УДК 514.18

Г.В. КОВАЛЬОВА, О.О. КАЛІНІН, Т.О. КАЛІНІНА
Одеська державна академія будівництва та архітектури
О.А. НІКІТЕНКО
Варшавський університет сільського господарства

НАБЛИЖЕНА ПОБУДОВА ГЕОДЕЗИЧНИХ ЛІНІЙ НА ПОВЕРХНЯХ ОБЕРТАННЯ

На даний час геодезичні лінії привертають увагу як вітчизняних так і зарубіжних науковців. В теоретичних дослідженнях геодезична лінія відіграє важливу роль як лінія внутрішньої геометрії поверхні. На практиці властивості геодезичних ліній використовуються для визначення найкоротших відстаней або армування оболонок тощо. При спряженні двох поверхонь лінія їх контакту теж є геодезичною. Цією властивістю можна скористатися для проектування спряжених циклічних гвинтових поверхонь, які мають місце, наприклад, в зачепленнях Новікова. Пошук геодезичних ліній на нерозгортуваних поверхнях є досить складним. В аналітичному плані ця задача зводиться до складання і розв'язування диференціальних рівнянь, знайти явний розв'язок яких вдається лише в нечисленних випадках. Автори пропонують графо-аналітичний метод відшукання геодезичних на поверхні обертання загального вигляду за допомогою розгорток. Точність цього методу безпосередньо залежить від точності побудови умовних (наближених) розгорток нерозгортуваних поверхонь обертання. У цьому випадку доцільно використовувати метод побудови розгорток з використанням інтегрального числення. Запропонований графо-аналітичний метод відшукання геодезичних можна також використовувати і для інших поверхонь. Наближені геодезичні лінії на поверхнях за допомогою розгорток можна будувати двома способами: в першому враховується положення теореми Клеро, а в другому – сегменти умовної наближеної розгортки поверхні поєднуються так, щоб можна було провести суцільну пряму лінію. Для докладного опису двох методів розглянуто дві поверхні – параболоїд обертання і катеноїд. Визначати загальний вигляд геодезичних ліній на поверхнях можна без побудови самих розгорток, а використовувати тільки принцип побудови геодезичної на ній. Наближена геодезична лінія є ламаною, довжину якої легко порахувати, маючи необхідні геометричні розміри поверхні. Запропонований графо-аналітичний метод визначення геодезичних ліній досить простий. Його легко застосовувати для поверхонь обертання загального виду або «гофрованих».

Ключові слова: геодезична лінія, розгортка, наближена побудова, параболоїд обертання, катеноїд.

Г.В. КОВАЛЕВА, А.А. КАЛИНИН, Т.А. КАЛИНИНА
Одесская государственная академия строительства и архитектуры
О.А. НИКИТЕНКО
Варшавский университет сельского хозяйства

ПРИБЛИЖЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЙ НА ПОВЕРХНОСТЯХ ВРАЩЕНИЯ

В настоящее время геодезические линии привлекают внимание как отечественных так и зарубежных ученых. В теоретических исследованиях геодезическая линия играет важную роль как линия внутренней геометрии поверхности. На практике свойства геодезических линий используются для

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.15

определения кратчайших расстояний или армирования оболочек и так далее. При сопряжении двух поверхностей линия их контакта также является геодезической. Этим свойством можно воспользоваться для проектирования сопряженных циклических винтовых поверхностей, которые имеют место, например, в передачах Новикова. Поиск геодезических линий на неразвертывемых поверхностях достаточно сложен. В аналитическом плане эта задача сводится к составлению и решению дифференциальных уравнений, найти явное решение которых удается лишь в редких случаях. Авторы предлагают графо-аналитический метод отыскания геодезических на поверхности вращения общего вида с помощью разверток. Точность этого метода напрямую зависит от точности построения условных (приближенных) разверток неразвертывемых поверхностей вращения. В этом случае целесообразно использовать метод построения разверток с использованием интегрального исчисления. Предложенный графо-аналитический метод отыскания геодезических можно использовать и для других поверхностей. Приближенные геодезические линии на поверхностях с помощью разверток можно строить двумя способами: в первом учитывается положение теоремы Клеро, а во втором - сегменты условной приближенной развертки поверхности стыкуются так, чтобы можно было провести сплошную прямую линию. Для подробного описания двух методов рассмотрены две поверхности - параболоид вращения и катеноид. Определять общий вид геодезических линий на поверхностях можно без построения самых разверток, а использовать только принцип построения геодезической на ней. Приближенная геодезическая линия является ломаной, длину которой легко посчитать, имея необходимые геометрические размеры поверхности. Предложенный графо-аналитический метод определения геодезических линий достаточно прост. Его легко применять для поверхностей вращения общего вида или «гофрированных».

Ключевые слова: геодезическая линия, развертка, приближенная построение, параболоид вращения, катеноид.

G. KOVALOVA, A. KALININ, T. KALININA
Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture
O. NIKITENKO
Warsaw University of Life Sciences

APPROXIMATE CONSTRUCTION OF GEODESIC LINES ON ROTATION SURFACES

At present, geodesic lines attract the attention of many scientists. In theoretical studies, the geodesic line plays an important role as a line of the internal geometry of the surface. In practice, the properties of geodesic lines are used to determine the shortest distances or reinforce covering and so on. When two surfaces are conjugated, their contact line is also a geodesic. This property can be used to design conjugate cyclic helical surfaces that occur, for example, in Novikov gears. The search for geodetic lines on non-expandable surfaces is quite complicated. In analytical terms, this problem is reduced to the making and solving of differential equations, the explicit solution of which can only be found in rare cases. The authors propose a graph-analytical method for finding geodesics on a surface of rotation of a general form using sweeps. The accuracy of this method directly depends on the accuracy of constructing conditional (approximate) sweeps of non-expandable surfaces of rotation. In this case, it is advisable to use the method of constructing scans using the integral calculus. The proposed graph-analytical method for finding geodesics can be used for other surfaces. Approximate geodesic lines on surface using sweep can be constructed in two ways: in the first, the statement of the Clareau theorem is taken into account, and in the second,

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.15

segments of the conditional approximate sweep of the surface are connected so that a continuous straight line can be drawn. For a detailed description of the two methods, two surfaces are considered - a paraboloid of rotation and a catenoid. It is possible to determine the general appearance of geodesic lines on surfaces without constructing their sweeps, and use only the principle of constructing geodesic lines on it. The approximate geodesic line is a broken line, the length of which is easy to calculate, knowing the necessary geometric dimensions of the surface. The proposed graph-analytical method for determining geodetic lines is quite simple. It is easy to apply to general surfaces of rotation or "corrugated" surfaces.

Keywords: geodesic line, sweep, approximate construction, paraboloid of rotation, catenoid.

Постановка проблеми

Геодезичні лінії займають особливе місце в проектуванні і виготовленні різних виробів. Наприклад, при виготовленні поверхонь обертання з композитних матеріалів нитки армування необхідно розташовувати по геодезичних лініях. Так само в процесі робочої напруги в деталях траєкторії тріщин з'являються уздовж сімейства геодезичних [1, С. 158]. Однак аналітичний пошук геодезичних ліній на нерозгортуваних поверхнях є досить складним.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

На поверхнях обертання геодезичні лінії визначаються за допомогою диференційних рівнянь, які встановлюють взаємозв'язок між внутрішніми координатами поверхні [2, С. 25]. Однак в загальному випадку побудувати геодезичні лінії в повній мірі не вдається, тільки на деяких фрагментах. Особливий інтерес представляє дисертаційна робота Кремець Я. [3], в якій він модифікував інтеграл на основі рівняння Клеро для побудови геодезичних ліній на поверхнях обертання у функції довжини дуги і розглянув їх на поверхнях псевдосфери, катеноїда, тора, еліпсоїда, а також на поверхні, утвореної обертанням верзьєри.

Мета дослідження

Автори пропонують графо-аналітичний метод відшукання геодезичних на поверхні обертання загального вигляду за допомогою розгорток. Точність цього методу безпосередньо залежить від точності побудови умовних (наближених) розгорток нерозгортуваних поверхонь обертання. У цьому випадку доцільно використовувати метод побудови розгорток з використанням інтегрального числення [4]. Запропонований графо-аналітичний метод відшукання геодезичних можна також використовувати і для інших поверхонь.

Викладення основного матеріалу дослідження

Перший метод. Розглянемо поверхню параболоїда обертання

$$x^2 + y^2 = z.$$

Для побудови одного сегмента був використаний інтеграл для обчислення довжини дуги меридіана і формула для обчислення довжин дуг паралелей. Вся розгортка складається з 12 сегментів, меридіани на поверхні розташовані через 30°. На розгортці накреслена ламана, всі ланки якої відповідають теоремі Клеро для геодезичної лінії (рис. 1), тобто добуток радіуса паралелі на косинус кута, під яким геодезична перетинає цю паралель, залишається постійним уздовж самої геодезичної

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.15

[5]:

$$r\cos t = const.$$

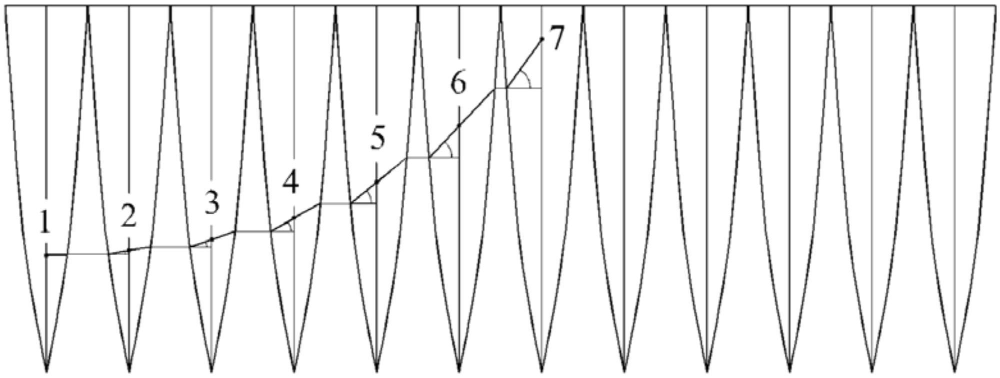


Рис. 1. Розгортка параболоїда обертання і наближена геодезична лінія на ній (ламана).

Нахил першої ланки ламаної геодезичної визначається бажаним напрямком, в якому будуємо геодезичну. В нашому прикладі перша ланка нахилена до паралелі поверхні на 3°. Для визначення кутів нахилу наступних ланок використовували пропорцію:

$$r_1 \cos t_1 = r_2 \cos t_2. \tag{1}$$

Для визначення координат пунктів 1, 2, ... 7 меридіанів на самій поверхні необхідно поміряти довжину l для цих пунктів і визначити координати x, y і z (рис. 2).

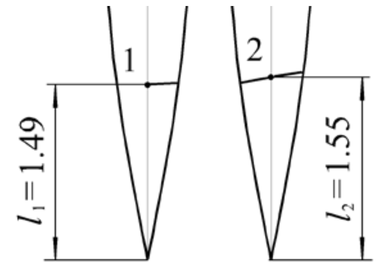


Рис. 2. Визначення довжини відрізків меридіанів параболоїда.

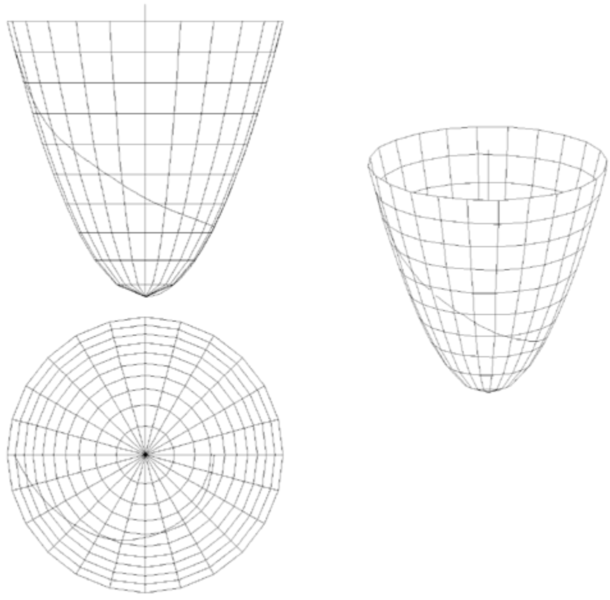
Оскільки інтеграл для обчислення довжини дуги даної поверхні має вигляд:

$$l = \int_a^b \sqrt{1+4x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4}\ln\left|2x+\sqrt{1+4x^2}\right|\right]\Bigg|_a^b, \tag{2}$$

тому для визначення координати x_n для пунктів 1, 2, ... 7 необхідно розв'язати наступне рівняння:

$$l_n = \frac{1}{2}x_n\sqrt{1+4x_n^2} + \frac{1}{4}\ln\left|2x_n+\sqrt{1+4x_n^2}\right|. \tag{3}$$

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.15



а **б**

Рис. 3. Параболоїд обертання і наближена геодезична лінія на ньому:
***а*) комплексне креслення; *б*) аксонометрія.**

Кожний меридіан повернутий відносно осі обертання на деякий кут α_n (α_1=0, α_2=30°, α_3=60°, …, α_7=180°), при цьому координати кожного пункту визначаються з рівняння поверхні. Обчисливши всі координати кінців ламаної, що наближає геодезичну, можемо її зобразити в графічному редакторі (рис. 3). Ламану, що наближає геодезичну лінію, можна відразу будувати в графічному редакторі без побудови розгортки. Для розрахунків нам необхідно виміряти радіуси R_n і висоту h_n паралелей, а також довжини дуг меридіанів між паралелями l_n і скористатися залежністю (1). Нехай розглядувана геодезична виходить з початкової точки 1 з координатами X_1, Y_1, Z_1 під кутом φ_1. Для визначення наступної точки 2 на поверхні необхідно обчислити кут, під яким вона буде перетинати паралель з радіусом R_2. Для цього використовуємо пропорцію (1):

$$\cos\varphi_2 = \frac{R_1}{R_2}\cos\varphi_1.$$

Отримавши значення φ_2, можемо обчислити координати точки перетину геодезичної з паралеллю радіуса R_2. Таким чином, будуємо геодезичну бажаної довжини.

Розглянемо ще одну поверхню – катеноїд, утворений обертанням ланцюгової лінії $x = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right)$ навколо осі OZ.

На розгортці катеноїда накреслені ланки ламаної геодезичної лінії відповідно до теореми Клеро. Перша і остання ланки нахилені до паралелі поверхні на 63°, а центральна (на осі) на 28° (рис. 4).

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.15

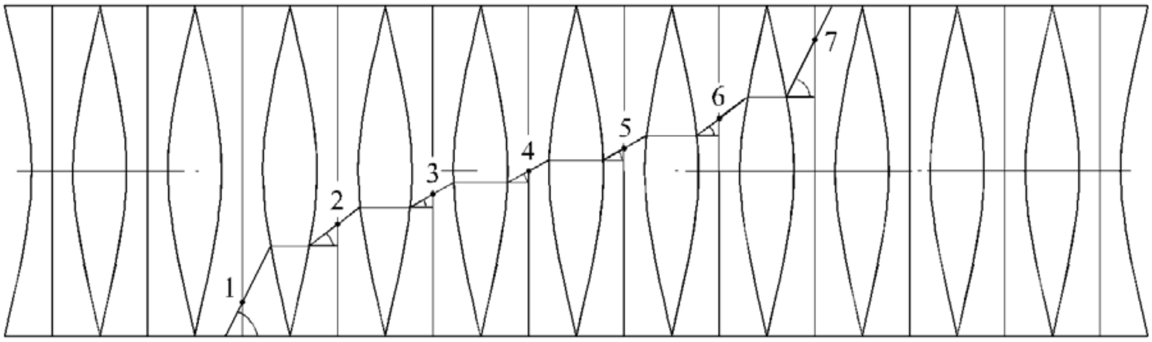


Рис. 4. Розгортка катеноїда і наближена геодезична лінія на ній (ламана).

Як і в попередньому прикладі, для визначення координат пунктів 1, 2, ... 7 меридіанів на самій поверхні необхідно виміряти довжину l для цих пунктів і визначити координати x, y і z (рис. 5).

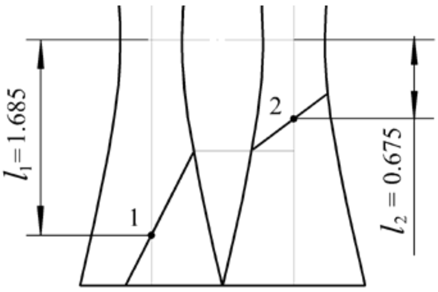


Рис. 5. Визначення довжини відрізків меридіанів катеноїда.

Оскільки інтеграл для обчислення довжини дуги даної поверхні має вигляд:

$$l = \frac{1}{2}\int_a^b \left(e^x + e^{-x}\right)dx = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)\Big|_a^b, \tag{4}$$

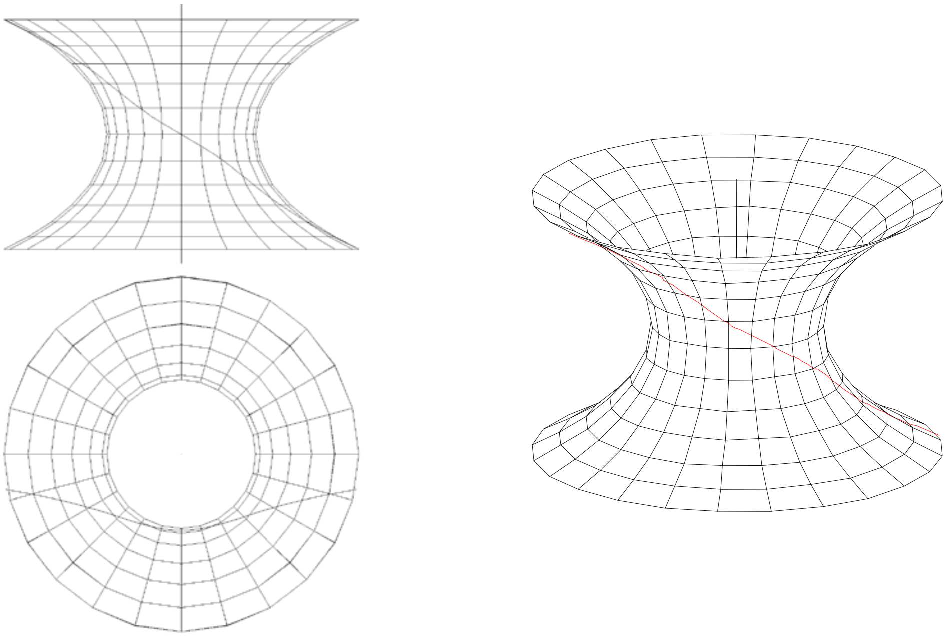
тому для визначення координати x_n для пунктів 1, 2, 3 і 4 (5, 6 і 7 симетричні пунктам 1, 2, 3) необхідно розв'язати наступне рівняння:

$$e^{2z_n} - 2l_n e^{z_n} - 1 = 0. \tag{5}$$

Кожний меридіан повернутий щодо осі на деякий кут α_n (α_1=0, α_2=30°, α_3 =60°, …, α_7=180°), при цьому координати кожного пункту визначаються з рівняння поверхні. Порахувавши всі координати кінців ламаної, що наближає геодезичну, можемо її зобразити в графічному редакторі (рис. 6), для кращого сприйняття вважаємо, що поверхня прозора.

Для перевірки точності побудови геодезичних запропонованим методом авторами був використаний метод мінімізації довжини кривої, який показав, що відносна похибка запропонованого методу становить не більше 1%. Для підвищення точності побудови необхідно задати більш дрібне розбиття заданої поверхні.

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.15

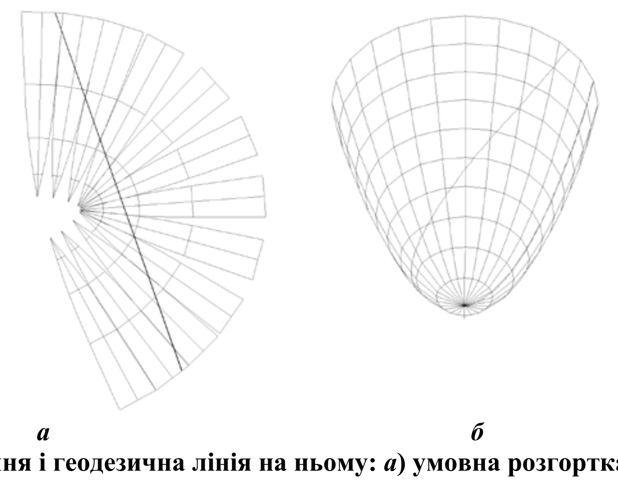


а **б**

Рис. 6. Катеноїд та наближена геодезична лінія на ньому:
***а*) комплексне креслення; *б*) аксонометрія.**

Другий метод. У другому методі зберігається такий самий принцип побудови точних розгорток за допомогою інтегрального числення, однак відшукання геодезичної принципово інше. Якщо в першому методі ми на розгортці креслили ланки ламаної, що наближає геодезичну, то в цьому випадку геодезична креслиться суцільною прямою лінією, а сегменти розгортки стикуються так, щоб ця лінія не переривалася. Фактично необхідно, щоб дотичні до двох сегментів збігалися в точці їх перетину з геодезичною.

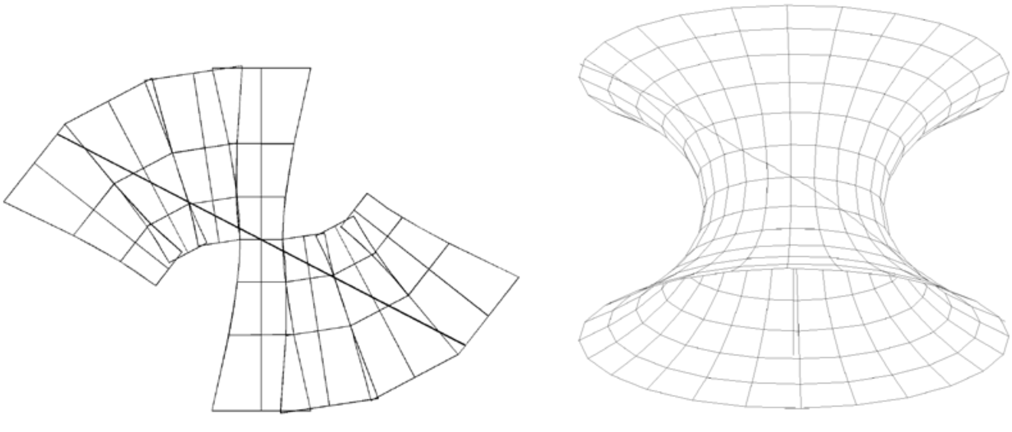
Визначення координат на поверхні x, y і z аналогічно першому методу – необхідно визначити довжини меридіанів, розв'язати рівняння (3) для параболоїда або (6) для катеноїда і порахувати координати кінців сегментів розгортки (рис. 7) та (рис. 8). Цей метод добре демонструє, як геодезична, будучи просторовою кривою, при побудові умовної розгортки перетворюється в пряму лінію, і підкреслює її геометричну суть – геодезична лінія реалізує найкоротшу відстань між двома точками на поверхні. Однак, мінусом цього методу є те, що в ньому необхідні додаткові графічні побудови, які знижують точність розрахунків.



а **б**

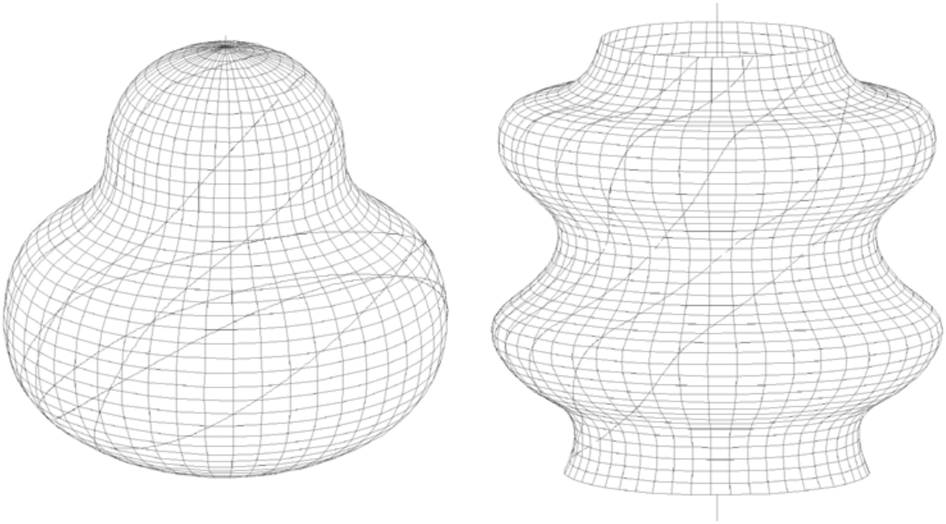
Рис. 7. Параболоїд обертання і геодезична лінія на ньому: *а*) умовна розгортка; *б*) аксонометрія.

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.15



а ***б***

Рис. 8. Катеноїд і геодезичні лінії на ньому: *а*) умовна розгортка; *б*) аксонометрія.



а ***б***

Рис. 10. Геодезичні на поверхнях обертання: *а*) поверхня загального вигляду; *б*) «гофрована».

Запропонований метод можна застосовувати і до більш складних поверхонь обертання. На рис. 10 представлені дві поверхні обертання загального виду. Геодезичні лінії на них побудовані запропонованим методом.

Висновки

Запропонований графо-аналітичний метод дозволяє доволі просто та точно будувати геодезичні лінії на поверхнях обертання. Його легко застосовувати для поверхонь обертання загального виду або «гофрованих».

Список використаної літератури

1. Спиридонова Н. А. Геодезические линии круговой конической оболочки и их практическое применение. *Альманах современной науки и образования*. 2008. № 12. С. 158–161.
2. Пришляк О. Диференціальна геометрія. К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2004. 68 с.
3. Кремець Я. С. Геодезичні лінії поверхонь в задачах армування оболонок та інерційного руху матеріальної точки : автореф. дис. ... канд. техн. наук. Дніпро, 2017. 25 с.

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.15

4. Nikitenko O., Kernytskyy I., Kalinin A., Kovalova G. Use of Integral Calculus for Building Developments of Undevelopable Surfaces of Revolution. *Вісник ОДАБА*. 2018. № 71. С. 17–24.
5. Норден А. П. Теория поверхностей. М.: ГИТТЛ, 1956. 260 с.

References

1. Spiridonova, N. A. (2008). Geodezicheskie linii krugovoy konicheskoy obolochki i ih prakticheskoe primenenie. *Almanah sovremennoy nauki i obrazovaniya*.12, 158–161.
2. Pryshliak, O. (2004). Dyferentsialna heometriia. K.: Vydavnycho-polihrafichnyi tsentr 'Kyivskyi universytet'.
3. Kremets, Ya. S. (2017). Heodezychni linii poverkhon v zadachakh armuvannia obolonok ta inertsiinoho rukhu materialnoi tochky: avtoref. dys. ... kand. tekhn. nauk. Dnipro.
4. Nikitenko, O., Kernytskyy, I., Kalinin, A., Kovalova, G. (2018). Use of Integral Calculus for Building Developments of Undevelopable Surfaces of Revolution. Visnyk ODABA. **71**, 17–24.
5. Norden, A. P. (1956). Teoriya poverhnostey. M.: GITTL.

Ковальова Галина Володимирівна – к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, e-mail: gkovalova@ukr.net ORCID 0000-0003-2228-2312.

Калінін Олександр Олександрович – к.т.н., доцент кафедри нарисної геометрії та інженерної графіки Одеської державної академії будівництва та архітектури, e-mail: chessking@ukr.net ORCID 0000-0002-3054-4995.

Калініна Тетяна Олександрівна – к.т.н., доцент кафедри будівельної механіки Одеської державної академії будівництва та архітектури, e-mail: kalininat384@gmail.com ORCID 0000-0002-3184-3604.

Nikitenko Oksana – assistant of Department of Civil Engineering, Faculty of Civil and Environmental Engineering, Warsaw University of Life Sciences – SGGW, e-mail: onikitenko@ukr.net ORCID 0000-0002-3546-1603.

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.15