УДК 519.854

А.Ю. АНДРЕЙЦЕВ, Ю.Е. ВЯЛА, А.В. ГЕЙЛИК, О.В. ЛЯШКО
Державний університет інфраструктури та технологій
Т.С. КЛЕЦЬКА
Відкритий міжнародний університет розвитку людини «Україна»

УЗАГАЛЬНЕННЯ ЗАДАЧІ КОМІВОЯЖЕРА ТА АНАЛІЗ ЕФЕКТИВНОСТІ МЕТОДІВ ЇЇ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Задача комівояжера (задача про кільцевий маршрут): визначення найкоротшого шляху по замкненому маршруту досить часто виникає при розробці логістичних програм, зокрема при організації транспортних перевезень. Методи її розв'язання досить широко висвітлені в багатьох монографіях та в навчальній літературі. Однак, на практиці зустрічається ряд задач, які не можуть бути розв'язані в межах класичних підходів.

У даній роботі розглянуто два класи задач, які можуть бути зведені до класичної задачі комівояжера і запропоновані методи зведення до неї. Також проаналізовано методи розв'язання запропонованих задач.

У першому з класів задач про кільцевий маршрут розглянуто варіант, коли транспортний засіб (судно) за необхідністю має відвідати один або кілька пунктів двічі. Показано, що дана задача розпадається на дві або більше окремих задач про кільцевий маршрут і її розв'язання є сумою розв'язків відповідних класичних задач.

Другий клас задач - це задачі з пріоритетними маршрутами: маршрутами, які в силу певних причин повинні бути пройдені першими або останніми. У даному випадку вихідна задача може бути розв'язана двома способами. Перший з них полягає у виділенні пріоритетних ділянок і подальшому розв'язанні задачі про найкоротший шлях для решти непріоритетних ділянок. Другий спосіб полягає в редукції матриці перевезень за допомогою введення фіктивних часу або витрат для пріоритетних ділянок. Подальше розв'язання проводиться за класичною схемою розв'язання задачі комівояжера.

У статті також проведено порівняння трьох методів розв'язання задачі про кільцевий маршрут. Зроблено висновок про те, що при невеликій кількості пунктів найбільш ефективним є прямий комбінаторний метод. При збільшенні кількості відвідуваних пунктів ефективнішим стає метод розгалужень і меж. Зауважено, що ефективність даного методу знижується в разі наявності декількох оптимальних розв'язків. Метод розв'язання виродженої транспортної задачі, незважаючи на свою алгоритмічність, є прийнятним тільки в разі єдиності або пошуку одного з оптимальних розв'язків.

Ключові слова: задача комівояжера, задача про найкоротший шлях, пріоритетні маршрути, метод розгалужень і меж, транспортна задача.

А.Ю. АНДРЕЙЦЕВ, Ю.Э. ВЯЛА, А.В. ГЕЙЛИК, О.В. ЛЯШКО
Государственный университет инфраструктуры и технологий
Т.С. КЛЕЦКАЯ
Открытый международный университет развития человека «Украина»

ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА И АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДОВ ЕЁ РЕШЕНИЯ

Задача коммивояжера (задача о кольцевом маршруте): определения кратчайшего пути по замкнутому маршруту довольно часто возникает при разработке логистических программ, в частности при организации транспортных перевозок. Методы её решения достаточно широко освещены во многих монографиях, а также в учебной литературе. Однако, на практике встречается ряд задач, которые не могут быть решены в рамках классических подходов.

В данной работе рассмотрены два класса задач, которые могут быть сведены к классической задаче коммивояжера и предложены методы их сведения к ней. Также проанализированы методы решения данной задачи.

Первым из классов задач о кольцевом маршруте, рассмотрен вариант, когда транспортное средство (судно) с необходимостью должно посетить один или несколько пунктов дважды. Показано, что данная задача распадается на две или более отдельных задач о кольцевом маршруте и её решение является суммой решений соответствующих классических задач.

Второй класс задач – это задачи с приоритетными маршрутами: маршрутами, которые, в силу определённых причин должны быть пройдены первыми или последними. В данном случае исходная *задача может быть решена двумя способами. Первый из них состоит в выделении приоритетных участков и дальнейшем решении задачи о кратчайшем пути для оставшихся неприоритетных участков. Второй способ заключается в редуцировании матрицы перевозок при помощи введения фиктивных времени или затрат для приоритетных участков. Дальнейшее решение проводится по классической схеме решения задачи коммивояжера.*

В статье также проведено сравнение трёх методов решения задачи о кольцевом маршруте. Сделан вывод о том, что при небольшом количестве пунктов наиболее эффективным является прямой комбинаторный метод. При увеличении количества посещаемых пунктов более эффективным становится метод ветвей и границ. Показано также, что эффективность данного метода снижается в случае наличия нескольких оптимальных решений. Метод решения вырожденной транспортной задачи, несмотря на свою алгоритмичность, является приемлемым только в случае единственности или поиска одного из оптимальных решений.

Ключевые слова: задача коммивояжера, задачи о кратчайшем пути, приоритетные маршруты, метод ветвей и границ, транспортная задача.

A.Yu. ANDREYTSEV, Yu.E. VIALA, A.V. HEILYK, O.V. LIASHKO
State University of Infrastructure and Technologiies
T.S. KLETSKA
Open International University of Human Development "Ukraine"

GENERALIZATION OF THE TRAVELING SALESPERSON PROBLEM AND ANALYSIS OF THE EFFECTIVENESS OF METHODS FOR ITS SOLUTION

Traveling salesperson problem (circular route problem): determining the shortest path along a closed route quite, often arises in the development of logistics programs, in particular when organizing transportation. Methods for its solution are widely enough covered in many monographs, as well as in educational literature. However, in practice, there are a number of problems that cannot be solved within the framework of classical approaches.

In this paper, two classes of problems are considered that can be reduced to the classical traveling salesperson problem and proposes methods for their attention to it. Methods for solving this problem are also analyzed.

The first of the classes of problems on a circular route is considered a variant when a vehicle (ship) must necessarily visit one or several points twice. It is shown that this problem splits into two or more separate problems with a circular route and its solution is the sum of solutions of the corresponding classical problems.

The second class of problems is problems with priority routes: routes that, for some reason, must be passed first or last. In this case, the problem can be solved in two ways. The first of them consists in identifying priority routes and further solving the shortest-rote problem for the remaining non-priority points. The second way is to reduce the traffic matrix by introducing fictitious times or costs for priority routes. further solution is carried out according to the classical scheme for solving the traveling salesperson problem.

The paper also compares three methods for solving the circular route problem. It is concluded that with a small number of points, the direct combinatorial method is the most effective. As the number of sites visited increases, the branch-and-bound method becomes more efficient. It is also shown that the effectiveness of this method decreases in the case of the presence of several optimal solutions. The method for solving a degenerate transportation model, despite its algorithmic nature, is acceptable only in the case of uniqueness or the search for one of the optimal solutions.

Keywords: traveling salesperson problem, shortest-rote problems, priority routes, branch-and-bound method, transportation model.

Постановка проблеми

Нехай ми маємо n пунктів (наприклад, портів), усі з яких необхідно відвідати один раз і повернутись у початковий пункт. Необхідно обрати оптимальний маршрут.

Критерієм оптимальності може бути довжина маршруту, час або витрати, якщо це стосується транспортних перевезень. Дана задача отримала назву “задача комівояжера” або “задача про кільцевий маршрут”. Вона є однією із складових логістичної програми, тому її розв’язанню приділена достатня увага.

Однак на практиці часто виникають задачі споріднені з нею. Це може бути пов’язано з необхідністю відвідування деяких пунктів двічі або з пріоритетністю деяких ділянок маршрутів, що вимагає додаткових досліджень в сенсі узагальнення задачі комівояжера та аналізу ефективності методів її розв'язання.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Методи розв'язання класичної задачі комівояжера достатньо повно висвітлені як в науковій, так і в навчальній літературі [1-5]. В [6] проведено порівняльний аналіз ефективності безпосереднього комбінаторного методу та методу розгалужень і меж. В [7] наведено клас задач, що можуть бути зведені до задачі про кільцевий маршрут та запропоновано методику, згідно з якою можна звести поставлені задачі до послідовності класичних.

Мета дослідження

Метою даної роботи є узагальнення задачі комівояжера за рахунок зняття обмеження на одноразове відвідування кожного пункту та можливості введення пріоритетних маршрутів. Також ставиться задача проведення порівняльного аналізу ефективності методів розв'язання задачі про кільцевий маршрут в залежності від кількості пунктів, призначених для відвідування та наявності одного або декількох оптимальних маршрутів.

Викладення основного матеріалу дослідження

Розглянемо математичну модель задачі про кільцевий маршрут у класичній постановці.

Нехай відстані між усіма пунктами відомі – c_{ij}. Зазначимо, що c_{ij} може бути час подолання відстані між i та j або витрати на даній ділянці маршруту. При цьому кожен пункт відвідується лише один раз.

Введемо альтернативні змінні: $x_{ij}=1$, якщо прямий шлях від i до j (без проміжних пунктів) входить до кільцевого маршруту, та $x_{ij}=0$, якщо ця ділянка не входить до маршруту.

Таким чином маємо обмеження:

$\sum_{i=0}^{n} x_{ij} = 1$ – з кожного пункту можемо виїхати тільки один раз;

$\sum_{j=0}^{n} x_{ij} = 1$ – в кожен пункт можна заїхати тільки один раз.

Додаткові змінні u_i:

$nx_{ij} + u_i - u_j \le n-1$ – обмеження замкнутості.

Цільова функція:

$$z = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min .$$

Для розв'язання даної задачі використовується матриця вартостей перевезень, як при розв'язанні транспортної задачі. В загальному випадку $c_{ij} \ne c_{ji}$. Це може бути пов'язано з неможливістю проходження ділянок i - j та j - i одним видом транспорту або впливом течії на час подолання взаємно протилежних ділянок для річкового транспорту. Діагональні клітини блокуємо, покладаючи $c_{ii}=\infty$, оскільки вони відповідають відстані проїзду з пункту i в нього ж і не можуть бути заповненими, тобто усі $x_{ii}=0$.

$$C=\begin{pmatrix} \infty & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \infty & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & \infty \end{pmatrix}$$

Методи розв’язання цієї задачі є досить широко відомими. Їхню ефективність у різних випадках ми оцінимо пізніше.

Спочатку розглянемо два класи споріднених задач та способи їх зведення до класичної задачі комівояжера.

Перший клас таких задач – це задачі, в яких для деяких пунктів знімається обмеження одноразового відвідування. Дана ситуація виникає тоді, коли групи пунктів відвідування пов’язані між собою лише одним можливим маршрутом і виникає необхідність відвідати деякий пункт двічі.

Розглянемо спочатку найпростіший випадок. Нехай в деякий пункт можна безпосередньо потрапити тільки з одного іншого. Тоді матриця C має вигляд:

$$C=\begin{pmatrix} \infty & c_{12} & \cdots & c_{1n} & \infty \\ c_{21} & \infty & \cdots & c_{2n} & \infty \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \infty \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & \infty & c_{n,n+1} \\ \infty & \infty & \infty & c_{n+1,n} & \infty \end{pmatrix}$$

Викреслюємо рядок та стовпчик з номером $n+1$, а до кожного елемента матриці в рядку та стовпчику n додаємо $c_{n+1,n}+c_{n,n+1}$.

Тепер, нехай матриця розпадається на дві групи пунктів, потрапляти в одну з яких з іншої можна лише через один фіксований пункт.

Як приклад, можемо розглянути круїз по Чорному та Середземному морях, який починається і закінчується в Одесі. Тоді круїзний лайнер повинен двічі пройти через Босфорську протоку.

$$C=\begin{pmatrix} \infty & c_{12} & \cdots & c_{1n} & \infty & \infty & \cdots & \infty \\ c_{21} & \infty & \cdots & c_{2n} & \infty & \infty & \cdots & \infty \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & \infty & c_{n,n+1} & c_{n,n+2} & \cdots & c_{nm} \\ \infty & \infty & \cdots & c_{n+1.n} & \infty & c_{n+1.n+2} & \cdots & c_{n+1.m} \\ \infty & \infty & \cdots & c_{n+2.n} & c_{n+2.n+1} & \infty & \cdots & c_{n+2.m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \infty & \infty & \cdots & c_{m.n} & c_{m.n+1} & c_{m.n+2} & \cdots & \infty \end{pmatrix}$$

Розв’язання цієї задачі починається з побудови оптимального маршруту в другій групі пунктів, тобто по Середземному морю, з початковим пунктом «Босфорська протока». Розв'язавши її, знаходимо оптимальний час перебування в Середземному морі, замінюємо другу підматрицю одним рядком та одним стовпчиком з відповідним часом для проходження ланки "Середземне море"-"Босфорська протока" і отримуємо задачу, розглянуту раніше.

Даний спосіб може бути узагальнений на будь-яку кількість груп пунктів, які включають в себе лише один спільний пункт. При цьому, побудова оптимального маршруту починається з останньої групи і закінчується першою.

Другий клас задач, що можуть бути зведені до задачі про кільцевий маршрут – це задачі з пріоритетними ділянками. Їхня суть полягає в тому, що деякі з ділянок повинні бути подолані в першу або останню чергу. Це може бути пов'язано з перевезенням вантажів, що швидко псуються або вантажів, які треба доставити терміново.

Для розв'язання цієї задачі можна паралельно з матрицею перевезень розглянути матрицю збитків. Потім новою матрицею перевезень обрати їх суму. Але при цьому можуть виникнути труднощі з побудовою матриці збитків, оскільки збитки залежать від часу, який пройшов до моменту включення в маршрут відповідної ділянки.

Більш простим є спосіб визначення пріоритетів. В цьому випадку ділянці з найвищим пріоритетом приписується фіктивна довжина 0. Таким чином, дана ділянка включається в маршрут першою. Далі відповідні рядок та стовпчик викреслюються і розглядається ділянка з наступним пріоритетом.

Після включення усіх пріоритетних ділянок в маршрут продовжуємо розв'язання задачі комівояжера класичними методами. Отримавши оптимальний маршрут, додаємо до його довжини (часу) реальну (а не фіктивну) довжину пріоритетних ділянок.

Якщо серед ділянок є декілька з однаковими пріоритетами, то звичайним комбінаторним методом знаходять маршрут мінімальної довжини (незамкнутий), а потім в матриці перевезень викреслюють відповідні рядки та стовпчики, вводячи фіктивні довжини відповідних ділянок, рівні нулю.

Якщо пріоритетні ділянки знаходяться не на початку чи в кінці маршруту, то чинимо так само, але при формуванні оптимального маршруту переставляємо на початок ланки, що з'єднують пункт під номером 1 з пунктом i, що відповідає початку пріоритетної ділянки

Ефективність даного підходу зменшується із збільшенням кількості пріоритетних ділянок. В цьому випадку задача з пріоритетними ділянками, після виділення пріоритетних маршрутів, зводиться до задачі про найкоротший маршрут для непріоритетних ділянок.

Перейдемо тепер до аналізу ефективності методів розв'язання задачі комівояжера. Їх можна поділити на комбінаторні та класичні методи розв'язання транспортних задач.

Першим розглянемо безпосередній комбінаторний метод (метод перебору). Оскільки кількість можливих кільцевих маршрутів дорівнює $(n-1)!$, то при невеликій кількості пунктів ми можемо обчислити довжину усіх маршрутів та обрати оптимальний чи оптимальні (якщо їх декілька). Але, хоча можливості обчислювальної техніки на даний час дозволяють виконати необхідні розрахунки досить швидко, при збільшенні n кількість можливих маршрутів швидко зростає і, відповідно, зменшується ефективність методу.

Метод розгалужень і меж дозволяє зменшити кількість можливих маршрутів в порівнянні з безпосереднім комбінаторним методом, завдяки відкиданню завідомо гірших маршрутів.

Спочатку, віднімаючи найменші c_{ij} від елементів кожного рядка матриці C, а потім від елементів кожного стовпчика (якщо це потрібно), отримуємо зведену матрицю, в кожному рядку та стовпчику якої є хоча б один нуль. Сума цих c_{ij} є нижньою границею довжини маршруту. Далі знаходимо в зведеній матриці ділянку $i-j$ довжини нуль, виключення якої з маршруту максимально збільшило б його довжину. Множина усіх маршрутів розпадається на дві: V – ті, що включають ділянку $i-j$ та W – не включають. Для подальшого розв'язання розглядаємо множину V: включаючи ділянку $i-j$ до маршруту, і викреслюємо рядок та стовпчик і повторюємо вказану процедуру, поки не отримаємо редуковану матрицю 2х2. Якщо на якомусь кроці виявиться, що довжина маршруту більше за нижню оцінку множини W, то повертаємось до відповідного кроку, покладаємо $c_{ij} = \infty$ (виключаємо ділянку $i-j$ з розгляду) і поновлюємо процедуру.

Ефективність даного методу зменшується у випадку коли задача має декілька оптимальних розв'язків.

Зазначимо також, що при наявності пріоритетних маршрутів, множина W для них не розглядається.

Крім того, ми можемо розглядати матрицю C як матрицю вартостей перевезень класичної транспортної задачі і розв'язати її, наприклад, методом потенціалів, який є досить алгоритмічним.

Але, оскільки дана задача є виродженою (включає лише n ненульових елементів), то кількість ітерацій, необхідних для отримання оптимального розв'язку, буде досить великою. Крім того, якщо задача має декілька оптимальних розв'язків, то ми можемо знайти не всі з них.

Висновки

В процесі дослідження нами розглянуто два класи задач, споріднених з задачею комівояжера. Наведено методики їх зведення до класичної задачі. Для задач з пріоритетними ділянками розглянуто альтернативні методи розв'язання.

Проведено також порівняльний аналіз ефективності методів розв'язання задачі про кільцевий маршрут. Встановлено, що у більшості випадків найбільш ефективним є безпосередній комбінаторний метод, оскільки на практиці кількість пунктів відвідування є невеликою. Оцінено також переваги та недоліки методу розгалужень і меж. Та показано, що методи розв'язання даної задачі, як класичної транспортної є неефективними, незважаючи на їх алгоритмічність та універсальність.

Список використаної літератури

1. Taha H. Operations Research: An Introduction, 10th Edition. Boston: Princeton, 2017. 848 p.
2. Томас Х. Кормен, Чарльз И. Лейзерсон, Рональд Л. Ривест, Клиффорд Штайн. Алгоритмы: построение и аналіз. 2-е изд. Москва: Вильямс, 2006. 1296 с.
3. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій. Київ: ЗАТ «ВІПОЛ», 2000. 688с.
4. Карагодова О.О., Кігель В.Р., Рожок В.Д. Дослідження операцій. Київ: Екомен, 2007. 256с.
5. Костюкова О.И. Исследование операций. Минск: БГУИР, 2003. 94с.
6. Фомин Г. П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности. Москва: Финансы и статистика, 2001. 544 с.

7. Андрейцев А.Ю., Клецька Т.С. Про розширення класу задач про кільцевий маршрут. *Збірник матеріалів міжнародної науково-практичної конференції «Дніпровські читання-2020»)*. Київ: ДУІТ. 2020. С.172–175.

References

1. Taha, H. (2017). Operations Research: An Introduction. 10th Edition. Boston: Princeton.
2. Tomas Kh. Kormen, Charlz I. Leyzerson, Ronald L. Rivest,& Klifford Shtayn. (2006) Algoritmy: postroyeniye i analiz. 2-e izd. Moskva: Viliams.
3. Zaichenko, Yu.P. (2000). Doslidzhennia operatsii. Kyiv: ZAT «VIPOL».
4. Karahodova, O.O., Kihel, V.R., & Rozhok, V.D. (2007). Doslidzhennia operatsii. Kyiv: Ekomen.
5. Kostyukova, O.I. (2003). Issledovaniye operatsiy. Minsk: BGUIR.
6. Fomin, G. P. (2001). Matematicheskie metodyi i modeli v kommercheskoy deyatelnosti. Moskva: Finansyi i statistika.
7. Andreitsev, A.Yu., & Kletska, T.S. (2020). Pro rozshyrennia klasu zadach pro kiltsevyi marshrut. *Zbirnyk materialiv mizhnarodnoi naukovo-praktychnoi konferentsii «Dniprovski chytannia-2020»)*. Kyiv: DUIT. pp.172–175.