

УДК 004.942: 519.6

Л. В. ХАЛАНЧУК
Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного
С. В. ЧОПОРОВ
Запорізький національний університет

РОЗРОБКА МЕТОДУ ПОБУДОВИ НЕРІВНОМІРНИХ СІТОК НА БАЗІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПУАССОНА

Математичне моделювання реальних процесів у конструкціях, що складаються з досить великої кількості компонентів і зв'язків між ними, має певні труднощі. Це пов'язано зі складністю геометричної форми відповідних областей. Розроблено методи генерації дискретних моделей геометричних об'єктів, скінченні елементи яких згущуються в місцях концентрації напруг і в місцях з особливою формою конструкції. Ця задача є актуальною, наприклад, для дослідження міцності та витривалості інженерних конструкцій. Розроблено математичний апарат для побудови нерівномірних структурованих дискретних моделей (сіток) диференціальними методами з заданими параметрами згущення і гарантією якості моделі. Для криволінійної розрахункової області при побудові сітки використано перетворення координат, що дозволяє криволінійну фізичну область перевести до прямокутної розрахункової області. Перетворення від фізичної області до розрахункової було отримано диференціальним методом шляхом розв'язання рівняння Пуассона. Розглянуто вплив параметрів контрольних функцій, за допомогою яких можна виконати згущення до прямих ліній (вертикальних і горизонтальних), на якість сітки, а саме її ортогональність (кути комірок сітки повинні бути близькими до прямих). Визначено значення максимального кута кожного елемента нерівномірних структурованих дискретних моделей. Проведено візуалізацію дослідження ортогональності за допомогою розфарбовування елементів дискретної моделі в градаціях сірого кольору відповідно до зміни значення максимального кута кожного елемента сітки. Емпіричним методом встановлено залежність між значеннями змінних розрахункової та фізичної областей. Генерація нерівномірних структурованих дискретних моделей еліптичним методом і візуалізація отриманих даних під час дослідження були виконані за допомогою вільно розповсюджуваного пакету програм Scilab.

Ключові слова: нерівномірні структуровані дискретні моделі; згущення сітки; параметри контрольних функцій; ортогональність сітки; рівняння Пуассона.

Л. В. ХАЛАНЧУК
Таврический государственный агротехнологический университет имени Дмитрия Моторного
С. В. ЧОПОРОВ
Запорожский национальный университет

РАЗРАБОТКА МЕТОДА ПОСТРОЕНИЯ НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТОК НА БАЗЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

Математическое моделирование реальных процессов в конструкциях, состоящих из достаточно большого количества компонентов и связей между ними, имеет определенные трудности. Это связано со сложностью геометрической формы соответствующих областей. Разработаны методы генерации дискретных моделей геометрических объектов, конечные элементы которых сгущаются в местах концентрации напряжений и в местах с особой формой конструкции. Эта задача

является актуальной, например, для исследования прочности и выносливости инженерных конструкций. Разработан математический аппарат для построения неравномерных структурированных дискретных моделей (сеток) дифференциальными методами с заданными параметрами сгущения и гарантией качества модели. Для криволинейной расчетной области при построении сетки использовано преобразование координат, которое позволяет криволинейную физическую область перевести в прямоугольную расчетную область. Преобразование от физической области к расчетной было получено дифференциальным методом путем решения уравнения Пуассона. Рассмотрено влияние параметров контрольных функций, с помощью которых можно выполнить сгущение к прямым линиям (вертикальным и горизонтальным), на качество сетки, а именно ее ортогональность (углы ячеек сетки должны быть близкими к прямым). Определены значения максимального угла каждого элемента неравномерных структурированных дискретных моделей. Проведено визуализацию исследования ортогональности с помощью раскрашивания элементов дискретной модели в градациях серого цвета в соответствии с изменением значения максимального угла каждого элемента сетки. Эмпирическим методом установлена зависимость между значениями переменных расчетной и физической областей. Генерация неравномерных структурированных дискретных моделей эллиптическим методом и визуализация полученных данных в ходе исследования были выполнены с помощью свободно распространяемого пакета программ Scilab.

Ключевые слова: неравномерные структурированные дискретные модели; сгущение сетки; параметры контрольных функций; ортогональность сетки; уравнение Пуассона.

L. V. KHALANCHUK

Dmytro Motorny Tavria State Agrotechnological University

S. V. CHOPOROV

Zaporizhzhia National University

DEVELOPMENT OF A METHOD FOR CONSTRUCTING IRREGULAR MESHES BASED ON THE DIFFERENTIAL POISSON EQUATION

Mathematical modeling of real processes in structures consisting of a large number of components and connections between them has certain difficulties. This is due to the complexity of the geometric shape of the respective areas. Methods for generating discrete models of geometric objects, the finite elements of which are condensed in places of stress concentration and in places with a special shape of the structure, have been developed. This is an urgent task, for example, to study the strength and durability of engineering structures. The mathematical device for construction of non-uniform structured discrete models (grids) by differential methods with the set parameters of condensation and a guarantee of quality of model is developed. Coordinate transformation was used for the curvilinear computational domain when constructing the grid, which allows the curvilinear physical domain to be translated into a rectangular computational domain. The transformation from the physical domain to the calculated one was obtained by the differential method by solving the Poisson equation. The influence of parameters of control functions, by means of which it is possible to perform thickening to straight lines (vertical and horizontal), on grid quality, namely its orthogonality (grid cell angles should be close to straight lines) is considered. The value of the maximum angle of each element of non-uniform structured discrete models is determined. Visualization of orthogonality research is carried out by means of coloring of elements of discrete model in gradations of gray color according to change of value of the maximum angle of each element of a grid. An empirical method has established the relationship between

the values of the variables of the computational and physical areas. The generation of non-uniform structured discrete models by the elliptical method and the visualization of the data obtained during the study were performed using a freely distributable software package Scilab.

Keywords: non-uniform structured discrete models; mesh thickening; parameters of control functions; mesh orthogonality; Poisson equation.

Постановка проблеми

На сучасному етапі в інженерії актуальними є дослідження із застосуванням комп'ютерного моделювання реальних процесів. Математичне моделювання процесів у конструкціях, що складаються з досить великої кількості компонентів і зв'язків між ними, має певні труднощі, які пов'язані зі складністю геометричної форми відповідних областей. Дискретною моделлю геометричного об'єкту (сіткою) називають множину точок, що розподілені в досліджуваній області, разом зі зв'язками між цими точками (вузлами). Дискретна модель геометричного об'єкта замінює вихідну неперервну область скінченною множиною простих фігур [1]. Загалом на практиці зустрічається математичне моделювання на базі нерівномірних сіток, в яких відбувається згущення елементів дискретної моделі у «особливих» місцях об'єкта (наприклад, гострі кути, тріщини, отвори тощо). При цьому важливою вимогою є гладкість сітки, що забезпечується використанням диференціального рівняння Пуассона при комп'ютерному моделюванні процесу. Розробка методів генерації дискретних моделей, скінченні елементи яких згущуються в місцях концентрації напружень і в місцях з особливою формою конструкції, є актуальною задачею, наприклад, для віртуального дослідження міцності та витривалості інженерних конструкцій, що є важливою складовою сучасного проектування техніки.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Огляд актуальних підходів і методів автоматичної генерації структурованих сіток (дискретних моделей геометричних об'єктів) наведено в роботі [2].

Згущення вузлів сіток по координатним лініям сітки (вертикальним і горизонтальним) та до певного вузла за допомогою диференціального методу розглянуто в працях [3–4]. Вплив контрольних функцій і форми границі області на розподіл вузлів сітки, що генерується еліптичним методом через розв'язання рівняння Бельтрамі, досліджено в роботах [5–6].

Дослідження згущення вузлів сітки через контрольні функції, що задавали області діагональних ліній, круга, синусоїди за допомогою рівняння Ейлера, що застосовується в задачах газової динаміки, показано в статті [7].

Дослідження контрольних функцій, що визначають розповсюдження джерел на межі кризь задану область, розглянуто в праці [8].

Генерація близьких до ортогональних сіток без зміни розподілу розміру комірки вихідних сіток методом деформування сітки на основі якісно виконаних деформацій, а також вплив контрольних функцій на ортогональність сітки розглянуто в роботі [9].

Застосування контрольних функцій як фільтра згущення сітки використовується для глобальних кліматичних моделей в статті [10].

Мета дослідження

Метою даного дослідження є розробка математичного апарату для побудови нерівномірних структурованих дискретних моделей (сіток) диференціальними методами з заданими параметрами згущення і гарантією якості моделі.

Викладення основного матеріалу дослідження

Для криволінійної розрахункової області при побудові сітки використовують перетворення координат, що дозволяє криволінійну фізичну область у системі координат (x, y) перевести до прямокутної розрахункової області в системі (ξ, η) . Зв'язок між фізичною та розрахунковою областями визначається залежностями:

$$x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta). \quad (1)$$

Для будь-яких класів сіток перетворення від фізичної області до розрахункової може бути отримано диференціальним методом, тобто шляхом розв'язання рівнянь в частинних похідних. Найбільш загальним рівнянням у частинних похідних, що використовується для побудови сіток, є рівняння Пуассона [1], що в розрахунковій області системи координат (ξ, η) отримує вигляд

$$\begin{cases} g_{22} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2g_{12} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + g_{11} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + g \left(P \frac{\partial x}{\partial \xi} + Q \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) = 0, \\ g_{22} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2g_{12} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + g_{11} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} + g \left(P \frac{\partial y}{\partial \xi} + Q \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

де

$$g_{11} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2, g_{12} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}, g_{22} = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2, g = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2. \quad (3)$$

У загальному випадку рівняння (2) є нелінійними, тому розв'язуються чисельно, використовуючи, наприклад, різницеві схеми.

Розглянемо кілька прикладів згущення вузлів сіток. Щоб виконати згущення вузлів до певної координатної лінії, можна використати контрольні функції, що можуть бути задані формулами:

$$P(\xi, \eta) = -\sum_{n=1}^N a_n \frac{(\xi - \xi_n)}{|\xi - \xi_n|} e^{-c_n |\xi - \xi_n|}, \quad (4)$$

$$Q(\xi, \eta) = -\sum_{n=1}^N a_n \frac{(\eta - \eta_n)}{|\eta - \eta_n|} e^{-c_n |\eta - \eta_n|}, \quad (5)$$

де N – кількість ліній (координатних ліній $\xi = \xi_n$ та $\eta = \eta_n$), біля яких сітка повинна згущуватися, а коефіцієнти a_n, c_n – додатні параметри.

Функція (4) приводить до суміщення ліній $\xi = \text{const}$ до лінії $\xi = \xi_n$, а функція (5) приводить до суміщення ліній $\eta = \text{const}$ до лінії $\eta = \eta_n$.

Розглянемо вплив параметрів контрольних функцій на якість сітки. Одним із показників якості сітки є її ортогональність (кути комірок сітки повинні бути близькими до прямих). Зазначимо, що еліптичні методи забезпечують ортогональність ліній сітки [1, 2].

Визначимо значення максимального кута кожного елемента сітки і проведемо візуалізацію за допомогою розфарбовування елементів в градаціях сірого кольору відповідно до зміни значення максимального кута. Відповідно до різних значень коефіцієнтів a_n, c_n будемо отримувати різні варіанти згущення і якості сітки.

Розглянемо згущення сітки по горизонтальній лінії $y = 0.3$. Тоді контрольна функція (4) буде дорівнювати нулю, оскільки немає згущення по вертикалі. Нехай, перший коефіцієнт буде постійним $a_n = 10$, а другий коефіцієнт c_n будемо змінювати: 1) $c_n = 3$ (рис. 1 а); 2) $c_n = 5$ (рис. 1 б). У першому випадку можна помітити більшу інтенсивність згущення і меншу якість сітки: значення максимального кута відповідно

138.8° та 128.2°, тобто в другому випадку ортогональність є кращою. Отже, більше значення коефіцієнта c_n дає кращий по відношенню до ортогональності результат.

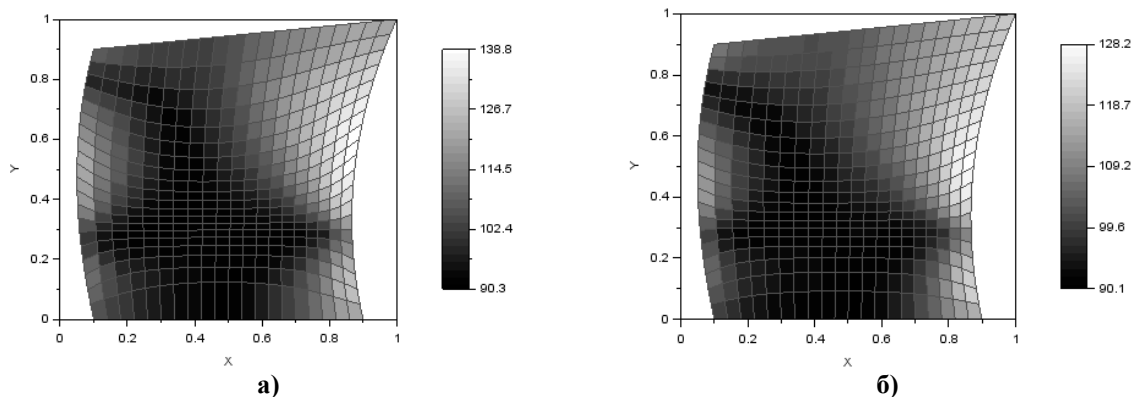


Рис. 1. Згущення сітки до горизонтальної лінії $y = 0.3$ при $\alpha_n = 10$: а) $c_n = 3$; б) $c_n = 5$.

Розглянемо згущення сітки по горизонтальній лінії $y = 0.8$ при постійному значенні другого коефіцієнта, наприклад, $c_n = 5$, а перший коефіцієнт буде приймати значення 1) $\alpha_n = 10$ (рис. 2 а); 2) $\alpha_n = 20$ (рис. 2 б). У першому випадку можна помітити меншу інтенсивність згущення і кращу якість сітки: значення максимального кута відповідно 128.6° та 144.1°, тобто в першому випадку ортогональність є кращою. Отже, менше значення коефіцієнта α_n дає кращий по відношенню до ортогональності результат.

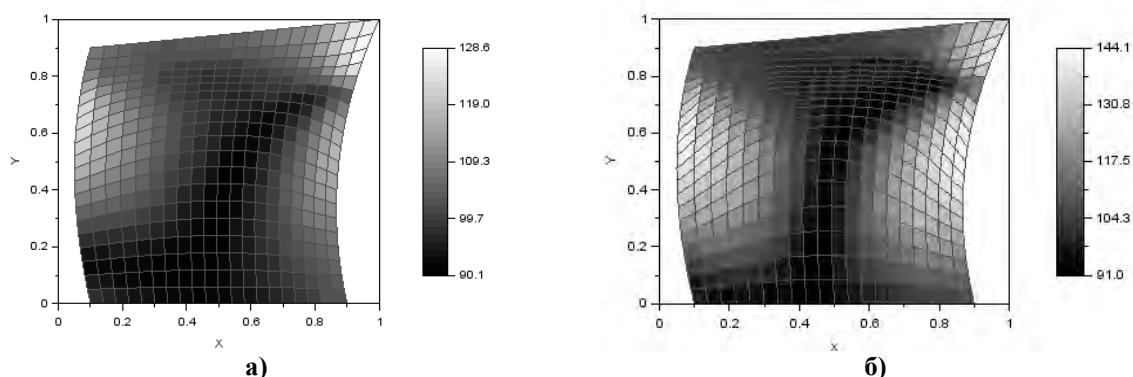


Рис. 2. Згущення сітки до горизонтальної лінії $y = 0.8$ при $c_n = 5$: а) $\alpha_n = 10$; б) $\alpha_n = 20$.

Емпіричним методом прослідкуємо залежність між значеннями змінних (ξ, η) розрахункової та (x, y) фізичної областей на прикладі згущення до горизонтальних ліній при значеннях параметрів $\alpha_n = 5, c_n = 3$ для ввігнутої фізичної області (рис. 3).

Під час емпіричного дослідження було отримано залежність між значеннями змінної η розрахункової та змінної y фізичної областей на прикладі згущення до горизонтальних ліній (табл. 1) для ввігнутої області шляхом її розтягування вгору від співвідношення вертикальних ліній 1:1 до 1:10 з кроком 0.25 та коефіцієнтом розтягу k .

Таблиця 1

Залежність між значеннями змінних розрахункової та фізичної областей

η	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
y	0.1k	0.2k	0.3k	0.4k	0.5k	0.6k	0.7k	0.8k

За даними табл. 1 можна спостерігати умовну (зважаючи на коефіцієнт k) рівність між собою значень розрахункової та фізичної областей і зробити висновок: якщо в формулі (5) покласти $\eta_n = 0.2$, то сітка буде згущуватися в фізичній області до лінії $y = 0.2$, або навпаки, якщо необхідно отримати згущення до лінії $y = 0.6$, то в формулу (5) необхідно підставити значення $\eta_n = 0.6$.

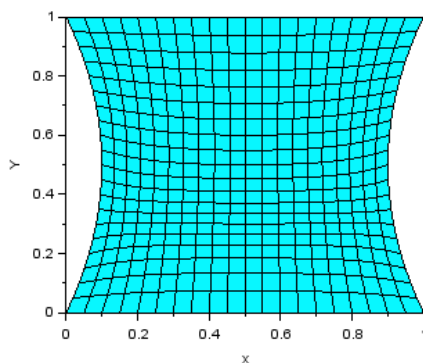


Рис. 3. Згущення сітки до горизонтальної лінії $y = 0.3$ для ввігнутої області.

Також було отримано залежність між значеннями змінної η розрахункової та змінної y фізичної областей на прикладі згущення до горизонтальних ліній (табл. 2) для ввігнутої області шляхом її розтягування праворуч від співвідношення горизонтальних ліній 1:1 до 1:10 з кроком 0.25 та коефіцієнтом розтягу k .

Таблиця 2

Залежність між значеннями змінних розрахункової та фізичної областей

Значення y	Значення η	Проміжок співвідношень між горизонтальними лініями	Кількість отриманих результатів	Відносна частота отриманих результатів
0.1	0.1	1:1 – 1:1.75	4	0.11
	0.11	1:2 – 1:10	33	0.89
0.2	0.2	1:1 – 1:5.75	17	0.46
	0.21	1:6 – 1:10	20	0.54
0.3	0.3	1:1 – 1:10	37	1
0.4	0.4	1:1 – 1:10	37	1
0.5	0.5	1:1 – 1:10	37	1
0.6	0.6	1:1 – 1:10	37	1
0.7	0.7	1:1 – 1:10	37	1
0.8	0.8	1:1 – 1:3.75	12	0.32
	0.79	1:4 – 1:10	25	0.68
0.9	0.9	1:1 – 1:1.75	4	0.11
	0.89	1:2 – 1:10	33	0.89

За даними табл. 2 можна зробити висновок, що при невеликому розтягуванні горизонтальних ліній можна спостерігати рівність значень змінної η розрахункової та змінної y фізичної областей під час згущення до горизонтальних ліній. Але існує певне значення коефіцієнта розтягу при якому відбувається зміщення горизонтальної лінії, що веде до невеликої зміни значення η розрахункової області, щоб отримати необхідне

значення центру згущення фізичної області. Наприклад, якщо значення змінних (ξ, η) розрахункової квадратної області $[0; 1] \times [0; 1]$ відповідають значенням змінних (x, y) фізичної області з криволінійними сторонами, що обмежена прямокутником $[0; 7] \times [0; 1]$, то звідси маємо коефіцієнт розтягу $k = 7$ (співвідношення 1:7). Якщо необхідно отримати згущення до лінії $y = 0.8$, то за даними табл. 2 визначасмо, що в формулу (5) необхідно підставити значення $\eta_n = 0.79$.

Емпіричним шляхом було встановлено, що на залежність між змінними у табл. 1 впливає геометрія області побудови. Якщо значення змінних (ξ, η) розрахункової квадратної області $[0; 1] \times [0; 1]$ відповідають значенням змінних (x, y) фізичної прямокутної області $[a; b] \times [c; d]$, то для визначення ліній згущення $x = x_0$ та $y = y_0$ в фізичній області через лінії $\xi = \xi_0$ та $\eta = \eta_0$ розрахункової в формулах (4)-(5) можна скористатися наступними формулами:

$$x_0 = (b - a)\xi_0 + a, \quad (6)$$

$$y_0 = (d - c)\eta_0 + c. \quad (7)$$

Якщо геометрія фізичної області не є прямокутною, а має криволінійні межі, то формули (6)-(7) можуть дати апроксимуючі значення для прогнозованих ліній згущення за умови, що задану криволінійну область можна покрити прямокутною областю $[a; b] \times [c; d]$. Варто зазначити, що значний нахил геометричної форми області впливає на відповідний нахил лінії згущення. Це стосується також опуклості та ввігнутості меж області. Наприклад, на рис. 3 фізична область покривається квадратом $[0; 1] \times [0; 1]$, тому формули (6)-(7) дають апроксимуюче значення залежності ліній згущення $x_0 = \xi_0$, проте можна побачити опуклість ліворуч фізичної області, тому в табл. 1 більшому значенню розрахункової області відповідає менше (лівіше) значення фізичної області.

Уточнення формул (6)-(7) можна провести за рахунок перерізів області (відрідкам) по необхідним напрямкам згущення $[a_i; b_i]$ або $[c_i; d_i]$, тоді отримаємо

$$x_0 = (b_i - a_i)\xi_0 + a_i, \quad (8)$$

$$y_0 = (d_i - c_i)\eta_0 + c_i. \quad (9)$$

Значення $(a_i; b_i)$ або $(c_i; d_i)$ формул (8)-(9) легко визначаються вузлами сітки на межі фізичної області та координатами точки заданого згущення. Враховуючи можливі нахили лінії згущення, краще спочатку визначитись з контрольними точками, через які буде проходити лінія згущення.

Висновки

Під час виконання роботи розроблено математичний апарат для побудови структурованих сіток диференціальним методом на прикладі рівняння Пуассона із заданими параметрами згущення контрольних функцій та гарантією якості моделі. Досліджено вплив параметрів контрольних функцій, за допомогою яких можна виконати згущення до прямих ліній, на якість побудованої сітки, а саме її ортогональність. Емпіричним методом досліджено залежність між значеннями змінних розрахункової та фізичної областей та вплив геометрії області на цю залежність.

Список використаної літератури

1. Чопоров С. В., Гоменюк С. І., Алатамнех Х. Х., Оспіщев К. С. Методи побудови дискретних моделей: структуровані та блочно-структуровані сітки. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2016. № 1. С. 272–284.
2. Халанчук Л. В., Чопоров С. В. Огляд методів генерації дискретних моделей геометричних об'єктів. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2018. №1. С. 139–152.
3. Молчанов А. М., Щербаков М. А., Янышев Д. С., Куприков М. Ю., Быков Л. В. Построение сеток в задачах авиационной и космической техники: учеб. пособие. МАИ. Москва, 2013. 260 с.
4. Rane S., Kovaevi A. Application of Numerical Grid Generation for Improved CFD Analysis of Multiphase Screw Machines. *Compressors and their Systems: 10th International Conference*. Vol. 232. (United Kingdom, City, September 11–13, 2017). London: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2017. 10 p. DOI: 10.1088/1757-899X/232/1/012017.
5. Трофимов О. В., Петрова Ю. В. Многосеточные итерационные алгоритмы построения сеток для упругих и упругопластических слоистых пакетов. *Системи та технології*. 2015. № 2 (54). С. 69–80.
6. Liseikin V. D. A Computational Differential Geometry Approach to Grid Generation. N.-Y.: Springer, 2007. 293 p.
7. Вальгер С. А., Федорова Н. Н. Применение алгоритма к адаптации расчетной сетки к решению уравнений Эйлера. *Вычислительные технологии*. 2012. Т. 17, № 3. С. 24–33.
8. Hasanzadeh K., Laurendeau E., Paraschivoiu I. Adaptive Curvature Control Grid Generation Algorithms for Complex Glaze Ice Shapes RANS Simulations. *53rd AIAA Aerospace Sciences Meeting: International Student Conference (USA, Kissimmee, January 5–9, 2015)*. Kissimmee, 2015, 10 p. DOI: 10.2514/6.2015-0914.
9. Akinlar M. A., Salako S., Liao G. A Method for Orthogonal Grid Generation. *Gen. Math. Notes*. 2011. Vol. 3. № 1. P. 55–72.
10. Surcel D., Laprise R. A General Filter for Stretched-Grid Models: Application in Cartesian Geometry. *Monthly Weather Review*. 2011. Vol. 139. P. 1637–1653.

References

1. Choporov, S. V., Gomeniuk, S. I., Alathamneh, Hk. Hk., & Ospishchev, K. S. (2016). Discrete models generation methods: structured and block-structured grids. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and Mathematical Sciences*. **1**, 272–284.
2. Khalanchuk, L. V., & Choporov, S. V. (2018). Review of discrete models of geometric objects generation methods. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and Mathematical Sciences*. **1**, 139–152.
3. Molchanov, A. M., Shcherbakov, M. A., Yanyshchev, D. S., Kuprikov, M. Yu., & Bykov, L. V. (2013). Postroenie setok v zadachah aviatsionnoi i kosmicheskoi tehniki. MAI: Moskva.
4. Rane, S., & Kovaevi, A. (2017). Application of Numerical Grid Generation for Improved CFD Analysis of Multiphase Screw Machines. *Proceedings of the Compressors and their Systems: 10th International Conference*. Vol. 232. (United Kingdom, City, September 11–13, 2017). London: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 10 p. DOI: 10.1088/1757-899X/232/1/012017.

5. Trofimov, O. V., & Petrova, Yu. V. (2015). Mnogosetochnye iteratsionnye algoritmy postroeniya setok dlia uprugih i uprugoplasticheskikh sloistyh paketov. *Systemy ta tekhnologii*. **2**, 69–80.
6. Liseikin, V. D. (2007). *A Computational Differential Geometry Approach to Grid Generation*. N.-Y.: Springer.
7. Valger, S. A., & Fedorova, N. N. (2012). Primenenie algoritma k adaptatsii raschetnoi setki k resheniu uravnenii Eilera. *Vychislitelnye tehnologii*. **17**, 3, 24–33.
8. Hasanzadeh, K., Laurendeau, E., & Paraschivoiu, I. (2015). Adaptive Curvature Control Grid Generation Algorithms for Complex Glaze Ice Shapes RANS Simulations. *Proceedings of the 53rd AIAA Aerospace Sciences Meeting: International Student Conference (USA, Kissimmee, January 5–9, 2015)*. Kissimmee, 10 p. DOI: 10.2514/6.2015-0914.
9. Akinlar, M. A., Salako, S., & Liao, G. (2011). A Method for Orthogonal Grid Generation. *Gen. Math. Notes*. **3**, 1, 55–72.
10. Surcel, D., & Laprise, R. (2011). A General Filter for Stretched-Grid Models: Application in Cartesian Geometry. *Monthly Weather Review*. **139**, 1637–1653.

Халанчук Лариса Вікторівна – асистент кафедри вищої математики і фізики Таврійського державного агротехнологічного університету імені Дмитра Моторного, аспірант кафедри програмної інженерії Запорізького національного університету, e-mail: larysa.khalanchuk@tsatu.edu.ua, ORCID: 0000-0002-6055-6233.

Чопоров Сергій Вікторович – д.т.н., доцент, професор кафедри програмної інженерії Запорізького національного університету, e-mail: s.choporoff@znu.edu.ua, ORCID: 0000-0001-5932-952X.