УДК 519.876.5

О.Г. ОВСЬКИЙ
Запорізький національний університет

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАГАЛЬНОЇ ТРИВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ В ЦИЛІНДРИЧНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ ДЛЯ СИСТЕМ КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Дана стаття присвячена проблемі автоматизації аналітичних методів статичної теорії пружності на електронно-обчислювальних машинах. Практично усі тілах мають в якійсь мірі властивість пружності – здатність повертатися в початкову форму при деформаціях, викликаних зовнішніми силами. При пружній деформації її величина не залежить від передісторії і повністю визначається механічними напругами, тобто є однозначною функцією від напруг. Для більшості інженерних матеріалів цю залежність можна з хорошою точністю вважати прямо пропорційністю, яка описується законом Гука.

Основною задачею статичної теорії пружності є визначення деформацій тіла, їх змін при заданих зовнішніх силах. Системою рівнянь для розв'язання цієї задачі є три рівняння рівноваги, які замикаються рівняннями сумісності деформацій. А.І. Лур'є і В.З. Власов запропонували один із варіантів розв'язку системи рівнянь – аналітичний метод початкових функцій. В.В. Власов, Ф.А. Гохбаум вдосконалили метод початкових функцій для циліндричної системи координат. Однак в силу складності символічних перетворень метод довго не застосувався в математичному моделюванні. Тепер це стало можливим з розвитком систем комп'ютерної математики. В запропонованій статті показана можливість застосування методу початкових функцій в математичному моделюванні. Розглянуті питання побудови загального розв'язку тривимірної задачі теорії пружності методами початкових функцій В. З. Власова, В. В. Власова. Описаний процес переходу з декартових координат до циліндричних координат. Наведена осесиметрична задача для тіла обертання. Запропоновано алгоритм побудови символічного розв'язку у вигляді диференціальних операторів в системах комп'ютерної математики. Алгоритм запрограмований в системі комп'ютерної математики Maxima. Увійшов до бібліотеки підпрограм, написаних автором для розв'язання статичних задач теорії пружності в двовимірних і тривимірних постановках. Наведено приклади роботи з розробленою бібліотекою в Maxima.

Ключові слова: система комп'ютерної математики (СКМ), осесиметрична задача, циліндричні координати, символічний розв'язок.

А.Г. ОВСКИЙ
Запорожский национальный университет

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЯ ОБЩЕЙ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ ДЛЯ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Данная статья посвящена проблеме автоматизации аналитических методов статической теории упругости на электронно-вычислительных машинах. Практически все тела обладают в какой-то мере свойством упругости – способностью возвращаться в изначальную форму при деформациях, вызванных внешними силами. При упругой деформации её величина не зависит от предыстории и полностью определяется механическими напряжениями, то есть является

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.21

однозначной функцией от напряжений. Для большинства инженерных материалов эту зависимость можно с хорошей точностью считать прямой пропорциональностью, которая описывается законом Гука.

Основной задачей статической теории упругости является определение деформаций тела, их изменений при заданных внешних силах. Системой уравнений для решения этой задачи являются три уравнения равновесия, которые замыкаются уравнениями совместности деформаций. А.И. Лурье и В.З. Власов предложили один из вариантов решения системы уравнений - аналитический метод начальных функций. В.В. Власов, Ф.А. Гохбаум усовершенствовали метод начальных функций для цилиндрической системы координат. Однако в силу сложности символических преобразований метод долго не применялся в математическом моделировании. Теперь это стало возможным с развитием систем компьютерной математики. В предложенной статье показана возможность применения метода начальных функций в математическом моделировании. Рассмотрены вопросы построения общего решения трехмерной задачи теории упругости методом начальных функций В.З. Власова, В.В. Власова. Описан процесс перехода от декартовых координат к цилиндрическим. Приведена осесимметричная задача для тела вращения. Предполагается, что тело вращения, испытывающее действие внешних сил является идеально-упругим, т.е. оно полностью восстанавливает свою первоначальную форму после снятия воздействия. Предложен алгоритм построения символического решения в форме дифференциальных операторов в системах компьютерной математики. Алгоритм запрограммирован в системе компьютерной математики Maxima. Вошел в библиотеку подпрограмм, написанную автором для решения статических задач теории упругости в двумерной и трехмерной постановках. Даны примеры работы с разработанной библиотекой в Maxima.

Ключевые слова: система компьютерной математики (СКМ), осесимметричная задача, цилиндрические координаты, символическое решение.

O.G. OVSKY
Zaporozhya national university

ALGORITHM OF SOLVING THE GENERAL THREE-DIMENSIONAL TASK OF ELASTICITY THEORY IN CYLINDRICAL SYSTEM OF COORDINATES FOR COMPUTER MATHEMATICS SYSTEMS

This article is devoted to the problem of automation of analytical methods of the static theory of elasticity on electronic computers. Almost all bodies have to some extent the property of elasticity - the ability to return to their original shape during deformations caused by external forces. With elastic deformation, its value does not depend on the history and is completely determined by mechanical stresses, that is, it is an unambiguous function of stresses. For most engineering materials, this dependence can be considered with good accuracy as a direct proportionality, which is described by Hooke's law.

The main task of the static theory of elasticity is to determine the deformations of the body, their changes under given external forces. The system of equations for solving this problem is three equilibrium equations, which are closed by the equations of compatibility of deformations. A.I. Lurie and V.Z. Vlasov proposed one of the options for solving the system of equations - the analytical method of initial functions. V.V. Vlasov, F.A. Gochbaum improved the method of initial functions for a cylindrical coordinate system. However, due to the complexity of symbolic transformations, the method has not been used for a long time in

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.21

mathematical modeling. This has now become possible with the development of computer mathematics systems. The proposed article shows the possibility of using the method of initial functions in mathematical modeling. The issues of constructing a common solution to the three-dimensional problem of the theory of elasticity by the methods of the initial functions of V.S. Vlasov, V.V. Vlasov are considered. The process of transition from Cartesian coordinates to cylindrical coordinates is described. An ossymmetrical task for body rotation is presented. The algorithm of building a symbolic solution in the form of differential operators in computer mathematics systems is proposed. The algorithm is programmed in the Maxima computer mathematics system. Entered the library of routines, written by the author to solve static problems of the theory of elasticity in two-dimensional and three-dimensional productions. Examples of work with the library in Maxima are given.

Keywords: a system computer mathematics (SCM), ossymmetrical task, cylindrical coordinates, symbolic solution.

Постановка проблемы

Одной из основных целей математического моделирования задач теории упругости является получение достоверных результатов, которые позволяют анализировать поведение того или иного тела, описываемого моделью. Необходимое условие для этого – выбор наиболее точного математического описания поставленной задачи. Под математическим описанием в данной статье понимается постановка задачи, выбор метода ее решения (численный, аналитический), алгоритмизация метода. В математическом моделировании задач теории упругости чаще применяются численные методы. Их проще алгоритмизировать и автоматизировать на ЭВМ (электронно-вычислительной машине), они покрывают большой класс задач, но обладают недостатками: достоверность результатов численного метода необходимо проверять, производить анализ сходимости решения, оценивать погрешность метода; результат численного метода не обладает общностью и зависит от расчетной схемы. Поэтому в настоящее время возрастает потребность в применении аналитических методов, которые, несмотря на свой основной недостаток – сложность алгоритмизации и программирования – позволяют получать более обобщенный и достоверный результат. Основная проблема применения аналитических методов в моделировании – их узкая направленность. Зачастую они решают одну поставленную задачу теории упругости и не могут покрыть класс задач. Однако существуют исключения, есть методы, которыми возможно решать классы задач теории упругости. Одним из таких является метод начальных функций В.З. Власова, доработанный его сыном В.В. Власовым, в силу сложности математического аппарата этот метод долго не применялся на ЭВМ. Теперь это становится возможным, с развитием систем компьютерной математики. В этой статье автор занимается решением проблемы использования аналитического метода в математическом моделировании, представляет алгоритм реализации решения общей трехмерной задачи теории упругости в цилиндрических координатах. Полученное решение охватывает класс осесиметрических задач статической теории упругости, становится возможным применять ЭВМ для символических преобразований сложных выражений метода.

Анализ последних исследований и публикаций

Алгоритмизация аналитических методов – отдельное направление в компьютерных исследованиях. Достижения этого направления стали основой для создания и развития систем компьютерной математики (СКМ), которые позволяют производить символьные преобразования. Вопросами математического моделирования в СКМ занимаются ученые: В.З. Аладьев, Н.Н. Васильева, В.П. Дьяконов, Г.Б. Ефимов,

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.21

М.В. Грошева, В.В. Іванов, Д.М. Климов, В.А. Шуригин, А.В. Матросов [9]. Ученым В.А. Шуригину, А.В. Матросову удалось создать программные реализации метода начальных функций В.З. Власова, проанализировать его решение. Интересный результат получен М.Д. Коваленко, И.В. Меньшовым, А.П. Кержаевым для бесконечной полосы путем синтеза метода начальных функций и интегрального преобразования Фурье. Однако вопросам алгоритмизации вывода решения для полярной и цилиндрической системы координат в их статьях не уделено должного внимания. Что делает метод не универсальным, а ограниченным декартовой системой координат.

Цель исследования

Разработать универсальный механизм, позволяющий моделировать на ЭВМ решения задач статической теории упругости в двумерной и трехмерной постановках в любой системе координат. В данной работе предложен алгоритм для трехмерной статической задачи теории упругости в цилиндрических координатах. Вопросами статической теории упругости алгоритм не исчерпывается и в будущем может быть модифицирован под динамическую теорию.

Изложение основного материала исследования

Постановка задачи. Рассматривается тело вращения, которое находится в условиях осесимметричной деформации. На тело действует произвольная поверхностная нагрузка, требуется определить осевые, радиальные, кольцевые перемещения: z, r, θ и напряжения: σ_z, τ_{rz}, $\tau_{\theta z}$ в цилиндрической системе координат для любой точки тела.

Вводятся для упрощения работы в СКМ обозначения перемещений и напряжений по аналогии с работами [6–7]:

$$W = G\,z, U_c = G\,r, V_c = G\,\theta, Z = \sigma_z, R = \tau_{rz}, T = \tau_{\theta z}, \tag{1}$$

где G – модуль сдвига;
z – осевое перемещение;
r – радиальное перемещение;
θ – кольцевое перемещение;
σ_z, τ_{rz}, $\tau_{\theta z}$ – напряжения задачи в цилиндрических координатах.

Символическое решение задачи получается с решения работы [8] в результате перехода от начальных функций в декартовой системе координат к начальным функциям в цилиндрической системе координат [1, 3]. Соотношения для декартовых координат имеют вид:

$$\begin{cases} U = L_{UU}(z)U_0 + L_{UV}(z)V_0 + \cdots + L_{UZ}(z)Z_0; \\ V = L_{VU}(z)U_0 + L_{VV}(z)V_0 + \cdots + L_{VZ}(z)Z_0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Z = L_{ZU}(z)U_0 + L_{ZV}(z)V_0 + \cdots + L_{ZZ}(z)Z_0; \end{cases} \tag{2}$$

где $L_{UU}, L_{UV}, \ldots, L_{ZZ}$ – линейные дифференциальные операторы, которые относятся к начальным функциям $U_0(x,y), V_0(x,y), X_0(x,y), Y_0(x,y), Z_0(x,y)$.

Эти операторы зависят от переменной z и в них присутствуют производные по переменным от функций начальной плоскости при z=0 [2]. Выражения для начальных

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.21

функций в декартовой системе координат выражаются через начальные функции для цилиндрической системы координат в виде соотношений [4]:

$$\begin{cases} U_0(x,y) = U_{c0}(r)\cos\theta - V_{c0}(r)\sin\theta\,; \\ V_0(x,y) = U_{c0}(r)\sin\theta + V_{c0}(r)\cos\theta\,; \\ X_0(x,y) = R_0(r)\cos\theta - T_0(r)\sin\theta\,; \\ Y_0(x,y) = R_0(r)\sin\theta + T_0(r)\cos\theta\,. \end{cases} \tag{3}$$

И наоборот цилиндрические координаты, выраженные через декартовые имеют вид:

$$\begin{cases} U_c(r,z) = U(x,y)\cos\theta + V(x,y)\sin\theta\,; \\ V_c(r,z) = -U(x,y)\sin\theta + V(x,y)\cos\theta\,; \\ R(r,z) = X(x,y)\cos\theta + Y(x,y)\sin\theta\,; \\ T(r,z) = -X(x,y)\sin\theta + Y(x,y)\cos\theta\,. \end{cases} \tag{4}$$

Подстановка в систему (4) выражений (2), в которые вместо начальных функций $U_0(x,y)$, $V_0(x,y)$, $X_0(x,y)$, $Y_0(x,y)$, $Z_0(x,y)$ подставляются выражения (3), приводит к формированию общего решения исследуемой задачи. Преобразование символических выражений в СКМ Maxima с учетом осевой симметрии дает общее решение задачи теории упругости в цилиндрических координатах:

$$\begin{cases} U(r,z) = L_{UU}(z)U_0(r) + L_{UW}(z)W_0(r) + L_{UZ}(z)Z_0(r) + L_{UR}(z)R_0(r), \\ W(r,z) = L_{WU}(z)U_0(r) + L_{WW}(z)W_0(r) + L_{WZ}(z)Z_0(r) + L_{WR}(z)R_0(r), \\ Z(r,z) = L_{ZU}(z)U_0(r) + L_{ZW}(z)W_0(r) + L_{ZZ}(z)Z_0(r) + L_{ZR}(z)R_0(r), \\ R(r,z) = L_{RU}(z)U_0(r) + L_{RW}(z)W_0(r) + L_{RZ}(z)Z_0(r) + L_{RR}(z)R_0(r), \\ \sigma_r(r,z) = A_U(z)U_0(r) + A_W(z)W_0(r) + A_z(z)Z_0(r) + A_R(z)R_0(r), \\ \sigma_\theta(r,z) = B_U(z)U_0(r) + B_W(z)W_0(r) + B_z(z)Z_0(r) + B_R(z)R_0(r), \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} V(r,z) = L_{VV}(z)V_0(r) + L_{VT}(z)T_0(r), \\ S(r,z) = L_{TV}(z)V_0(r) + L_{TT}(z)T_0(r), \\ \tau_{r\theta}(r,z) = C_V(z)V_0(r) + C_T(z)T_0(r), \end{cases} \tag{6}$$

здесь $U_0(r)$, $V_0(r)$, $W_0(r)$, $Z_0(r)$, $T_0(r)$, $R_0(r)$ – начальные функции осесимметричной задачи.

Для упрощения и наглядности результата индекс c в формулах (5) и (6) для перемещений в цилиндрических координатах опущен. Линейные дифференциальные операторы выделяются из полученного в системе решения [9]. Алгоритмизация преобразования осуществляется за правилами работы [6]. Однако для осесимметричной задачи процесс автоматизации вывода усложняется, вводятся обозначения упрощающей символики:

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{d}{dr}\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)},$$

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\frac{d}{dr}},$$

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.21

$$\rho = \frac{d}{dr}.$$

Весь процесс осуществляет система за правилами символических преобразований, после чего выделяются операторы в машинном виде рис.1.

$$Luu = \frac{gamma1z\sin(gamma1z)}{2(\nu-1)} + \frac{\nu\cos(gamma1z)}{\nu-1} - \frac{\cos(gamma1z)}{\nu-1}$$

$$Luw = -\frac{\nu ro\sin(z\gamma)}{(\nu-1)\gamma} + \frac{ro\sin(z\gamma)}{2(\nu-1)\gamma} + \frac{roz\cos(z\gamma)}{2(\nu-1)}$$

$$Luz = \frac{roz\sin(z\gamma)}{4(\nu-1)\gamma}$$

$$Lur = \frac{\nu\sin(gamma1z)}{gamma1(\nu-1)} - \frac{3\sin(gamma1z)}{4gamma1(\nu-1)} - \frac{z\cos(gamma1z)}{4(\nu-1)}$$

$$Lwu = \frac{\nu ro\sin(gamma1z)}{gamma1(\nu-1)} - \frac{ro\sin(gamma1z)}{2gamma1(\nu-1)} + \frac{\nu\sin(gamma1z)}{gamma1(\nu-1)r} - \frac{\sin(gamma1z)}{2gamma1(\nu-1)r} + \frac{roz\cos(gamma1z)}{2(\nu-1)} + \frac{z\cos(gamma1z)}{2(\nu-1)r}$$

$$Lww = -\frac{z\gamma\sin(z\gamma)}{2(\nu-1)} + \frac{\nu\cos(z\gamma)}{\nu-1} - \frac{\cos(z\gamma)}{\nu-1}$$

$$Lwz = \frac{\nu\sin(z\gamma)}{(\nu-1)\gamma} - \frac{3\sin(z\gamma)}{4(\nu-1)\gamma} + \frac{z\cos(z\gamma)}{4(\nu-1)}$$

$$Lwr = \frac{roz\sin(gamma1z)}{4gamma1(\nu-1)} + \frac{z\sin(gamma1z)}{4gamma1(\nu-1)r}$$

$$Lzu = -\frac{gamma1roz\sin(gamma1z)}{\nu-1} - \frac{gamma1z\sin(gamma1z)}{(\nu-1)r}$$

$$Lzw = \frac{\gamma\sin(z\gamma)}{\nu-1} - \frac{z\gamma^2\cos(z\gamma)}{\nu-1}$$

$$Lzz = -\frac{z\gamma\sin(z\gamma)}{2(\nu-1)} + \frac{\nu\cos(z\gamma)}{\nu-1} - \frac{\cos(z\gamma)}{\nu-1}$$

$$Lzr = -\frac{\nu ro\sin(gamma1z)}{gamma1(\nu-1)} + \frac{ro\sin(gamma1z)}{2gamma1(\nu-1)} - \frac{\nu\sin(gamma1z)}{gamma1(\nu-1)r} + \frac{\sin(gamma1z)}{2gamma1(\nu-1)r} + \\ + \frac{roz\cos(gamma1z)}{2(\nu-1)} + \frac{z\cos(gamma1z)}{2(\nu-1)r}$$

$$Lru = \frac{gamma1\sin(gamma1z)}{\nu-1} + \frac{gamma1^2z\cos(gamma1z)}{\nu-1}$$

$$Lrw = -\frac{roz\gamma\sin(z\gamma)}{\nu-1}$$

$$Lrz = \frac{\nu ro\sin(z\gamma)}{(\nu-1)\gamma} - \frac{ro\sin(z\gamma)}{2(\nu-1)\gamma} + \frac{roz\cos(z\gamma)}{2(\nu-1)}$$

$$Lrr = \frac{gamma1z\sin(gamma1z)}{2(\nu-1)} + \frac{\nu\cos(gamma1z)}{\nu-1} - \frac{\cos(gamma1z)}{\nu-1}$$

$$Au = \frac{2\left(ro + \frac{\nu}{r}\right)\cos(gamma1z) - gamma1roz\sin(gamma1z)}{1-\nu}$$

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.21

$$Aw = \frac{\frac{\left(ro^2 + \frac{2\nu ro}{r}\right)\sin(z\gamma)}{\gamma} + ro^2 z\cos(z\gamma)}{\nu - 1}$$

$$Az = \frac{\frac{ro^2 z\sin(z\gamma)}{\gamma} - 2\nu\cos(z\gamma)}{2(\nu - 1)}$$

$$Ar = \frac{\frac{\left((2\nu - 3)ro + \frac{2\nu}{r}\right)\sin(gamma1z)}{gamma1} - roz\cos(gamma1z)}{2(\nu - 1)}$$

$$Bu = \frac{2\left(\nu ro + \frac{1}{r}\right)\cos(gamma1z) - \frac{gamma1z\sin(gamma1z)}{r}}{1 - \nu}$$

$$Bw = \frac{\frac{\left(2\nu ro^2 + \frac{ro}{r}\right)\sin(z\gamma)}{\gamma} + \frac{roz\cos(z\gamma)}{r}}{\nu - 1}$$

$$Bz = -\frac{\frac{roz\sin(z\gamma)}{r\gamma} - 2\nu\cos(z\gamma)}{2(\nu - 1)}$$

$$Br = \frac{\frac{\left(\frac{2\nu - 3}{r} - 2\nu ro\right)\sin(gamma1z)}{gamma1} + \frac{z\cos(gamma1z)}{r}}{2(\nu - 1)}$$

$$Lvv = \cos(gamma1z)$$

$$Lvt = \frac{\sin(gamma1z)}{gamma1}$$

$$Ltv = -\,gamma1\sin(gamma1z)$$

$$Ltt = \cos(zgamma1)$$

$$Cv = \left(ro - \frac{1}{r}\right)\cos(gamma1z)$$

$$Ct = \frac{\left(ro - \frac{1}{r}\right)\sin(gamma1z)}{gamma1}$$

Рис. 1. Линейные дифференциальные операторы решения осесимметричной задачи в цилиндрических координатах.

Необходимо подчеркнуть, что решение на рис. 1 содержит в себе тригонометрические функции, которые разлагаются в ряды Маклорена. В рядах содержатся производные высокого порядка от начальных функций. В каждой конкретной задаче теории упругости для получения решения необходимо задать начальные функции и решить систему дифференциальных уравнений, используя методы, изложенные в [5]. Если решения не удается получить в аналитическом виде, иногда прибегают к численным решениям именно дифференциальных уравнений и их систем. В таких случаях строится аналитико-численное решение, но это лишь в случаях, если в аналитическом виде решение получить невозможно для конкретной задачи [9].

Для того, чтобы получить общее решение необходимо вызвать библиотеку подпрограмм в СКМ Maxiama. Задать систему координат и получить операторы решения можно, используя следующий код.

```
load(vlas)$
operators(D3, cylindric)$
```

После выполнения кода решение становится доступным в СКМ в переменных $L_{uu}, L_{uv}, L_{uw}, \ldots, L_{rr}, A_u, \ldots A_r, B_u, \ldots B_r, C_v, C_t$.

Осесимметричная задача состоит из двух независимых задач. Формулы (5) являются формулами симметричного состояния, (которое относится к случаю симметричной деформации тела вращения), деформация происходит в плоскости, когда θ = const. А формулы (6) задают обратную симметричную задачу для тела вращения: деформация из плоскости θ = const, осуществляет кручение тела вращения.

Выводы

В работе предложен алгоритм вывода решения общей осесимметричной задачи теории упругости в цилиндрических координатах. Он запрограммирован в СКМ Maxima и дополняет ее функционал. Становится возможным решать в СКМ Maxima осесиметрические задачи теории упругости. Однако одной Maxima применение алгоритма не исчерпывается. Возможно его применение в любой СКМ. Например, автором также создана реализация алгоритма в СКМ Maple [6–7].

К недостаткам алгоритма следует отнести сложность его реализации. Достоинствами алгоритма являются его достоверность и общность символического решения. Решение на ЭВМ совпадает с решением теории В.В. Власова [3]. Таким образом, становится возможным полностью использовать аналитический метод начальных функций Лурье-Власова на ЭВМ.

Список использованной литературы

1. Власов В. З. Избранные труды. Том 1. Очерк научной деятельности «Общая теория оболочек». Статьи. Москва: Издательство АН СССР, 1962. 528 с.
2. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки плиты и оболочки на упругом основании. Москва: ФИЗМАТГИЗ, 1960. 491 с.
3. Власов В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики. Москва: Стройиздат, 1975. 223 с.
4. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. Москва: изд. МГУ, 1968. 512 с.
5. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. Москва: Наука, 1980. 230 с.
6. Галан Е. Е., Овский А. Г., Толок В. А. Использование системы Maple при реализации метода начальных функций Власова. *Вісник Запорізького національного університету. Серія: Фізико-математичні науки*. 2008. №1. С. 16–26.
7. Овский А. Г., Толок В. А. Моделирование схемы решения трехмерной задачи теории упругости в системе Maple. *Гідроакустичний журнал*. 2008. № 3. С. 88–97.
8. Овский А. Г., Толок В. А. Препроцессор решения статических двумерных и трехмерных задач теории упругости. *Информационные технологии моделирования и управления*. 2014. № 1(85). С. 47–58.
9. Овський О. Г., Леонтьєва В. В., Кондрат'єва Н. О. Математичне моделювання деформування тришарової пластини на пружній основі. *Вісник Запорізького національного університету. Серія: Фізико-математичні науки*. 2016. № 2. С. 192–201.

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.21

References

1. Vlasov, V. Z. (1962). Chosen works. Volume I. Essay of Scientific Activity «General Theory of Covers». Articles. Moscow: Academy of Sciences of the USSR Publishing House.
2. Vlasov, V. Z., & Leontev, N. N. (1960). Beams of a Plate and a Cover on the Elastic Foundation. Moscow: PHYSMATGIZ.
3. Vlasov, V. V. A (1975). Method of Initial Functions in Problems of the Elasticity's Theory and Construction Mechanics. Moscow: Stroyizdat.
4. Bezukhov, N. I. (1968). Bases of the Theory of Elasticity, Plasticity and Creep. Moscow: Publishing House of MSU.
5. Tikhonov, A. N., Vasilyeva, A. B., & Sveshnikov, A. G. (1980). Differential Equations. Moscow: Science, 1980.
6. Galan E. E., Ovsky, A. G., & Tolok, V. A. (2008). A. Use of System Maple at Realization of a Vlasov Method of Initial Functions. *Bulletin of Zaporizhzhia National University*. *Series: Physical and Mathematical Sciences*. **1**,16–26.
7. Ovsky, A. G., & Tolok, V. A. (2008). Modelling of the Scheme for a Solution of a Three-Dimensional Problem of the Theory of Elasticity in System. *Hydroacoustic Journal*. **3**, 88–97.
8. Ovsky, A. G., & Tolok, V. A. (2014). Preprocessor of the Solution of Static Two-Dimensional and three-dimensional Problems of the Elasticity's Theory. *Information Technologies of Modeling and Management*. **1**(85), 47–58.
9. Ovsky, O. G., Leontieva, V. V., & Kondratyeva, N. O. (2016). Mathematical modeling of deformation of three-layer plate on elastic basis. *Bulletin of Zaporizhzhia National University*. *Series: Physical and Mathematical Sciences*. **2**, 192–201.

Овський Олександр Геннадійович – здобувач кафедри математичного моделювання Запорізького національного університету, e-mail: masterguyver@gmail.com, ORCID: 0000-0002-5713-1939.

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.21