc} \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{mV_c^2}{2},$$

где I_{zc} – момент инерции стержня относительно центра масс, V_c – модуль вектора скорости центра масс.

С учетом известных формул для момента инерции стержня относительно центра масс $I_{zc} = \frac{mL^2}{12}$ и модуля вектора скорости точки в полярной системе координат $V = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}$ получаем следующее выражение для кинетической энергии стержня:

$$T = \frac{mL^2}{12} \cdot \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)}{2}.$$

Найдя выражения для производных, входящих в левые части уравнений Лагранжа, получим:

$$\frac{\delta T}{\delta \dot{r}} = m\dot{r}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{\delta \dot{r}} \right) = m\ddot{r}; \quad \frac{\delta T}{\delta r} = m r \dot{\varphi}^2; \quad \frac{\delta T}{\delta \dot{\varphi}} = \frac{L^2}{12} m \dot{\varphi} + m r^2 \dot{\varphi};$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{\delta \dot{\varphi}} \right) = 2 m r \dot{r} \dot{\varphi} + \left(\frac{L^2}{12} + r^2 \right) m \ddot{\varphi}; \quad \frac{\delta T}{\delta \varphi} = 0;$$

Определим обобщенную силу Q_1 по координате $q_1 = r$. Для этого рассмотрим возможное перемещение системы, обусловленное возможным приращением обобщенной координаты δr (рис. 2).

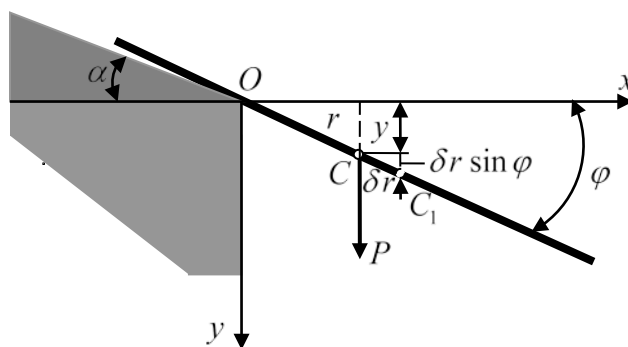


Рис. 2. Возможное перемещение системы, обусловленное возможным приращением обобщенной координаты δr .

Сумма элементарных работ всех активных сил, приложенных к системе во время этого перемещения равна: $\delta A = P \delta r \sin \varphi = m g \delta r \sin \varphi$.

С другой стороны, $\delta A = Q_1 \delta q_1 = Q_1 \delta r$. Таким образом, $Q_1 = m g \sin \varphi$. Так же определим обобщенную силу Q_2 по координате $q_2 = \varphi$.

Рассмотрим возможное перемещение системы, обусловленное возможным приращением обобщенной координаты $\delta\varphi$ (рис. 3).

Сумма элементарных работ всех активных сил, приложенных к системе во время этого перемещения равна

$$\delta A = Pr[\sin(\varphi + \delta\varphi) - \sin \varphi] = mgr[\sin \varphi \cos \delta\varphi + \cos \varphi \sin \delta\varphi - \sin \varphi].$$

Поскольку $\cos \delta\varphi \approx 1$ и $\sin \delta\varphi \approx \delta\varphi$, можно считать, что $\delta A = mgr \cos \varphi \delta\varphi$. С другой стороны, $\delta A = Q_2 \delta q_2 = Q_2 \delta\varphi$. Следовательно, $Q_2 = mgr \cos \varphi$.

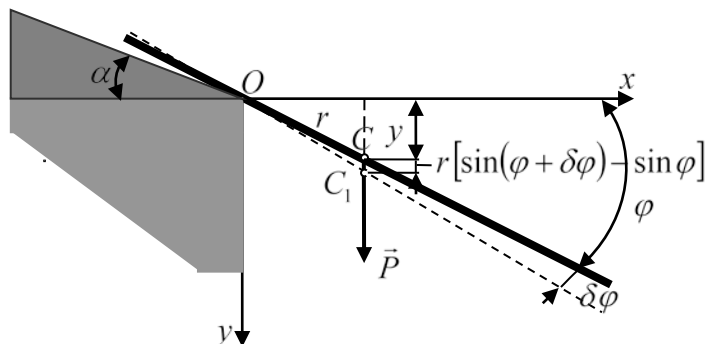


Рис. 3. Возможное перемещение системы, обусловленное возможным приращением обобщенной координаты $\delta\varphi$.

Подставим полученные выше выражения в уравнения Лагранжа и получим следующую разрешающую систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 &= g \sin \varphi; \\ 2r\dot{r}\dot{\varphi} + \left(\frac{L^2}{12} + r^2\right)\ddot{\varphi} &= gr \cos \varphi. \end{aligned} \tag{1}$$

Для формулирования задачи Коши для полученной системы дифференциальных уравнений (1) необходимо добавить начальные условия:

$$r(0) = r_0, \quad \dot{r}(0) = V_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0. \tag{2}$$

Запишем задачу Коши (1)–(2) в векторной форме:

$$\frac{d\vec{Y}}{dt} = \vec{F}(t, \vec{Y}), \quad \vec{Y}(0) = \vec{Y}_0, \tag{3}$$

где $\vec{Y} = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}^T$, $\vec{F}(t, \vec{Y}) = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}^T$

$$\begin{aligned} \text{Тут } y_1 &= r, \quad y_2 = \dot{r}, \quad y_3 = \varphi, \quad y_4 = \dot{\varphi}, \quad f_1 = y_2, \quad f_2 = y_1 y_4^2 + g \sin y_3, \quad f_3 = y_4, \\ f_4 &= \frac{gy_1 \cos y_3 - 2y_1 y_2 y_4}{a + y_1^2}, \quad a = \frac{L^2}{12}, \quad \vec{Y}_0 = \{y_{10}, y_{20}, y_{30}, y_{40}\}^T. \end{aligned}$$

Поскольку точное или приближенное аналитическое решение задачи (3) найти трудно, будем решать ее с помощью численного метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности [7].

На основе предложенной модели проведено серию численных экспериментов для определения времени схождения стержня, скорости центра масс, углов поворота и угловой скорости стержня в момент отрыва от рампы при $\alpha = 35^\circ$ и разных значениях начальной скорости центра масс в диапазоне от 1 до 10 м/с и длине стержня в диапазоне от 5 до 15 м, результаты которых представлены на рис. 4–7.

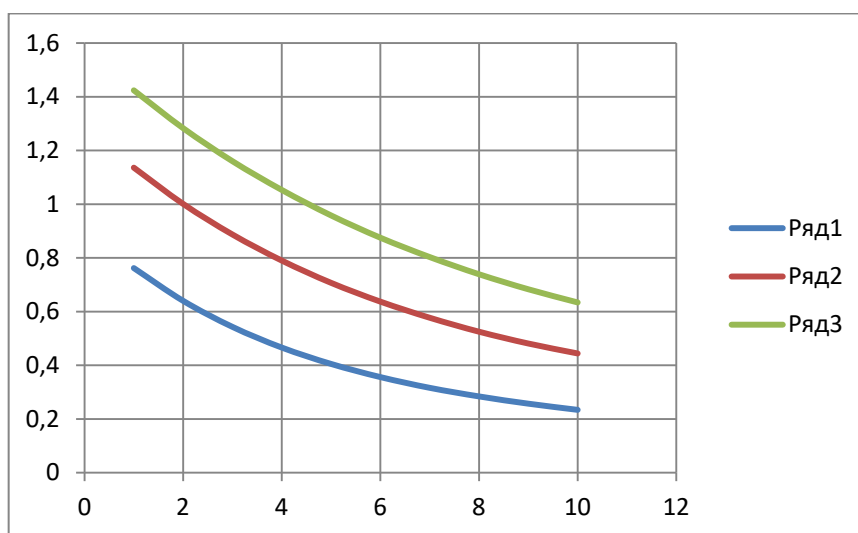


Рис. 4. Зависимость времени схождения стержня (с) от начальной скорости (м/с) при угле наклона рампы 35° : Ряд1 – $L = 5$ м; Ряд2 – $L = 10$ м; Ряд3 – $L = 15$ м.

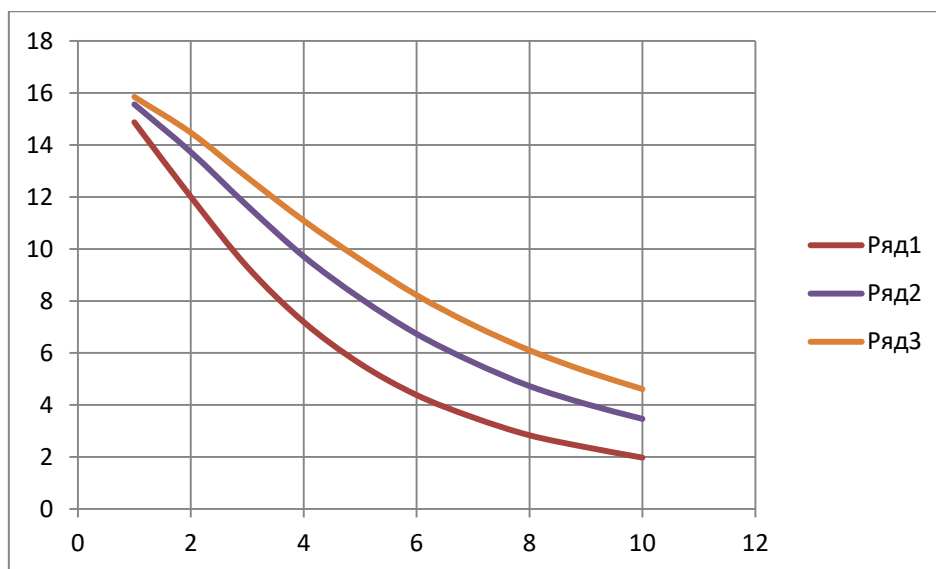


Рис. 5. Зависимость угла поворота ($^\circ$) от начальной скорости (м/с) при схождении с наклонной рампы при угле наклона рампы 35° : Ряд1 – $L = 5$ м; Ряд2 – $L = 10$ м; Ряд3 – $L = 15$ м.

Как видно из графиков на рис. 4, время фазы вращения с увеличением длины стержня возрастает, а с увеличением начальной скорости – уменьшается. Графики зависимостей времени схождения для стержней длиной 5, 10 и 15 метров имеют вид почти эквидистантных вогнутых кривых. Время схождения для стержней длиной 5, 10 и 15 метров при возрастании начальной скорости от 1 до 10 м/с уменьшается от 0,762 до 0,234 с, от 1,136 до 0,444 с, и от 1,424 до 0,634 с, соответственно, то есть

уменьшение времени при возрастании скорости с увеличением длины для исследованных стержней составляет 0,528, 0,692 и 0,79 с.

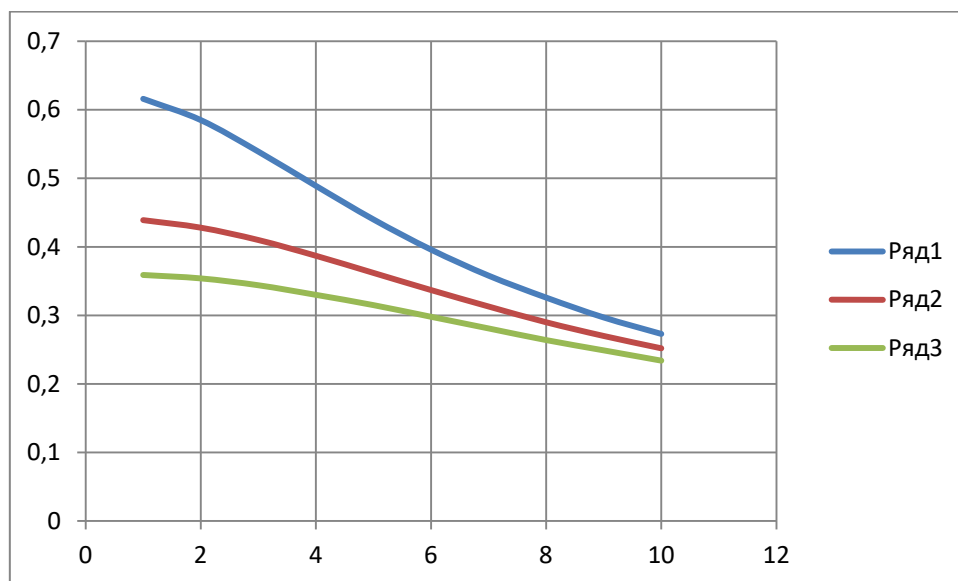


Рис. 6. Зависимость угловой скорости вращения (с⁻¹) от начальной скорости (м/с) при сходе с наклонной рампой при угле наклона рампой 35°: Ряд1 – $L = 5$ м, $V_0 = 6$ м/с; Ряд2 – $L = 10$ м, $V_0 = 8$ м/с; Ряд3 – $L = 15$ м, $V_0 = 10$ м/с.

На рис. 5 видно, что углы поворота с увеличением скорости уменьшаются, а с увеличением длины стержня возрастают. Первые, из указанных зависимостей, описываются убывающими функциями, графики которых представляют собой вогнутые кривые, причем кривые для больших длин располагаются выше, а их кривизна уменьшается – зависимость приближается к линейной. Максимальные углы поворота имеют место при начальной скорости 1 м/с и для стержней длиной 5, 10 и 15 м составляют 14,873°, 15,56° и 15,847°, соответственно. При увеличении начальной скорости до 10 м/с углы поворота этих стержней уменьшаются до 1,975°, 3,465° и 4,612°.

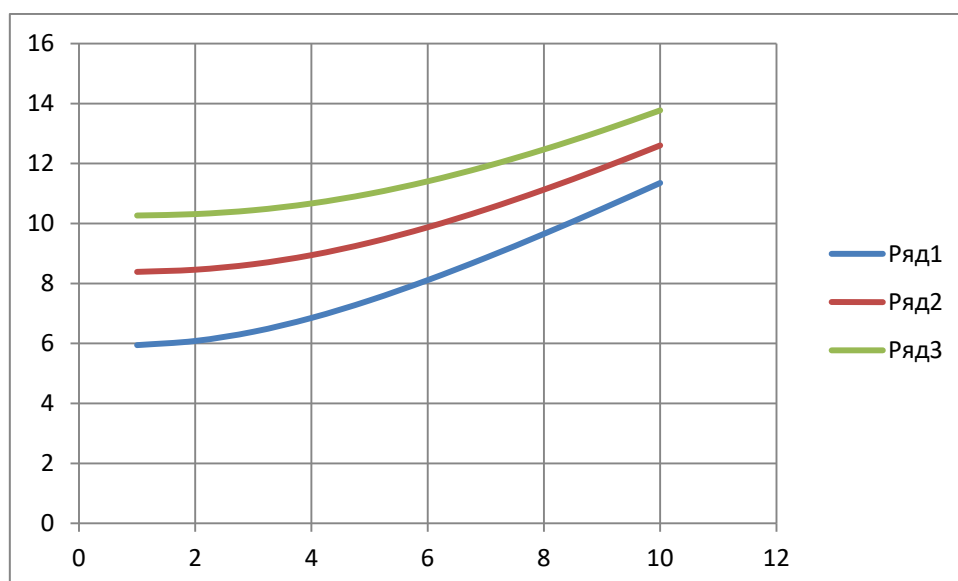


Рис. 7. Зависимость скорости центра масс шляпки (м/с) в момент отрыва от рампой от начальной скорости (м/с) при угле наклона рампой 35°: Ряд1 – $L = 5$ м, $V_0 = 6$ м/с; Ряд2 – $L = 10$ м, $V_0 = 8$ м/с; Ряд3 – $L = 15$ м, $V_0 = 10$ м/с.

Угловые скорости вращения с увеличением начальной скорости так же, как и с увеличением длины уменьшаются (рис. 6). При минимальной начальной скорости для исследованных длин соответствующие угловые скорости вращения составляют $0,616 \text{ с}^{-1}$, $0,439 \text{ с}^{-1}$ и $0,359 \text{ с}^{-1}$. При максимальной начальной скорости эти величины уменьшаются до $0,273 \text{ с}^{-1}$, $0,252 \text{ с}^{-1}$ и $0,234 \text{ с}^{-1}$.

Напротив, скорости центра масс стержней в момент отрыва от рампы с увеличением начальной скорости так же, как и с увеличением длины возрастают (рис. 7): для стержней длиной 5 м, 10 м и 15 м – от 5,944 м/с до 11,352 м/с, от 8,387 м/с до 12,604 м/с и от 10,267 м/с до 13,773 м/с. С увеличением начальной скорости разница скоростей центров масс стержней разной длины в момент отрыва уменьшается (расстояние между соответствующими кривыми уменьшается).

Выводы

Предложенная математическая модель первого этапа падения тела при его схождении с опорной поверхности (фазы вращения) позволяет с помощью численных экспериментов находить с достаточной точностью рациональные значения углов поворота и угловой скорости, а также скорости центра масс исследуемого объекта.

Список использованной литературы

1. Любимов В. М. Исследование процесса метания тарно-штучного груза ленточным конвейером. Киев: КТИПП, 1983. 14 с. URL: [dspace.nuft.edu.ua > 2.pdf](https://dspace.nuft.edu.ua/2.pdf)
2. Бугаенко Б. А., Галь А. Ф. Принципы проектирования и особенности конструирования судовых устройств и судовой техники морских технологий. Ч. 2. Николаев: УГМТУ, 1995. 105 с.
3. Karim M. M., Iqbal K. S., Khondoker M. R. H., Rahman S. M. H. Influence of Falling Height on the Behavior of Skid-Launching Free-Fall Lifeboat in Regular Waves. *Journal of Applied Fluid Mechanics*. 2011. Vol. 4, № 1. P. 77–88.
4. Микитюк В. Е., Миронов Д. А. Параметры движения шлюпки свободного падения перед приводнением. *Збірник наукових праць НУК*. 2011. № 1. С. 44–49.
5. Машиностроение. Энциклопедия / Ред. совет: К. В. Фролов и др. М.: Машиностроение, 1999. Т. 1–2. Теоретическая механика. Термодинамика. Теплообмен. / Под общ. ред. К. С. Колесникова, А. И. Леонтьева. 600 с.
6. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т.2. М.: Физматгиз, 1962. 639 с.

References

1. Lyubimov, V. M. (1983). Issledovanie protsessa metaniya tarno-shtuchnogo gruzha lentochnyim konveyerom. Kiev: KTIPP, 1983. Retrieved from [dspace.nuft.edu.ua > 2.pdf](https://dspace.nuft.edu.ua/2.pdf).
2. Bugaenko, B. A., & Gal A. F. (1995). Printsipy proektirovaniya i osobennosti konstruirovaniya sudovyih ustroystv i sudovoy tehniky morskikh tehnologiy. Parth 2. Nikolaev : UGM TU.
3. Karim, M. M., Iqbal, K. S., Khondoker, M. R. H. & Rahman S. M. H. (2011). Influence of Falling Height on the Behavior of Skid-Launching Free-Fall Lifeboat in Regular Waves. *Journal of Applied Fluid Mechanics*. 4, 1, 77–88.
4. Mikityuk, V. E., & Mironov, D. A. (2011). Parametryi dvizheniya shlyupki svobodnogo padeniya pered privodnieniem. *Zbirnyk naukovykh prats NUK*. 1, 44–49.
5. Kolesnikova, K. S., & Leonteva A. I. (Eds.) (1999). Teoreticheskaya mehanika. Termodinamika. Teploobmen. In Frolov K. V. et al. (Eds.), *Mashinostroenie. Entsiklopediya* (Vol. 1–2). Moscow: Mashinostroenie.

6. Berezin, I. S., & Zhidkov, N. P. (1962). *Metodyi vyichisleniy*. Vol. 2. M.: Fizmatgiz.

Горалік Євгеній Тадеушевич – к.т.н., доцент, завідувач кафедри природничо-технічного забезпечення діяльності водного транспорту Державного університету інфраструктури і технологій, e-mail: et_gor@ukr.net, ORCID: 0000-0003-2399-5373.

Крюков Микола Миколайович – д.т.н., професор, професор кафедри вищої і прикладної математики Державного університету інфраструктури і технологій, e-mail: mmkryukov@ukr.net, ORCID: 0000-8156-1720.