

Міністерство освіти і науки України

Херсонський національний технічний університет

# **ПРИКЛАДНІ ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ**

## **Т. 4, № 1**

Рекомендовано до друку Вченою радою  
Херсонського національного технічного університету  
(протокол № 8 від 17 червня 2021 року)

---

Журнал включений до Реєстру наукових фахових видань України категорії Б  
на підставі Наказу МОН України від 17 березня 2020 року № 409.

Журнал включено до наукометричних баз, електронних бібліотек та репозитаріїв:  
Google Scholar, Index Copernicus International Journal Master List,  
CiteFactor Academic Scientific Journals, National Library of Ukraine (Vernadsky).

**Херсон 2021**

## Редакційна рада

### Головний редактор

Астіоненко І.О.

к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри вищої математики і математичного моделювання Херсонського національного технічного університету.

### Заступники головного редактора

Розов Ю.Г.

д.т.н., професор, заслужений діяч науки і техніки України, перший проректор Херсонського національного технічного університету.

Хомченко А.Н.

д.ф.-м.н., професор, заслужений діяч науки і техніки України, професор кафедри інтелектуальних інформаційних систем Чорноморського національного університету ім. П. Могили (м. Миколаїв).

Литвиненко О.І.

к.т.н., доцент, доцент кафедри інформаційних технологій та фіз.-мат. дисциплін Херсонської філії Національного університету кораблебудування ім. адм. Макарова.

### Відповідальний секретар

Омельчук А.А.

к.т.н., доцент кафедри інтелектуальних управляючих та обчислювальних систем Університету державної фіскальної служби України (м. Ірпінь).

## Члени редакційної колегії за спеціальностями:

### Іноземні фахівці

Бабічев С.А.

д.т.н., доцент, (Чехія)

Гучек П.Й.

д.т.н., доцент, (Польща)

## 113 – Прикладна математика

Андрейцев А.Ю.

к.ф.-м.н., доцент

Астіоненко І.О.

к.ф.-м.н., доцент

Гвоздева І.М.

д.т.н., професор

Гнатушенко Вікт.В.

д.т.н., доцент

Ляшенко В.П.

д.т.н., професор

Миргород В.Ф.

д.т.н., доцент

Різник В.В.

д.т.н., професор

Стрельнікова О.О.

д.т.н., професор

Хомченко А.Н.

д.ф.-м.н., професор

## 122 – Комп'ютерні науки

Борисенко В.Д.	д.т.н., професор
Ванін В.В.	д.т.н., професор
Вірченко Г.А.	д.т.н., професор
Гнатушенко В.В.	д.т.н., професор
Гумен О.М.	д.т.н., професор
Корчинський В.М.	д.т.н., професор
Литвиненко В.І.	д.т.н., професор
Мартин Є.В.	д.т.н., професор
Найдиш А.В.	д.т.н., професор
Несвідомін В.М.	д.т.н., професор
Пилипака С.Ф.	д.т.н., професор
Тулученко Г.Я.	д.т.н., професор
Устенко С.А.	д.т.н., професор
Шоман О.В.	д.т.н., професор

## 126 – Інформаційні системи та технології

Аль-Амморі А.Н.	д.т.н., професор
Баклан І.В.	к.т.н., доцент
Бень А.П.	к.т.н., доцент
Левикін В.М.	д.т.н., професор
Литвиненко О.І.	к.т.н., доцент
Мороз Б.І.	д.т.н., професор
Стеценко І.В.	д.т.н., професор
Шерстюк В.Г.	д.т.н., професор

## 151 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології

Алексєєв М.О.	д.т.н., професор
Бардачов Ю.М.	д.т.н., професор
Головко В.І.	д.т.н., професор
Кондратець В.О.	д.т.н., професор
Мещеряков Л.І.	д.т.н., професор
Омельчук А.А.	к.т.н.
Осадчий С.І.	д.т.н., професор
Рожков С.О.	д.т.н., професор
Рудакова Г.В.	д.т.н., професор

## Інші спеціальності

Дудченко О.М.	к.т.н., професор
Літвінова М.Б.	д.пед.н., к.ф.-м.н., професор
Мельник І.В.	д.т.н., професор
Розов Ю.Г.	д.т.н., професор

ISSN 2618-0332

Министерство образования и науки Украины

Херсонский национальный технический университет

# **ПРИКЛАДНЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

## **Т. 4, № 1**

Рекомендовано к печати Ученым советом  
Херсонского национального технического университета  
(протокол № 8 от 17 июня 2021 года)

---

Журнал включен в Реестр научных специализированных изданий Украины  
категории Б на основании Приказа МОН Украины от 17 марта 2020 года № 409.

Журнал включен в наукометрические базы, электронные библиотеки и репозитории:  
Google Scholar, Index Copernicus International Journal Master List,  
CiteFactor Academic Scientific Journals, National Library of Ukraine (Vernadsky).

**Херсон 2021**

## **Редакционный совет**

### **Главный редактор**

Астионенко И.А.

к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры высшей математики и математического моделирования Херсонского национального технического университета.

### **Заместители главного редактора**

Розов Ю.Г.

д.т.н., профессор, заслуженный деятель науки и техники Украины, первый проректор Херсонского национального технического университета.

Хомченко А.Н.

д.ф.-м.н., профессор, заслуженный деятель науки и техники Украины, профессор кафедры интеллектуальных информационных систем Черноморского национального университета им. П. Могилы (Николаев).

Литвиненко А.И.

к.т.н., доцент, доцент кафедры информационных технологий и физ.-мат. дисциплин Херсонского филиала Национального университета кораблестроения им. адм. Макарова.

### **Ответственный секретарь**

Омельчук А.А.

к.т.н., доцент кафедры интеллектуальных управляющих и вычислительных систем Университета государственной фискальной службы Украины (Ирпень).

## **Члены редакционной коллегии по специальностям:**

### **Иностранные специалисты**

Бабичев С.А.

д.т.н., доцент, (Чехия)

Гучек П.И.

д.т.н., доцент, (Польша)

### **113 – Прикладная математика**

Андрейцев А.Ю.

к.ф.-м.н., доцент

Астионенко И.А.

к.ф.-м.н., доцент

Гвоздева И.М.

д.т.н., профессор

Гнатушенко Викт.В.

д.т.н., доцент

Ляшенко В.П.

д.т.н., профессор

Миргород В.Ф.

д.т.н., доцент

Ризнык В.В.

д.т.н., профессор

Стрельникова Е.А.

д.т.н., профессор

Хомченко А.Н.

д.ф.-м.н., профессор

## 122 – Компьютерные науки

Борисенко В.Д.	д.т.н., профессор
Ванин В.В.	д.т.н., профессор
Вирченко Г.А.	д.т.н., профессор
Гнатушенко В.В.	д.т.н., профессор
Гумен Е.Н.	д.т.н., профессор
Корчинский В.М.	д.т.н., профессор
Литвиненко В.И.	д.т.н., профессор
Мартин Е.В.	д.т.н., профессор
Найдыш А.В.	д.т.н., профессор
Несвидомин В.Н.	д.т.н., профессор
Пилипака С.Ф.	д.т.н., профессор
Тулученко Г.Я.	д.т.н., профессор
Устенко С.А.	д.т.н., профессор
Шоман О.В.	д.т.н., профессор

## 126 – Информационные системы и технологии

Аль-Аммори А.Н.	д.т.н., профессор
Баклан И.В.	к.т.н., доцент
Бень А.П.	к.т.н., доцент
Левыкин В.М.	д.т.н., профессор
Литвиненко Е.И.	к.т.н., доцент
Мороз Б.И.	д.т.н., профессор
Стеценко И.В.	д.т.н., профессор
Шерстюк В.Г.	д.т.н., профессор

## 151 – Автоматизация и компьютерно-интегрированные технологии

Алексеев М.А.	д.т.н., профессор
Бардачев Ю.Н.	д.т.н., профессор
Головко В.И.	д.т.н., профессор
Кондратец В.А.	д.т.н., профессор
Мещеряков Л.И.	д.т.н., профессор
Омельчук А.А.	к.т.н.
Осадчий С.И.	д.т.н., профессор
Рожков С.А.	д.т.н., профессор
Рудакова А.В.	д.т.н., профессор

## Другие специальности

Дудченко О.Н.	к.т.н., профессор
Литвинова М.Б.	д.пед.н., к.ф.-м.н., профессор
Мельник И.В.	д.т.н., профессор
Розов Ю.Г.	д.т.н., профессор

ISSN 2618-0332

Ministry of Education and Science of Ukraine

Kherson National Technical University

# **APPLIED QUESTIONS OF MATHEMATICAL MODELLING**

## **V. 4, № 1**

Recommended for publication by the Academic Council of  
Kherson National Technical University  
(Minutes № 8 on 17th June 2021)

---

The journal is included in the Register of scientific specialized publications of Ukraine of category B on the basis of Minutes of the Ministry of Education and Science of Ukraine dated March 17, 2020 № 409.

The journal is included in the scientometric bases, electronic libraries and repositories: Google Scholar, Index Copernicus International Journal Master List, CiteFactor Academic Scientific Journals, National Library of Ukraine (Vernadsky).

**Kherson 2021**

## Editorial Board

### Editor-in-Chief

Astionenko I.O.

Ph.D., Associate Professor, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics and Mathematical Modelling of Kherson National Technical University.

### Deputies Editor-in-Chief

Rozov Yu.H.

Doctor of Engineering Science, Professor, Honored Worker of Science and Technology of Ukraine, First Vice-Rector of Kherson National Technical University.

Khomchenko A.N.

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Honored Worker of Science and Technology of Ukraine, Professor at the Department of Intelligent Information Systems of the Petro Mohyla Black Sea National University (Mykolaiv).

Litvinenko O.I.

Ph.D., Associate Professor, Associate Professor of the Department of Information Technology and Phys.-Math. disciplines of the Kherson branch of the Admiral Makarov National University of Shipbuilding.

### Executive Secretary

Omelchuk A.A.

Ph.D., Associate Professor at the Department of Intelligent Control and Computing Systems of University of State Fiscal Service of Ukraine (Irpin).

## Members of Editorial Board by specialities:

### Foreign Specialists

**Babichev S.A.**

Doctor of Engineering Science, Associate Professor, (Czech Republic)

**Guchek P.Y.**

Doctor of Engineering Science, Associate Professor, (Republic of Poland)

## 113 – Applied Mathematics

**Andreytsev A.Yu.**

Ph.D., Associate Professor

**Astionenko I.O.**

Ph.D., Associate Professor

**Hvozdeva I.M.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Hnatushenko Vikt.V.**

Doctor of Engineering Science, Associate Professor

**Liashenko V.P.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Myrhorod V.F.**

Doctor of Engineering Science, Associate Professor

**Riznyk V.V.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Strelnikova O.O.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Khomchenko A.N.**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor



## 122 – Computer Science

<b>Borysenko V.D.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Vanin V.V.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Virchenko H.A.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Hnatushenko V.V.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Humen O.M.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Korchynskyi V.M.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Lytvynenko V.I.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Martyn Ye.V.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Naidysh A.V.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Nesvidomin V.M.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Pylypaka S.F.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Tuluchenko H.Ya.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Ustenko S.A.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Shoman O.V.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor

## 126 – Information Systems and Technologies

<b>Al-Ammori A.N.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Baklan I.V.</b>	Ph.D., Associate Professor
<b>Ben A.P.</b>	Ph.D., Associate Professor
<b>Levykin V.M.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Lytvynenko O.I.</b>	Ph.D., Associate Professor
<b>Moroz B.I.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Stetsenko I.V.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Tomashevskyi V.M.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Sherstiuk V.H.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor

## 151 – Automation and Computer Integrated Technologies

<b>Aleksieiev M.O.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Bardachov Yu.M.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Holovko V.I.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Kondratets V.O.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Meshcheriakov L.I.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Omelchuk A.A.</b>	Ph.D.
<b>Osadchyi S.I.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Rozhkov S.O.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Rudakova H.V.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor

## Other Specialties

<b>Dudchenko O.N.</b>	Ph.D., Professor
<b>Litvinova M.B.</b>	Doctor of Pedagogical Sciences, Ph.D. (physics and mathematics), Professor
<b>Melnyk I.V.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Rozov Yu.H.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor

## ЗМІСТ

<b>АНДРЕЙЦЕВ А.Ю., ВЯЛА Ю.Е., ГЕЙЛИК А.В., ЛЯШКО О.В., КЛЕЦЬКА Т.С.</b> УЗАГАЛЬНЕННЯ ЗАДАЧІ КОМІВОЯЖЕРА ТА АНАЛІЗ ЕФЕКТИВНОСТІ МЕТОДІВ ЇЇ РОЗВ'ЯЗАННЯ .....	16
<b>АХМЕТШИНА Л.Г., ЄГОРОВ А.О.</b> ПОЛІПШЕННЯ ПІВТОНОВИХ ЗОБРАЖЕНЬ НА ОСНОВІ АВТОМАТИЗОВАНОЇ ОЦІНКИ ЯСКРАВOSTI НЕЧІТКИХ ФУНКЦІЙ НАЛЕЖНОСТІ .....	23
<b>БАБІЧЕВ С.А., ЯСІНСЬКА-ДАМРІ Л.М.</b> МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ РЕКОНСТРУКЦІЇ ГЕННОЇ РЕГУЛЯТОРНОЇ МЕРЕЖІ НА ОСНОВІ КОМПЛЕКСНОГО ЗАСТОСУВАННЯ ТОПОЛОГІЧНИХ ПАРАМЕТРІВ .....	32
<b>БЕРДНИК М. Г., ГУЛІНА І. Г.</b> МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ І МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗАДАЧІ НЕЙМАНА ТЕПЛООБМІНУ ПАРАБОЛОЇДА ОБЕРТАННЯ .....	42
<b>ВАКАЛ Л.П., ВАКАЛ Є.С.</b> МЕТОД КОДУВАННЯ КОНТУРІВ МУЗИЧНИМ ЗВУКОМ .....	50
<b>ВОРОНЦОВ О.В., ВОРОНЦОВА І.В.</b> ЗАКОНОМІРНОСТІ ЗМІНИ ВЕЛИЧИН КОЕФІЦІЄНТІВ СУПЕРПОЗИЦІЇ У ПРОЦЕСІ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ГІПЕРБОЛІЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ .....	59
<b>ГАЛЬЧЕНКО В.Я., ТРЕМБОВЕЦЬКА Р.В., ТИЧКОВ В.В.</b> ТЕХНІКИ СТВОРЕННЯ СУРОГАТНИХ МОДЕЛЕЙ ВИХРОСТРУМОВИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ В ГІПЕРПРОСТОРІ ЗАСОБАМИ АДИТИВНОЇ НЕЙРОМЕРЕЖЕВОЇ АПРОКСИМАЦІЇ .....	67
<b>ГНАТУШЕНКО В.В., ДОРОШ Н.Л., ФЕНЕНКО Т.М.</b> РОЗПІЗНАВАННЯ ЗОБРАЖЕНЬ НАБОРУ FASHION MNIST МЕТОДАМИ ГЛИБОКОГО НАВЧАННЯ .....	78
<b>ДАНИК В.В., КОЛЕБАНОВ О.К., ЛЕБЕДЕНКО Ю.О.</b> ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ СУДНОВИМИ КОМБІНОВАНИМИ ПРОПУЛЬСИВНИМИ КОМПЛЕКСАМИ .....	86
<b>ДОЩЕНКО Г.Г.</b> МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ЕФЕКТИВНОСТІ СТАБІЛІЗАЦІЇ ПАРАМЕТРІВ ГДГА .....	96
<b>КАГАДІЙ Т.С., ШПОРТА А.Г., БІЛОВА О.В., ЩЕРБИНА І.В.</b> МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ЗАДАЧАХ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ .....	103
<b>КОЛЕБАНОВ О.К., СЕЛІВЕРСТОВА С.Р.</b> МОДЕЛЮВАННЯ СХЕМИ СУДНОВОЇ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЧНОЇ СИСТЕМИ НА СУДАХ З ЕЛЕКТРОРУХОМ .....	111
<b>КОМЯК В.М., КЯЗИМОВ К.Т.</b> МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ ГРУП ЛЮДЕЙ ПРИ ЕВАКУАЦІЇ З БУДІВЕЛЬ .....	119
<b>МАЗМАНІШВІЛІ О.С., РЕШЕТНЯК М.Г.</b> МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАЛЬНИХ І ПОВОРОТНИХ ТРАЄКТОРІЙ ЕЛЕКТРОНІВ В ГРАДІЄНТНОМУ МАГНІТНОМУ ПОЛІ МАГНЕТРОННОЇ ГАРМАТИ .....	129
<b>МАЗМАНІШВІЛІ О.С.</b> РОЗПОДІЛ ЙМОВІРНОСТЕЙ ФУНКЦІОНАЛУ-ЗГОРТКИ РЕГУЛЯРНОГО СИГНАЛУ І НОРМАЛЬНОГО МАРКІВСЬКОГО ШУМУ .....	138
<b>МЕЛЬНИК І.В., ТУГАЙ С.Б., КИРИК В.О., КОВАЛЬЧУК Д.В.</b> ТЕОРЕТИЧНЕ ОЦІНЮВАННЯ РОБОЧОГО ТИСКУ ГАРМАТ ВИСОКОВОЛЬТНОГО ТЛЮЧОГО РОЗРЯДУ ДЛЯ ВИКОРИСТАННЯ В ЕЛЕКТРОННО-ПРОМЕНЕВІЙ ТЕХНОЛОГІЇ ЗВАРЮВАННЯ МЕТАЛЕВИХ ВИРОБІВ .....	147
<b>МИРОНЕНКО М.Л.</b> ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ПАЛИВНИХ БАКІВ ПРИ РІЗНИХ УМОВАХ ЕКСПЛУАТАЦІЇ .....	161

<b>НІЦІН О.Ю.</b> ЗВ'ЯЗОК ГРУПИ СИМЕТРІЇ ОРНАМЕНТУ НА ЕСКІЗИ М. К. ЕШЕРА «МОРСЬКІ КОНИКИ» З РУХАМИ ПЛОЩИНИ, ЩО ОПИСУЮТЬ ПОБУДОВУ ЙОГО ФІГУРНОЇ ПЛИТКИ.....	170
<b>ПЕРШИНА Ю.І., ПАСІЧНИК В.О.</b> ВІДНОВЛЕННЯ ВНУТРІШНЬОЇ СТРУКТУРИ ДИНАМІЧНОГО ТРИВИМІРНОГО ТІЛА З ВИКОРИСТАННЯМ МІШАНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ ...	178
<b>ПЕТРИК Б. В., ДУБРОВІН В. І.</b> ВІЯВЛЕННЯ АТАК ТИПУ DOS В МЕРЕЖЕВОМУ ТРАФІКУ ЗА ДОПОМОГОЮ ВЕЙВЛЕТ-ПЕРЕТВОРЕННЯ.....	186
<b>ПРОКОФ'ЄВ Т.А., ІВАНЧЕНКО О.В., ГНАТУШЕНКО В.В.</b> АНАЛІТИЧНИЙ І СИНТЕТИЧНИЙ ПІДХІД У ПОБУДОВІ МОДЕЛІ СИСТЕМИ ВИПРОМІНЮВАЛЬНИХ ЦЕНТРІВ МОНОКРИСТАЛІЧНИХ З'ЄДНАНЬ З ШИРОКИМ СПЕКТРОМ ЛЮМІНЕСЦЕНЦІЇ .....	197
<b>СЄЛІВЕРСТОВА С.Р., КОЛЕБАНОВ О.К.</b> МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМИ РОЗПОДІЛУ АКТИВНОЇ ПОТУЖНОСТІ МІЖ СУДНОВИМИ ГЕНЕРАТОРАМИ.....	207
<b>СКОСАР В.Ю., БУРИЛОВ С.В., ДЗЕНЗЕРСЬКИЙ В.О.</b> МОДЕЛЮВАННЯ ВИНАХІДНИЦЬКОГО ПРОЦЕСУ НА ПРИКЛАДІ ЛІТІЙ-ІОННИХ АКУМУЛЯТОРІВ .....	216
<b>ТИМОФІЄВА Н.К.</b> МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА ПІДХОДИ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ .....	224
<b>УСОВ А.В., КУНЦІН М.В. , ЗАЙЧИК Ю.І.</b> МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ МОЖЛИВОСТЕЙ ПО ЗАБЕЗПЕЧЕННЮ ЯКІСНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОВЕРХНЕВОГО ШАРУ КОНІЧНИХ ВИРОБІВ НА ФІНІШНИХ ОПЕРАЦІЯХ .....	231
<b>УСОВ А.В., КУНЦІН М.В. , СІКІРАШ Ю.Є.</b> МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ГЕТЕРОГЕННОЇ СТРУКТУРИ СПЛАВІВ НА ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ЯКІСНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОВЕРХНЕВОГО ШАРУ НА ФІНІШНИХ ОПЕРАЦІЯХ .....	240
<b>ХОМЧЕНКО А.Н., ЛИТВИНЕНКО О.І., КАРПОВА С.О., АСТІОНЕНКО І.О.</b> МОДЕЛІ КОНОЇДІВ ТА МЕТОД ПЕРЕРІЗІВ .....	253
<b>ЯРЕЦЬКА Н.О.</b> МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНОГО КІЛЬЦЕВОГО ШТАМПА ТА ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ .....	261

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>АНДРЕЙЦЕВ А.Ю., ВЯЛА Ю.Э., ГЕЙЛИК А.В., ЛЯШКО О.В., КЛЕЦКАЯ Т.С.</b> ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА И АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДОВ ЕЁ РЕШЕНИЯ .....	16
<b>АХМЕТШИНА Л.Г., ЕГОРОВ А.А.</b> УЛУЧШЕНИЕ ПОЛУТОНОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ ОЦЕНКИ ЯРКОСТИ НЕЧЕТКИХ ФУНКЦИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ .....	23
<b>БАБИЧЕВ С.А., ЯСИНСКАЯ-ДАМРИ Л.М.</b> МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РЕКОНСТРУКЦИИ ГЕННОЙ РЕГУЛЯТОРНОЙ СЕТИ НА ОСНОВЕ КОМПЛЕКСНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ .....	32
<b>БЕРДНИК М. Г., ГУЛИНА И. Г.</b> МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ТЕПЛООБМЕНА ПАРАБОЛОИДА ВРАЩЕНИЯ .....	42
<b>ВАКАЛ Л.П., ВАКАЛ Е.С.</b> МЕТОД КОДИРОВАНИЯ КОНТУРОВ МУЗЫКАЛЬНЫМ ЗВУКОМ	50
<b>ВОРОНЦОВ О.В., ВОРОНЦОВА И.В.</b> ЗАКОНОМЕРНОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ ВЕЛИЧИН КОЭФИЦИЕНТОВ СУПЕРПОЗИЦИИ В ПРОЦЕССЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ .....	59
<b>ГАЛЬЧЕНКОВЯ, ТРЕМБОВЕЦКАЯ Р.В., ТЫЧКОВ В.В.</b> ТЕХНИКИ СОЗДАНИЯ СУРРОГАТНЫХ МОДЕЛЕЙ ВИХРЕТОКОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ В ГИПЕРПРОСТРАНСТВЕ СРЕДСТВАМИ АДДИТИВНОЙ НЕЙРОСЕТЕВОЙ АППРОКСИМАЦИИ .....	67
<b>ГНАТУШЕНКО В.В., ДОРОШ Н.Л., ФЕНЕНКО Т.М.</b> РАСПОЗНАВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ НАБОРА FASHION MNIST МЕТОДАМИ ГЛУБОКОГО ОБУЧЕНИЯ .....	78
<b>ДАНЫК В.В., КОЛЕБАНОВ А.К., ЛЕБЕДЕНКО Ю.А.</b> ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СУДОВЫМИ КОМБИНИРОВАННЫМИ ПРОПУЛЬСИВНЫМИ КОМПЛЕКСАМИ .....	86
<b>ДОЩЕНКО Г.Г.</b> МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ЕФЕКТИВНОСТІ СТАБІЛІЗАЦІЇ ПАРАМЕТРІВ ГДГА .....	96
<b>КАГАДИЙ Т.С., ШПОРТА А.Г., БЕЛОВА О.В., ЩЕРБИНА И.В.</b> МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ...	103
<b>КОЛЕБАНОВ А.К., СЕЛИВЕРСТОВА С.Р.</b> МОДЕЛИРОВАНИЕ СХЕМЫ СУДОВОЙ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА СУДАХ С ЭЛЕКТРОДВИЖЕНИЕМ .....	111
<b>КОМЯК В.М., КЯЗИМОВ К.Т.</b> МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГРУПП ЛЮДЕЙ ПРИ ЭВАКУАЦИИ ИЗ ЗДАНИЙ .....	119
<b>МАЗМАНИШВИЛИ А.С., РЕШЕТНЯК Н.Г.</b> МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ И ПОВОРОТНЫХ ТРАЕКТОРИЙ ЭЛЕКТРОНОВ В ГРАДИЕНТНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ МАГНЕТРОННОЙ ПУШКИ .....	129
<b>МАЗМАНИШВИЛИ А.С.</b> РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ФУНКЦИОНАЛА–СВЕРТКИ РЕГУЛЯРНОГО СИГНАЛА И НОРМАЛЬНОГО МАРКОВСКОГО ШУМА.....	138
<b>МЕЛЬНИК И.В., ТУГАЙ С.Б., КИРИК В.А., КОВАЛЬЧУК Д.В.</b> ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА РАБОЧЕГО ДАВЛЕНИЯ ПУШЕК ВЫСОКОВОЛЬТНОГО ТЛЕЮЩЕГО РАЗРЯДА ДЛЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ В ЭЛЕКТРОННО-ЛУЧЕВОЙ ТЕХНОЛОГИИ СВАРКИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ИЗДЕЛИЙ .....	147

<b>МИРОНЕНКО М.Л.</b> ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОПЛИВНЫХ БАКОВ ПРИ РАЗНЫХ УСЛОВИЯХ ЭКСПЛУАТАЦИИ .....	161
<b>НИЦЫН А.Ю.</b> СВЯЗЬ ГРУППЫ СИММЕТРИИ ОРНАМЕНТА НА ЭСКИЗЕ М. К. ЭШЕРА «МОРСКИЕ КОНЬКИ» С ДВИЖЕНИЯМИ ПЛОСКОСТИ, ОПИСЫВАЮЩИМИ ПОСТРОЕНИЕ ЕГО ФИГУРНОЙ ПЛИТКИ.....	170
<b>ПЕРШИНА Ю.И., ПАСЕЧНИК В.А.</b> ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРЫ ДИНАМИЧЕСКОГО ТРЕХМЕРНОГО ТЕЛА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СМЕШАННОЙ АППРОКСИМАЦИИ .....	178
<b>ПЕТРИК Б.В., ДУБРОВИН В.И.</b> ОБНАРУЖЕНИЕ АТАК ТИПА DOS В СЕТЕВОМ ТРАФИКЕ С ПОМОЩЬЮ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ.....	186
<b>ПРОКОФЬЕВ Т.А., ИВАНЧЕНКО А.В., ГНАТУШЕНКО В.В.</b> АНАЛИТИЧЕСКИЙ И СИНТЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД В ПОСТРОЕНИИ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ ИЗЛУЧАЮЩИХ ЦЕНТРОВ МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЙ С ШИРОКИМИ СПЕКТРАМИ ЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ .....	197
<b>СЕЛИВЕРСТОВА С.Р., КОЛЕБАНОВ А.К.</b> МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АКТИВНОЙ МОЩНОСТИ СУДОВЫХ ГЕНЕРАТОРОВ .....	207
<b>СКОСАРЬ В.Ю., БУРЫЛОВ С.В., ДЗЕНЗЕРСКИЙ В.А.</b> МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗОБРЕТАТЕЛЬСКОГО ПРОЦЕССА НА ПРИМЕРЕ ЛИТИЙ-ИОННЫХ АККУМУЛЯТОРОВ .....	216
<b>ТИМОФЕЕВА Н.К.</b> МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА .....	224
<b>УСОВ А.В., КУНИЦЫН М.В., ЗАЙЧИК Ю.И.</b> МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПО ОБЕСПЕЧЕНИЮ КАЧЕСТВЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОВЕРХНОСТНОГО СЛОЯ КОНИЧЕСКИХ ИЗДЕЛИЙ НА ФИНИШНЫХ ОПЕРАЦИЯХ .....	231
<b>УСОВ А.В., КУНИЦЫН М.В., СИКИРАШ Ю.Е.</b> МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ГЕТЕРОГЕННОЙ СТРУКТУРЫ СПЛАВОВ НА ОБЕСПЕЧЕНИЕ КАЧЕСТВЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОВЕРХНОСТНОГО СЛОЯ НА ФИНИШНЫХ ОПЕРАЦИЯХ .....	240
<b>ХОМЧЕНКО А.Н., ЛИТВИНЕНКО Е.И., КАРПОВА С.О., АСТИОНЕНКО И.А.</b> МОДЕЛИ КОНОИДОВ И МЕТОД СЕЧЕНИЙ .....	253
<b>ЯРЕЦКАЯ Н.А.</b> МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОГО КОЛЬЦЕВОГО ШТАМПА И УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ .....	261

---



---

**CONTENTS**


---



---

<b>A.Yu. ANDREYTSSEV, Yu.E. VIALA, A.V. HEILYK, O.V. LIASHKO, T.S. KLETSKA</b> GENERALIZATION OF THE TRAVELING SALESPERSON PROBLEM AND ANALYSIS OF THE EFFECTIVENESS OF METHODS FOR ITS SOLUTION .....	16
<b>L.G. AKHMETSHINA, A. O. YEGOROV</b> GRAYSCALE IMAGES IMPROVEMENT BASED ON AUTOMATED BRIGHTNESS ESTIMATION OF FUZZY MEMBERSHIP FUNCTIONS .....	23
<b>S.A. BABICHEV, L.M. YASINSKA-DAMRI</b> MODELLING OF GENE REGULATORY NETWORK RECONSTRUCTION PROCEDURE BASED ON THE COMPLEX USE OF TOPOLOGICAL PARAMETERS .....	32
<b>M.H. BERDNYK, I.G. HULINA</b> MATHEMATICAL MODEL AND METHOD OF SOLVING THE GENERALIZED NEYMAN PROBLEM OF HEAT EXCHANGE OF PARABOLOID OF ROTATION	42
<b>L.P. VAKAL, Ye.S. VAKAL</b> METHOD OF ENCODING CONTOURS WITH MUSICAL SOUND ....	50
<b>O.V. VORONTSOV, I.V. VORONTSOVA</b> REGULARITIES OF VALUES CHANGE OF SUPERPOSITION COEFFICIENTS IN INTERPOLATION BY HYPERBOLIC FUNCTIONS .....	59
<b>V.Ya. HALCHENKO, R.V. TREMBOVETSKA, V.V. TYCHKOV</b> TECHNIQUES FOR CREATING SURROGATE MODELS OF EDDY-CURRENT PROBES IN HYPERSPACE BY MEANS OF ADDITIVE NEURAL NETWORK APPROXIMATION .....	67
<b>V.V. GNATUSHENKO, N.L. DOROSH, T. M. FENENKO</b> FASHION MNIST IMAGE RECOGNITION BY DEEP LEARNING METHODS .....	78
<b>V.V. DANYK, O.K. KOLEBANOV, Yu.O. LEBEDENKO</b> OPTIMAL CONTROL OF VESSEL COMBINED PROPULSIVE COMPLEXES .....	86
<b>H.G. DOSHCENKO</b> SIMULATION OF EFFICIENCY PROCESSES STABILIZATION OF PARAMETERS GDGS .....	96
<b>T.S. KAGADIY, A.H. SHPORTA, O.V. BILOVA, I.V. SCHERBINA</b> MATHEMATICAL MODELING IN GEOMETRICALLY NONLINEAR ELASTICITY THEORY PROBLEMS .....	103
<b>O.K. KOLEBANOV, S.R. SIELIVERSTOVA</b> MODELING OF A SHIP POWER SYSTEM SCHEME ON ELECTRIC PROPULSION .....	111
<b>V.M. KOMYAK, K.T. KYAZIMOV</b> MATHEMATICAL MODELING OF THE MOTION OF GROUPS OF PEOPLE DURING EVACUATION FROM BUILDINGS .....	119
<b>A.S. MAZMANISHVILI, N.G. RESHETNYAK</b> MODELING OF OSCILLATORY AND RETURN TRAJECTORIES OF ELECTRONS IN A GRADIENT MAGNETIC FIELD MAGNETRON GUN .....	129
<b>A.S. MAZMANISHVILI</b> PROBABILITY DISTRIBUTION OF CROSS-FUNCTIONAL FROM REGULAR SIGNAL AND NORMAL MARKOVIAN NOISE .....	138
<b>I.V. MELNYK, S.B. TUHAI, V.O. KYRYK, D.V. KOVALCHUK</b> THEORETICAL ESTIMATION OF OPERATION PRESSURE OF HIGH-VOLTAGE GLOW DISCHARGE GUNS FOR APPLYING IN ELECTRON-BEAM TECHNOLOGY OF METAL PRODUCTS WELDING .....	147
<b>M.L. MYRONENKO</b> FORCED VIBRATIONS OF FUEL TANKS UNDER DIFFERENT OPERATING CONDITIONS .....	161

<b>A.Yu. NITSYN</b> RELATIONSHIP OF THE SYMMETRY GROUP OF THE ORNAMENT ON THE SKETCH OF M. C. ESHER'S SKETCH 'SEAHORSES' WITH THE MOTIONS OF THE PLANE DESCRIBING THE CONSTRUCTION OF ITS FIGURED TILE.....	170
<b>I.I. PERSHINA, V.O. PASICHNYK</b> RESTORATION OF THE INTERNAL STRUCTURE OF A DYNAMIC THREE-DIMENSIONAL BODY USING BLENDING APPROXIMATION .....	178
<b>B.V. PETRIK, V.I. DUBROVIN</b> DETECTION OF DOS ATTACKS IN NETWORK TRAFFIC BY WAVELET TRANSFORM .....	186
<b>T.A. PROKOFIEV, A.V. IVANCHENKO, V.V. HNATUSHENKO</b> ANALYTICAL AND SYNTHETIC APPROACH TO BUILDING A MODEL OF A SYSTEM OF EMITTING CENTERS OF SINGLE CRYSTAL COMPOUNDS WITH WIDE LUMINESCENCE SPECTRA.....	197
<b>S.R. SIELIVERSTOVA, O.K. KOLEBANOV</b> SIMULATION OF ACTIVE POWER DISTRIBUTION SYSTEM BETWEEN SHIP GENERATORS.....	207
<b>V.Yu. SKOSAR, S.V. BURYLOV, V.O. DZENZERSKIY</b> SIMULATION OF THE INVENTION PROCESS ON THE EXAMPLE OF LITHIUM-ION BATTERIES .....	216
<b>N.K. TYMOFIJEVA</b> MATHEMATICAL MODELS AND APPROACHES TO SOLVING OPTIMIZATION PROBLEMS OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE .....	224
<b>A.V. USOV, M.V. KUNITSYN, Y.I. ZAYCHIK</b> DESIGN OF TECHNOLOGICAL POSSIBILITIES ON PROVIDING OF QUALITY DESCRIPTIONS OF SUPERFICIAL LAYER OF CONICAL WARES ON FINISH OPERATIONS .....	231
<b>A.V. USOV, M.V. KUNITSYN, Y.E. SIKIRASH</b> MODELING THE INFLUENCE OF THE HETEROGENEOUS STRUCTURE OF ALLOYS ON PROVIDING QUALITATIVE CHARACTERISTICS OF THE SURFACE LAYER IN FINISHING OPERATIONS .....	240
<b>A.N. KHOMCHENKO, O.I. LYTVYNENKO, S.O. KARPOVA, I.O. ASTIONENKO</b> CONOID MODELS AND METHOD OF CROSS SECTIONS .....	253
<b>N.O. YARETSKA</b> MATHEMATICAL MODELING OF CONTACT INTERACTION OF A PRE-STRESSED RING STAMP AND ELASTIC HALF-SPACE WITH INITIAL STRESSES ....	261

УДК 519.854

А.Ю. АНДРЕЙЦЕВ, Ю.Е. ВЯЛА, А.В. ГЕЙЛИК, О.В. ЛЯШКО  
Державний університет інфраструктури та технологій  
Т.С. КЛЕЦЬКА  
Відкритий міжнародний університет розвитку людини «Україна»

## УЗАГАЛЬНЕННЯ ЗАДАЧІ КОМІВОЯЖЕРА ТА АНАЛІЗ ЕФЕКТИВНОСТІ МЕТОДІВ ЇЇ РОЗВ'ЯЗАННЯ

*Задача комівояжера (задача про кільцевий маршрут): визначення найкоротшого шляху по замкненому маршруту досить часто виникає при розробці логістичних програм, зокрема при організації транспортних перевезень. Методи її розв'язання досить широко висвітлені в багатьох монографіях та в навчальній літературі. Однак, на практиці зустрічається ряд задач, які не можуть бути розв'язані в межах класичних підходів.*

*У даній роботі розглянуто два класи задач, які можуть бути зведені до класичної задачі комівояжера і запропоновані методи зведення до неї. Також проаналізовано методи розв'язання запропонованих задач.*

*У першому з класів задач про кільцевий маршрут розглянуто варіант, коли транспортний засіб (судно) за необхідністю має відвідати один або кілька пунктів двічі. Показано, що дана задача розпадається на дві або більше окремих задач про кільцевий маршрут і її розв'язання є сумою розв'язків відповідних класичних задач.*

*Другий клас задач - це задачі з пріоритетними маршрутами: маршрутами, які в силу певних причин повинні бути пройдені першими або останніми. У даному випадку вихідна задача може бути розв'язана двома способами. Перший з них полягає у виділенні пріоритетних ділянок і подальшому розв'язанні задачі про найкоротший шлях для решти непріоритетних ділянок. Другий спосіб полягає в редукації матриці перевезень за допомогою введення фіктивних часу або витрат для пріоритетних ділянок. Подальше розв'язання проводиться за класичною схемою розв'язання задачі комівояжера.*

*У статті також проведено порівняння трьох методів розв'язання задачі про кільцевий маршрут. Зроблено висновок про те, що при невеликій кількості пунктів найбільш ефективним є прямий комбінаторний метод. При збільшенні кількості відвідуваних пунктів ефективнішим стає метод розгалужень і меж. Зауважено, що ефективність даного методу знижується в разі наявності декількох оптимальних розв'язків. Метод розв'язання виродженої транспортної задачі, незважаючи на свою алгоритмічність, є прийнятним тільки в разі єдиності або пошуку одного з оптимальних розв'язків.*

*Ключові слова: задача комівояжера, задача про найкоротший шлях, пріоритетні маршрути, метод розгалужень і меж, транспортна задача.*

А.Ю. АНДРЕЙЦЕВ, Ю.Э. ВЯЛА, А.В. ГЕЙЛИК, О.В. ЛЯШКО  
Государственный университет инфраструктуры и технологий  
Т.С. КЛЕЦКАЯ  
Открытый международный университет развития человека «Украина»

## ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧИ КОММОВОЯЖЕРА И АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДОВ ЕЁ РЕШЕНИЯ

*Задача коммивояжера (задача о кольцевом маршруте): определения кратчайшего пути по замкнутому маршруту довольно часто возникает при разработке логистических программ, в частности при организации транспортных перевозок. Методы её решения достаточно широко освещены во многих монографиях, а также в учебной литературе. Однако, на практике встречается ряд задач, которые не могут быть решены в рамках классических подходов.*

*В данной работе рассмотрены два класса задач, которые могут быть сведены к классической задаче коммивояжера и предложены методы их сведения к ней. Также проанализированы методы решения данной задачи.*

*Первым из классов задач о кольцевом маршруте, рассмотрен вариант, когда транспортное средство (судно) с необходимостью должно посетить один или несколько пунктов дважды. Показано, что данная задача распадается на две или более отдельных задач о кольцевом маршруте и её решение является суммой решений соответствующих классических задач.*

*Второй класс задач – это задачи с приоритетными маршрутами: маршрутами, которые, в силу определённых причин должны быть пройдены первыми или последними. В данном случае исходная*



задача может быть решена двумя способами. Первый из них состоит в выделении приоритетных участков и дальнейшем решении задачи о кратчайшем пути для оставшихся неприоритетных участков. Второй способ заключается в редуцировании матрицы перевозок при помощи введения фиктивных времени или затрат для приоритетных участков. Дальнейшее решение проводится по классической схеме решения задачи коммивояжера.

В статье также проведено сравнение трёх методов решения задачи о кольцевом маршруте. Сделан вывод о том, что при небольшом количестве пунктов наиболее эффективным является прямой комбинаторный метод. При увеличении количества посещаемых пунктов более эффективным становится метод ветвей и границ. Показано также, что эффективность данного метода снижается в случае наличия нескольких оптимальных решений. Метод решения вырожденной транспортной задачи, несмотря на свою алгоритмичность, является приемлемым только в случае единственности или поиска одного из оптимальных решений.

Ключевые слова: задача коммивояжера, задачи о кратчайшем пути, приоритетные маршруты, метод ветвей и границ, транспортная задача.

A.Yu. ANDREYTSSEV, Yu.E. VIALA, A.V. HEILYK, O.V. LIASHKO  
State University of Infrastructure and Technologies  
T.S. KLETSKA  
Open International University of Human Development "Ukraine"

## GENERALIZATION OF THE TRAVELING SALESPERSON PROBLEM AND ANALYSIS OF THE EFFECTIVENESS OF METHODS FOR ITS SOLUTION

*Traveling salesperson problem (circular route problem): determining the shortest path along a closed route quite, often arises in the development of logistics programs, in particular when organizing transportation. Methods for its solution are widely enough covered in many monographs, as well as in educational literature. However, in practice, there are a number of problems that cannot be solved within the framework of classical approaches.*

*In this paper, two classes of problems are considered that can be reduced to the classical traveling salesperson problem and proposes methods for their attention to it. Methods for solving this problem are also analyzed.*

*The first of the classes of problems on a circular route is considered a variant when a vehicle (ship) must necessarily visit one or several points twice. It is shown that this problem splits into two or more separate problems with a circular route and its solution is the sum of solutions of the corresponding classical problems.*

*The second class of problems is problems with priority routes: routes that, for some reason, must be passed first or last. In this case, the problem can be solved in two ways. The first of them consists in identifying priority routes and further solving the shortest-route problem for the remaining non-priority points. The second way is to reduce the traffic matrix by introducing fictitious times or costs for priority routes. further solution is carried out according to the classical scheme for solving the traveling salesperson problem.*

*The paper also compares three methods for solving the circular route problem. It is concluded that with a small number of points, the direct combinatorial method is the most effective. As the number of sites visited increases, the branch-and-bound method becomes more efficient. It is also shown that the effectiveness of this method decreases in the case of the presence of several optimal solutions. The method for solving a degenerate transportation model, despite its algorithmic nature, is acceptable only in the case of uniqueness or the search for one of the optimal solutions.*

*Keywords: traveling salesperson problem, shortest-route problems, priority routes, branch-and-bound method, transportation model.*

### Постановка проблеми

Нехай ми маємо  $n$  пунктів (наприклад, портів), усі з яких необхідно відвідати один раз і повернутись у початковий пункт. Необхідно обрати оптимальний маршрут.

Критерієм оптимальності може бути довжина маршруту, час або витрати, якщо це стосується транспортних перевезень. Дана задача отримала назву “задача комівояжера” або “задача про кільцевий маршрут”. Вона є однією із складових логістичної програми, тому її розв’язанню приділена достатня увага.

Однак на практиці часто виникають задачі споріднені з нею. Це може бути пов’язано з необхідністю відвідування деяких пунктів двічі або з пріоритетністю

деяких ділянок маршрутів, що вимагає додаткових досліджень в сенсі узагальнення задачі комівояжера та аналізу ефективності методів її розв'язання.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Методи розв'язання класичної задачі комівояжера достатньо повно висвітлені як в науковій, так і в навчальній літературі [1-5]. В [6] проведено порівняльний аналіз ефективності безпосереднього комбінаторного методу та методу розгалужень і меж. В [7] наведено клас задач, що можуть бути зведені до задачі про кільцевий маршрут та запропоновано методику, згідно з якою можна звести поставлені задачі до послідовності класичних.

### Мета дослідження

Метою даної роботи є узагальнення задачі комівояжера за рахунок зняття обмеження на одноразове відвідування кожного пункту та можливості введення пріоритетних маршрутів. Також ставиться задача проведення порівняльного аналізу ефективності методів розв'язання задачі про кільцевий маршрут в залежності від кількості пунктів, призначених для відвідування та наявності одного або декількох оптимальних маршрутів.

### Викладення основного матеріалу дослідження

Розглянемо математичну модель задачі про кільцевий маршрут у класичній постановці.

Нехай відстані між усіма пунктами відомі –  $c_{ij}$ . Зазначимо, що  $c_{ij}$  може бути час подолання відстані між  $i$  та  $j$  або витрати на даній ділянці маршруту. При цьому кожен пункт відвідується лише один раз.

Введемо альтернативні змінні:  $x_{ij} = 1$ , якщо прямий шлях від  $i$  до  $j$  (без проміжних пунктів) входить до кільцевого маршруту, та  $x_{ij} = 0$ , якщо ця ділянка не входить до маршруту.

Таким чином маємо обмеження:

$$\sum_{i=0}^n x_{ij} = 1 - \text{з кожного пункту можемо виїхати тільки один раз;}$$

$$\sum_{j=0}^n x_{ij} = 1 - \text{в кожен пункт можна заїхати тільки один раз.}$$

Додаткові змінні  $u_i$ :

$$nx_{ij} + u_i - u_j \leq n - 1 - \text{обмеження замкнутості.}$$

Цільова функція:

$$z = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min .$$

Для розв'язання даної задачі використовується матриця вартостей перевезень, як при розв'язанні транспортної задачі. В загальному випадку  $c_{ij} \neq c_{ji}$ . Це може бути пов'язано з неможливістю проходження ділянок  $i-j$  та  $j-i$  одним видом транспорту

або впливом течії на час подолання взаємно протилежних ділянок для річкового транспорту. Діагональні клітини блокуємо, покладаючи  $c_{ii} = \infty$ , оскільки вони відповідають відстані проїзду з пункту  $i$  в нього ж і не можуть бути заповненими, тобто усі  $x_{ii} = 0$ .

$$C = \begin{pmatrix} \infty & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \infty & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & \infty \end{pmatrix}$$

Методи розв'язання цієї задачі є досить широко відомими. Їхню ефективність у різних випадках ми оцінимо пізніше.

Спочатку розглянемо два класи споріднених задач та способи їх зведення до класичної задачі комівояжера.

Перший клас таких задач – це задачі, в яких для деяких пунктів знімається обмеження одноразового відвідування. Дана ситуація виникає тоді, коли групи пунктів відвідування пов'язані між собою лише одним можливим маршрутом і виникає необхідність відвідати деякий пункт двічі.

Розглянемо спочатку найпростіший випадок. Нехай в деякий пункт можна безпосередньо потрапити тільки з одного іншого. Тоді матриця  $C$  має вигляд:

$$C = \begin{pmatrix} \infty & c_{12} & \cdots & c_{1n} & \infty \\ c_{21} & \infty & \cdots & c_{2n} & \infty \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \infty \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & \infty & c_{n,n+1} \\ \infty & \infty & \infty & c_{n+1,n} & \infty \end{pmatrix}$$

Викреслюємо рядок та стовпчик з номером  $n+1$ , а до кожного елемента матриці в рядку та стовпчику  $n$  додаємо  $c_{n+1,n} + c_{n,n+1}$ .

Тепер, нехай матриця розпадається на дві групи пунктів, потрапляти в одну з яких з іншої можна лише через один фіксований пункт.

Як приклад, можемо розглянути круїз по Чорному та Середземному морях, який починається і закінчується в Одесі. Тоді круїзний лайнер повинен двічі пройти через Босфорську протоку.

$$C = \begin{pmatrix} \infty & c_{12} & \cdots & c_{1n} & \infty & \infty & \cdots & \infty \\ c_{21} & \infty & \cdots & c_{2n} & \infty & \infty & \cdots & \infty \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & \infty & c_{n,n+1} & c_{n,n+2} & \cdots & c_{nm} \\ \infty & \infty & \cdots & c_{n+1,n} & \infty & c_{n+1,n+2} & \cdots & c_{n+1,m} \\ \infty & \infty & \cdots & c_{n+2,n} & c_{n+2,n+1} & \infty & \cdots & c_{n+2,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \infty & \infty & \cdots & c_{m,n} & c_{m,n+1} & c_{m,n+2} & \cdots & \infty \end{pmatrix}$$

Розв'язання цієї задачі починається з побудови оптимального маршруту в другій групі пунктів, тобто по Середземному морю, з початковим пунктом «Босфорська

протока». Розв'язавши її, знаходимо оптимальний час перебування в Середземному морі, замінюємо другу підматрицю одним рядком та одним стовпчиком з відповідним часом для проходження ланки “Середземне море”-“Босфорська протока” і отримуємо задачу, розглянуту раніше.

Даний спосіб може бути узагальнений на будь-яку кількість груп пунктів, які включають в себе лише один спільний пункт. При цьому, побудова оптимального маршруту починається з останньої групи і закінчується першою.

Другий клас задач, що можуть бути зведені до задачі про кільцевий маршрут – це задачі з пріоритетними ділянками. Їхня суть полягає в тому, що деякі з ділянок повинні бути подолані в першу або останню чергу. Це може бути пов'язано з перевезенням вантажів, що швидко псуються або вантажів, які треба доставити терміново.

Для розв'язання цієї задачі можна паралельно з матрицею перевезень розглянути матрицю збитків. Потім новою матрицею перевезень обрати їх суму. Але при цьому можуть виникнути труднощі з побудовою матриці збитків, оскільки збитки залежать від часу, який пройшов до моменту включення в маршрут відповідної ділянки.

Більш простим є спосіб визначення пріоритетів. В цьому випадку ділянці з найвищим пріоритетом приписується фіктивна довжина 0. Таким чином, дана ділянка включається в маршрут першою. Далі відповідні рядок та стовпчик викреслюються і розглядається ділянка з наступним пріоритетом.

Після включення усіх пріоритетних ділянок в маршрут продовжуємо розв'язання задачі комівояжера класичними методами. Отримавши оптимальний маршрут, додаємо до його довжини (часу) реальну (а не фіктивну) довжину пріоритетних ділянок.

Якщо серед ділянок є декілька з однаковими пріоритетами, то звичайним комбінаторним методом знаходять маршрут мінімальної довжини (незамкнутий), а потім в матриці перевезень викреслюють відповідні рядки та стовпчики, вводючи фіктивні довжини відповідних ділянок, рівні нулю.

Якщо пріоритетні ділянки знаходяться не на початку чи в кінці маршруту, то чинимо так само, але при формуванні оптимального маршруту переставляємо на початок ланки, що з'єднують пункт під номером 1 з пунктом  $i$ , що відповідає початку пріоритетної ділянки

Ефективність даного підходу зменшується із збільшенням кількості пріоритетних ділянок. В цьому випадку задача з пріоритетними ділянками, після виділення пріоритетних маршрутів, зводиться до задачі про найкоротший маршрут для непріоритетних ділянок.

Перейдемо тепер до аналізу ефективності методів розв'язання задачі комівояжера. Їх можна поділити на комбінаторні та класичні методи розв'язання транспортних задач.

Першим розглянемо безпосередній комбінаторний метод (метод перебору). Оскільки кількість можливих кільцевих маршрутів дорівнює  $(n-1)!$ , то при невеликій кількості пунктів ми можемо обчислити довжину усіх маршрутів та обрати оптимальний чи оптимальні (якщо їх декілька). Але, хоча можливості обчислювальної техніки на даний час дозволяють виконати необхідні розрахунки досить швидко, при збільшенні  $n$  кількість можливих маршрутів швидко зростає і, відповідно, зменшується ефективність методу.

Метод розгалужень і меж дозволяє зменшити кількість можливих маршрутів в порівнянні з безпосереднім комбінаторним методом, завдяки відкиданню завідомо гірших маршрутів.

Спочатку, віднімаючи найменші  $c_{ij}$  від елементів кожного рядка матриці  $C$ , а потім від елементів кожного стовпчика (якщо це потрібно), отримуємо зведену матрицю, в кожному рядку та стовпчику якої є хоча б один нуль. Сума цих  $c_{ij}$  є нижньою границею довжини маршруту. Далі знаходимо в зведеній матриці ділянку  $i-j$  довжини нуль, виключення якої з маршруту максимально збільшило б його довжину. Множина усіх маршрутів розпадається на дві:  $V$  – ті, що включають ділянку  $i-j$  та  $W$  – не включають. Для подальшого розв'язання розглядаємо множину  $V$ : включаючи ділянку  $i-j$  до маршруту, і викреслюємо рядок та стовпчик і повторюємо вказану процедуру, поки не отримаємо редуковану матрицю  $2 \times 2$ . Якщо на якомусь кроці виявиться, що довжина маршруту більше за нижню оцінку множини  $W$ , то повертаємось до відповідного кроку, покладаємо  $c_{ij} = \infty$  (виключаємо ділянку  $i-j$  з розгляду) і поновлюємо процедуру.

Ефективність даного методу зменшується у випадку коли задача має декілька оптимальних розв'язків.

Зазначимо також, що при наявності пріоритетних маршрутів, множина  $W$  для них не розглядається.

Крім того, ми можемо розглядати матрицю  $C$  як матрицю вартостей перевезень класичної транспортної задачі і розв'язати її, наприклад, методом потенціалів, який є досить алгоритмічним.

Але, оскільки дана задача є виродженою (включає лише  $n$  ненульових елементів), то кількість ітерацій, необхідних для отримання оптимального розв'язку, буде досить великою. Крім того, якщо задача має декілька оптимальних розв'язків, то ми можемо знайти не всі з них.

### Висновки

В процесі дослідження нами розглянуто два класи задач, споріднених з задачею комівояжера. Наведено методики їх зведення до класичної задачі. Для задач з пріоритетними ділянками розглянуто альтернативні методи розв'язання.

Проведено також порівняльний аналіз ефективності методів розв'язання задачі про кільцевий маршрут. Встановлено, що у більшості випадків найбільш ефективним є безпосередній комбінаторний метод, оскільки на практиці кількість пунктів відвідування є невеликою. Оцінено також переваги та недоліки методу розгалужень і меж. Та показано, що методи розв'язання даної задачі, як класичної транспортної є неефективними, незважаючи на їх алгоритмічність та універсальність.

### Список використаної літератури

1. Таха Н. Operations Research: An Introduction, 10th Edition. Boston: Princeton, 2017. 848 p.
2. Томас Х. Кормен, Чарльз И. Лейзерсон, Рональд Л. Ривест, Клиффорд Штайн. Алгоритмы: построение и анализ. 2-е изд. Москва: Вильямс, 2006. 1296 с.
3. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій. Київ: ЗАТ «ВІПОЛ», 2000. 688с.
4. Карагодова О.О., Кігель В.Р., Рожок В.Д. Дослідження операцій. Київ: Екомен, 2007. 256с.
5. Костюкова О.И. Исследование операций. Минск: БГУИР, 2003. 94с.
6. Фомин Г. П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности. Москва: Финансы и статистика, 2001. 544 с.

7. Андрейцев А.Ю., Клецька Т.С. Про розширення класу задач про кільцевий маршрут. *Збірник матеріалів міжнародної науково-практичної конференції «Дніпровські читання-2020»*. Київ: ДУІТ. 2020. С.172–175.

#### References

1. Taha, H. (2017). Operations Research: An Introduction. 10th Edition. Boston: Princeton.
2. Tomas Kh. Kormen, Charlz I. Leyzerson, Ronald L. Rivest, & Klifford Shtayn. (2006) *Algoritmy: postroyeniye i analiz*. 2-e izd. Moskva: Viliams.
3. Zaichenko, Yu.P. (2000). *Doslidzhennia operatsii*. Kyiv: ZAT «VIPOЛ».
4. Karahodova, O.O., Kihel, V.R., & Rozhok, V.D. (2007). *Doslidzhennia operatsii*. Kyiv: Ekomen.
5. Kostyukova, O.I. (2003). *Issledovaniye operatsiy*. Minsk: BGUIR.
6. Fomin, G. P. (2001). *Matematicheskie metody i modeli v kommercheskoy deyatel'nosti*. Moskva: Finansyi i statistika.
7. Andreitsev, A.Yu., & Kletska, T.S. (2020). Pro rozshyrennia klasu zadach pro kiltsevyi marshrut. *Zbirnyk materialiv mizhnarodnoi naukovo-praktychnoi konferentsii «Dniprovski chytannia-2020»*. Kyiv: DUIT. pp.172–175.

АНДРЕЙЦЕВ Андрій Юрійович – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри вищої та прикладної математики Державного університету інфраструктури та технологій, e-mail: andr7765@i.ua. ORCID 0000-0003-3969-185X.

ВЯЛА Юлія Едуардівна – старший викладач кафедри вищої та прикладної математики Державного університету інфраструктури та технологій, e-mail: j-mineewa@ukr.net. ORCID 0000-0003-0369-3570

ГЕЙЛИК Анастасія Вадимівна – к.п.н., доцент кафедри вищої та прикладної математики Державного університету інфраструктури та технологій, e-mail: geilik@meta.ua. ORCID 0000-0002-4675-5711

КЛЕЦЬКА Тетяна Сергіївна – к.і.н., доцент, доцент кафедри комп'ютерної інженерії Відкритого міжнародного університету розвитку людини «Україна», e-mail: vellaer@i.ua. ORCID 0000-0003-3969-185X.

ЛЯШКО Ольга Вікторівна – к.ф.-м.н., доцент, зав. кафедри вищої та прикладної математики Державного університету інфраструктури та технологій, e-mail: olga\_liashko@ukr.net. ORCID 0000-0003-2616-898X.

УДК 004.93

Л.Г. АХМЕТШИНА, А.А. ЕГОРОВ  
Днепровский национальный университет имени Олеся Гончара

## УЛУЧШЕНИЕ ПОЛУТОНОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ ОЦЕНКИ ЯРКОСТИ НЕЧЕТКИХ ФУНКЦИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

*Изображения, сформированные различными системами, являющиеся результатом стандартных методов исследования, часто имеют качество, недостаточное для проведения достоверного анализа. Они содержат искажения, обусловленные как системой их формирования, так и методами представления и отображения в системе обработки. Для повышения достоверности анализа изображений необходимо улучшение их визуальных характеристик с точки зрения выявления объектов интереса для решения конкретной задачи. Современный подход к решению задачи анализа изображений из-за неточности, неполноты исходных данных и неоднозначности алгоритмов обработки (например, при определении классов, регионов/границ объектов) базируется на использовании нечетких методов. В работе рассмотрены информационные возможности характеристик, синтезируемых на основе метода сингулярного разложения в нечетком пространстве признаков для улучшения качества полутоновых изображений. Описаны существующие подходы применения нечетких функций типа\_2 и влияние способа их формирования на получаемый результат. Предложенный в работе алгоритм использует для перехода к нечетким множествам типа\_2 статистические характеристики нечетких функций принадлежности типа\_1. Предложен метод автоматизированного отбора наиболее информативных нечетких составляющих, на основе анализа их яркостных характеристик, на этапе дефазификации с применением сингулярного разложения. Представлены алгоритм и экспериментальные результаты на примере реального микроскопического изображения для различных методов предобработки исходных данных, которые демонстрируют, что предобработка исходных данных существенно влияет на чувствительность преобразования. Показано, что переход в нечеткое пространство признаков типа\_2 с последующим применением сингулярного преобразования с предварительным отбором наиболее информативных нечетких функций принадлежности, которые интерпретируются как изображения, на основе автоматизированной оценки их яркости, обеспечивает улучшение визуальных характеристик полутоновых снимков.*

*Ключевые слова: обработка изображений, нечеткая функция принадлежности, нечеткие множества типа\_2, сингулярное разложение.*

Л.Г. АХМЕТШИНА, А.О. ЕГОРОВ  
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

## ПОЛІПШЕННЯ ПІВТОНОВИХ ЗОБРАЖЕНЬ НА ОСНОВІ АВТОМАТИЗОВАНОЇ ОЦІНКИ ЯСКРАВОСТІ НЕЧІТКИХ ФУНКЦІЙ НАЛЕЖНОСТІ

*Зображення, сформовані різними системами, які є результатом стандартних методів дослідження, часто мають якість, недостатню для проведення достовірного аналізу. Вони містять спотворення, обумовлені як системою їх формування, так і методами подання та відображення в системі обробки. Для підвищення достовірності аналізу зображень необхідне поліпшення їх візуальних характеристик з точки зору виявлення об'єктів інтересу для вирішення конкретного завдання. Сучасний підхід до вирішення завдання аналізу зображень через неточність, неповноту вихідних даних та неоднозначність алгоритмів обробки (наприклад, при визначенні класів, регіонів/меж об'єктів) базується на використанні нечітких методів. В роботі розглянуто інформаційні можливості характеристик, синтезованих на основі методу сингулярного розкладання в нечіткому просторі ознак для поліпшення якості напівтонових зображень. Описано існуючі підходи застосування нечітких функцій типу\_2 і вплив способу їх формування на одержуваний результат. Запропонований в роботі алгоритм використовує для переходу до нечітких множин типу\_2 статистичні характеристики нечітких функцій належності типу\_1. Запропоновано метод автоматизованого відбору найбільш інформативних нечітких складових, на основі аналізу їх характеристик яскравості, на етапі дефазифікації із застосуванням сингулярного розкладання. Представлено алгоритм та експериментальні результати на прикладі реального мікроскопічного зображення для різних методів попередньої обробки вихідних даних, які демонструють, що попередня обробка вихідних даних істотно*

впливаює на чутливість перетворення. Показано, що перехід в нечіткий простір ознак типу\_2 та подальше застосування сингулярного перетворення з попереднім відбором найбільш інформативних нечітких функцій приналежності, що інтерпретуються як зображення, на основі автоматизованої оцінки їх яскравості, забезпечує поліпшення візуальних характеристик напівтонових знімків.

Ключові слова: обробка зображень, нечітка функція приналежності, нечіткі множини типу\_2, сингулярне розкладання.

L.G. AKHMETSHINA, A. O. YEGOROV  
Dnipro National University Named By Oles Honchar

## GRAYSCALE IMAGES IMPROVEMENT BASED ON AUTOMATED BRIGHTNESS ESTIMATION OF FUZZY MEMBERSHIP FUNCTIONS

*Images that were generated by various systems, which are the result of standard research methods, often have insufficient quality for reliable analysis. They contain distortions caused both by the system of their formation and by the methods of presentation and showing in the processing system. To increase the reliability of image analysis, it is necessary to improve their visual characteristics in terms of identifying objects of interest for solving a specific problem. The modern approach to solving the problem of image analysis due to inaccuracy, incompleteness of initial data and ambiguity of processing algorithms (for example, when determining classes, regions/boundaries of objects) is based on the usage of fuzzy methods. This paper considers the information capabilities of characteristics synthesized on the basis of the method of singular value decomposition in a fuzzy feature space for improving the quality of grayscale images. The existing approaches to the usage of fuzzy functions of type\_2 and the influence of the method of their formation on the result are described. The proposed algorithm uses the statistical characteristics of fuzzy membership functions of type\_1 for transition to fuzzy sets of type\_2. Proposed in this work method allows the automated selection of the most informative fuzzy components, based on the analysis of their brightness characteristics, at the stage of defuzzification using singular decomposition. The algorithm of proposed method and experimental results are presented on the example of a real microscopic image for various methods of preprocessing of the initial data, which demonstrate that the preprocessing of the initial data significantly affects the sensitivity of the transformation. It is shown that the transition to a fuzzy space of type\_2 features, followed by the usage of a singular transformation with a preliminary selection of the most informative fuzzy membership functions, which are interpreted as images, based on an automated estimation of their brightness, provides an improvement in the visual characteristics of grayscale images.*

Key words: image processing, fuzzy membership function, fuzzy sets of type\_2, singular value decomposition.

### Постановка проблемы

Количество практических задач, связанных с цифровой обработкой изображений, являющихся результатом стандартных методов исследования, например, в материаловедении, медицине, дефектоскопии, постоянно возрастает. Противоречивость процесса преобразования изображений заключается в том, что, с одной стороны, необходимо обеспечение максимальной чувствительности используемых методов к небольшим локальным вариациям значений яркости, а с другой стороны – устойчивость к влиянию структурных и измерительных шумов. При этом, кроме случайности, которая описывается в соответствии с теорией вероятности, нужно учитывать неопределенность изображений [1, 2, 3], которая является атрибутом информации [4]. Современный подход к решению задачи анализа изображений из-за неточности, неполноты исходных данных и неоднозначности алгоритмов обработки (например, при определении классов, регионов/границ объектов) базируется на использовании нечетких методов [5, 6, 7].

### Анализ последних достижений и публикаций

Нечеткие множества типа\_1 (НМТ1), предложенные Л. Заде позволяют преобразовать неопределенность в функцию принадлежности, имеющую числовое значение на отрезке [0,1]. Нелинейность нечетких методов обработки дает возможность усилить влияние вариаций яркостных свойств анализируемых изображений и устранять



неоднозначность серого. Однако, НМТ1 не позволяют учитывать неопределенности в функциях принадлежности, т.к. они характеризуются четкими значениями [8].

Нечеткая логика типа\_2 (Т2) являются обобщением концепции теории обычных нечетких множеств и позволяет рассматривать задачи, имеющие более высокую степень неопределенности, заключающуюся, в частности, в методах представления изображений и в алгоритмах их обработки [9, 10]. Нечеткие множества типа\_2 (НМТ2) и соответствующие им функции принадлежности типа\_2 (ФПТ2), определяются как обобщение нечетких множеств введением нечетких интервалов с числовым значением на отрезке  $[0,1]$ , что коррелирует с восприятием неточности человеком [5]. НМТ2 имеют нечеткие функции принадлежности и способны моделировать подобные неопределенности. Использование нечеткой логики позволяет минимизировать неопределенности: удаление случайности в НМТ1 приводит к однозначности, а удаление неопределенности в Т2 – к НМТ1.

### Цель исследования

В работе рассмотрены информационные возможности характеристик, синтезируемых в нечетком пространстве признаков с применением ФПТ2 и влияние способа их формирования на получаемый результат в задаче улучшения качества полутоновых изображений. Предложен метод автоматизированного отбора наиболее информативных нечетких составляющих на основе анализа их яркостных характеристик на этапе дефаззификации с применением сингулярного разложения.

### Изложение основного материала исследования

Для изображений определение интервального НМТ2 можно получить с использованием степенных функций, рассматривая каждый пиксель как массив нечетких синглетонов, отображающих значение членства нечеткого множества типа\_1  $u_{x,y}$  для каждой точки изображения [11] на основе выражения:

$$a_{k,i}^t = (u_{k,i}^t)^{1/\alpha} - (u_{k,i}^t)^\alpha, \quad (1)$$

где  $\alpha$  – коэффициент для расчета интервального фаззификатора, который влияет на степень нечеткости при формировании ФПТ2.

На рис. 1 представлен графический образ НМТ2 (пунктирная линия), для произвольной строки изображения, который характеризуется верхней и нижней границами, каждую из которых определяет нижняя (НФП) и верхняя (ВФП) функции принадлежности типа\_1 (отображены жирной сплошной линиями). Площадь между НФП и ВФП называется следом неопределенности (the footprint of uncertainty - FOU) и отображает неопределенность решения (дефаззификации).

В данной работе для формирования ФПТ2 используется следующий подход: изображение  $U$  интерпретируется как массив значений функций принадлежности типа\_1 (ФПТ1) и для него формируются значения «верхней»  $U_h$  и «нижней»  $U_l$  ФПТ1 по формулам:

$$(U_{x,y})_h = (U_{x,y})^{1-(U_{x,y})^{-U_{x,y}/2}}, \quad (2)$$

$$(U_{x,y})_l = (U_{x,y})^{1+(U_{x,y})^{-U_{x,y}/2}}. \quad (3)$$

Определение  $U'$  – значений ФПТ2:

$$U'_{x,y} = (U_{x,y})_h - (U_{x,y})_l. \quad (4)$$

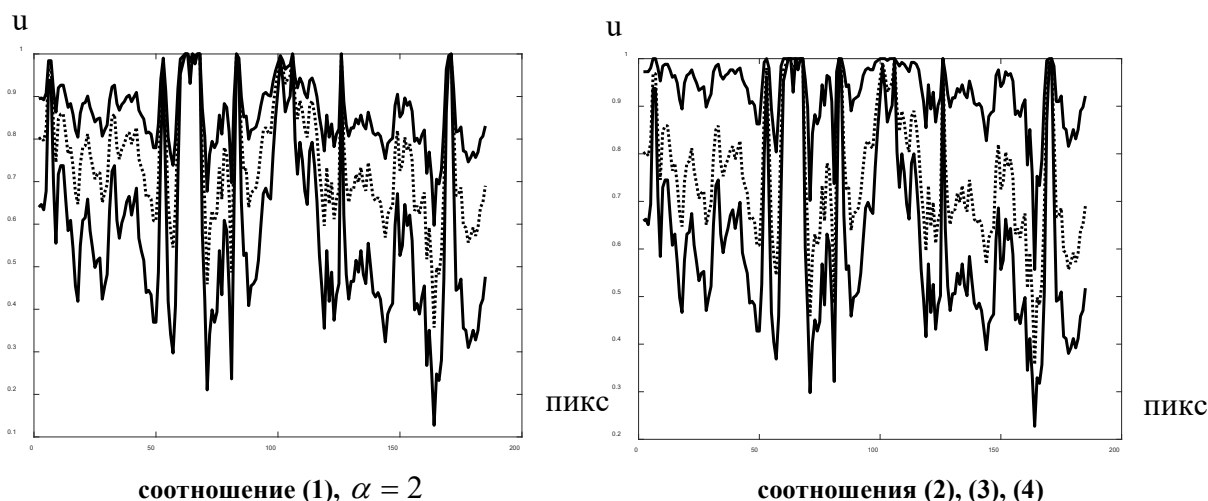


Рис. 1. Образ ФПТ2

Предложенный в данной работе алгоритм включает следующие шаги.

1. Масштабирование исходного полутонового изображения  $I$  на отрезок  $[0,1]$ .
2. Предобработка, выполняемая в этой работе на основе двух методов:
  - а) адаптивная степенная коррекция яркости:
    - небольшое уменьшение яркости и удаление значений, равных 1:

$$I_{x,y}^1 = I_{x,y} - 1/256, I_{x,y} > (\bar{I} + 0.5)/2, x \in [1, dy], y \in [1, dx], \quad (5)$$

где  $\bar{I}$  – среднее значение  $I$ ;

- пропорциональное выравнивание яркости:

$$I_{x,y}^2 = (I_{x,y}^1)^{1+\text{sgn}(I_{x,y}^1 - \bar{I}_1)} (I_{x,y}^1)^{\left(1 - \text{sgn}(I_{x,y}^1 - \bar{I}_1)\right) \left(\frac{I_{x,y}^1}{\bar{I}_1}\right)^{1 - I_{x,y}^1}}, \quad (6)$$

где  $\bar{I}_1 = (\bar{I} + 0.5)/2$ ;

- пропорциональное снижение яркости всего изображения:

$$I_{x,y}^3 = (I_{x,y}^2)^{1 - I_{x,y}^2/2}. \quad (7)$$

б) локальное вычитание фона с использованием неперекрывающихся окон (был использован размер  $[15 \times 15]$ ), включает следующие шаги:

- формирование изображения  $I^1$  на основе яркости пикселей окна  $w^1$ :

$$w_{x,y}^1 = (\bar{w} + \bar{I})/2, \quad (8)$$

где  $\bar{w}$  – среднее значение яркости по текущему окну изображения  $I$ ;

- формирование изображения  $I^3$  на основе  $I^1$ :

$$I_{x,y}^3 = I_{x,y} - I_{x,y}^1. \quad (9)$$

- масштабирование на  $I^3$  отрезок  $[0,1]$  и применение к нему адаптивной эквализации гистограммы.

3. Для изображения  $I^3$ , которое интерпретируется как ФПТ1, выполняется расчет значений «верхней» ( $I_h^3$ ) и «нижней» ( $I_l^3$ ) ФПТ1 согласно формулам (2) и (3), соответственно.
4. Вычисление ФПТ2 ( $I^4$ ) по формуле (4).
5. Автоматизированный отбор наиболее значимых из изображений  $I^3$ ,  $I^4$ ,  $I_l^3$ ,  $I_h^3$ , который осуществляется на основании оценки уровня их яркости  $V$ :

$$V = \sum_{j=1}^{N_w} \left( (I')^{1-v_j} - (I')^{\frac{\bar{i}_j + \bar{I}}{2}} \right), \quad (10)$$

где  $\bar{i}_j$  – средняя яркость  $j$ -го окна (размерность окна оказывает значительное влияние на значение  $V$ );  $N_w$  – количество окон,  $I' = (\bar{I} + 0.5 \cdot (I_{\min} + I_{\max})) / 2$ , причем  $I_{\min}$  и  $I_{\max}$  – минимальный и максимальный уровни яркости обрабатываемого изображения, соответственно, а  $v_j$  – оценка уровня яркости  $j$ -го окна, вычисление которой происходит с использованием значений  $i_j^1 = \bar{i}_j^1 \cdot (1 - N_{il} / N_p)$  и  $i_j^2 = \bar{i}_j^2 \cdot N_{il} / N_p$ .

При этом  $\bar{i}_j^1$  и  $\bar{i}_j^2$  – средние значения по яркости пикселей  $j$ -го окна  $w^j$ , удовлетворяющих и не удовлетворяющих, соответственно, условию:

$$i_j \geq (\bar{i}_j + \bar{I}) / 2; \quad (11)$$

$N_{il}$  – количество пикселей  $j$ -го окна, удовлетворяющих условию (11);  $N_p$  – количество пикселей окна. Значение  $v_j$  определяется следующим образом:

- если  $N_{il} > 0$  и  $i_j^1 \neq 0$ , то  $v_j = (i_j)^{\left( 1 - \text{sgn}(i_j^1 - i_j^2) \frac{\min(i_j^1, i_j^2) \bar{i}_j}{\max(i_j^1, i_j^2)} \right)^{1 + \text{sgn}(i_j^1 - i_j^2) \bar{i}_j}}$ ;
- если  $N_{il} > 0$  и  $i_j^1 = 0$ , то  $v_j = (i_j)^{1 + i_j^1 \bar{i}_j}$ ;
- если  $N_{il} = 0$ , то  $v_j = (i_j)^{1 - i_j^1 \bar{i}_j}$ .

Для темных изображений значения  $V$  будут отрицательны, а для светлых – положительны.

Для  $I^3$ ,  $I^4$ ,  $I_l^3$ ,  $I_h^3$  вычисляется  $V$ , и те из них, для которых  $\bar{V} > |V|$ , где  $\bar{V}$  – среднее значение по оценкам яркости (вычисляется отдельно для темных и светлых снимков), включаются в ансамбль изображений  $I^5$ .

6. Применение к  $I^5$  сингулярного разложения, в результате которого формируется матрица  $I^6$  (матрица левых сингулярных векторов), которая интерпретируется как многомерное изображение размерностью  $[dy \times dx \times K]$ , каждая спектральная компонента которого масштабируется на отрезок  $[0,1]$ . Также формируются векторы коэффициентов  $C$  и  $S$ :

$$C_i = \left( \left| \sum_{j=1}^K (V_s)_{i,j} \right| + \left| \sum_{j=1}^K (V_s)_{j,i} \right| \right) / 2, i \in [1, K], \quad (12)$$

$$S_i = \operatorname{sgn} \left( \sum_{j=1}^K (V_s)_{i,j} + \sum_{j=1}^K (V_s)_{j,i} \right), i \in [1, K], \quad (13)$$

где  $V_s$  – матрица правых сингулярных векторов, которая имеет размерность  $K \times K$ , т.к. используется экономное представление сингулярного разложения.

7. Упорядочивание вектора  $C$  по убыванию и нормирование его элементов так, чтобы их сумма была равна 1.
8. Формирование вектора  $dC$ , содержащего разности для каждой пары соседних элементов вектора  $C$ .
9. Вычисление значения  $dC_a$  по формуле:

$$dC_a = \left( \left( \sum_{j=1}^{K-1} dC_j / (K-1) \right) + (dC_{\min} + dC_{\max}) / 2 \right) / 2, \quad (14)$$

где  $dC_{\min}$  и  $dC_{\max}$  – минимальный и максимальный элементы вектора  $dC$ , соответственно.

10. Выбор такого индекс  $i_{\max}$  на основе значения  $dC_a$  при просмотре элементов вектора  $dC$  с конца, для которого  $dC_{i_{\max}} \geq dC_a$ . Последующая нормировка элементов вектора  $dC$  с индексами от 1 до  $i_{\max} + 1$ , чтобы их сумма была равна 1.
11. Формирование итогового изображения  $I^7$  как взвешенной сумма наиболее значимых компонент матрицы  $I^6$  по формуле:

$$I_{y,x}^7 = \sqrt{\sum_{j=1}^{i_{\max}+1} (I_{x,y,j}^6 \cdot C_j)^{\frac{1}{C_j \cdot S_j + 2 - S_j / 2}} \cdot S_j}. \quad (15)$$

Применение к этому изображению адаптивной эквализации гистограммы.

**Экспериментальные результаты.** Предложенный метод был проверен на различных полутоновых изображениях, примером которых может служить снимок на рис. 2 а. Это оптическое микроскопическое изображение образца фосфоросодержащего сплава Fe–2%P–0,042%C с увеличением  $\times 250$ , полученное на металлографическом микроскопе GX-51 с цифровой системой анализа изображений фирмы «Olympus», которое имеет засвеченную область, неоднородный фон, шумы и недостаточный уровень контраста для проведения достоверного анализа.

На рис. 2 б и 2 в представлены результаты предобработки этого изображения с применением адаптивной степенной коррекции яркости и локального вычитания фона, соответственно. В обоих случаях достигается выравнивание уровня яркости в целом по изображению в сравнении с исходными данными.

На рис. 3 и 4 представлена визуализация «нижней» и «верхней» ФПТ1, а также МФТ2, получаемой на их основе, для обоих способов предобработки.

На рис. 5 представлены результирующие изображения для обоих способов предобработки. При получении этих изображений горизонтальная и вертикальная

размерность окна для автоматической оценки яркости  $V$  на основании экспериментальных исследований были выбраны равным  $\frac{1}{4}$  от соответствующих размерностей исходного снимка. При этом на основании  $V$  для изображения на рис. 5 а были автоматически выбраны  $I^3$  и  $I^4$  (предобработанное изображение и ФПТ2) в качестве  $I^5$ , для которого было применено сингулярное разложение, а для изображения на рис. 5 б –  $I^3$  и  $I_l^3$  (предобработанное изображение и «нижняя» ФПТ1).

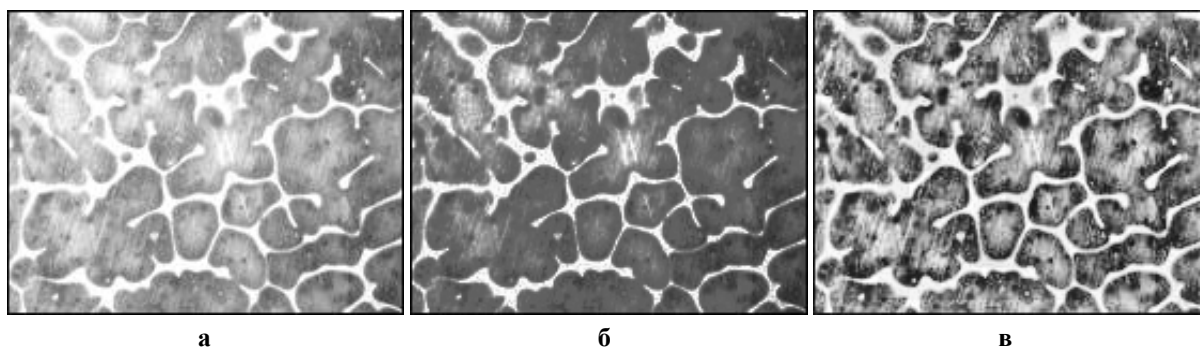


Рис. 2. Результат предобработки: а – исходное микроскопическое изображение (142x186); б – адаптивная степенная коррекция яркости; в – локальное вычитание фона

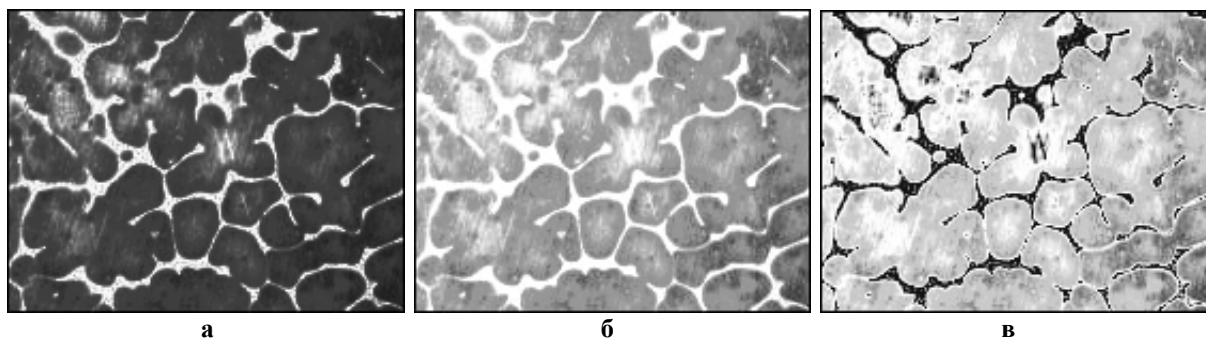


Рис. 3. Нечеткие функции принадлежности: а – «нижняя», б – «верхняя» ФПТ1 и в – ФПТ2 с предобработкой на основе адаптивной степенной коррекции яркости

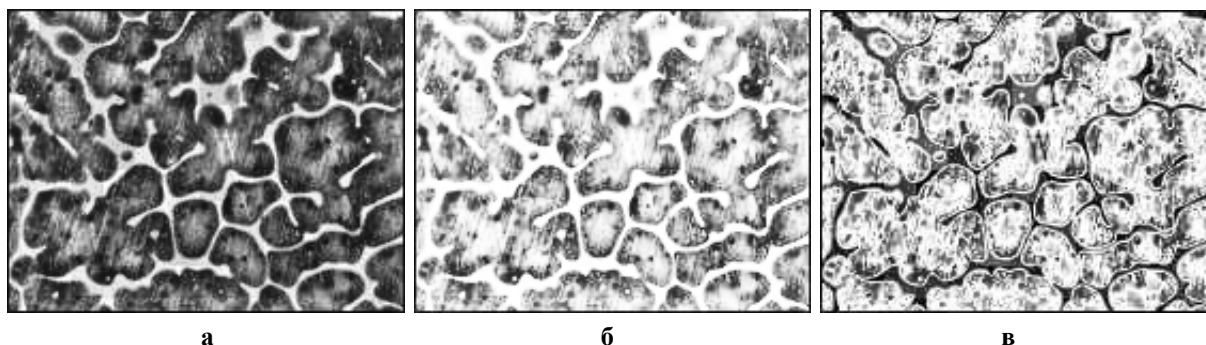


Рис. 4. Нечеткие функции принадлежности: а – «нижняя», б – «верхняя» ФПТ1 и в – ФПТ2 с предобработкой на основе локального вычитания фона

Несмотря на различный уровень детализации в разных частях снимка в обоих случаях (рис. 5 а, 5 б) структура изображения в целом, а также различных его областей была выделена достаточно четко. В то же время использование всех четырех изображений  $I^3$ ,  $I^4$ ,  $I_l^3$ ,  $I_h^3$  в качестве  $I^5$  (рис. 5 в) привело к снижению уровня

детализации по сравнению с рис. 5 а.

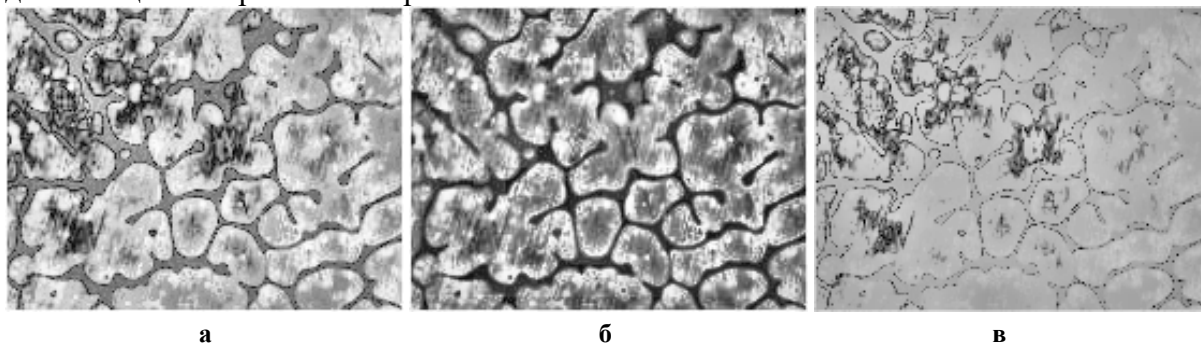


Рис. 5. Результирующее изображение при использовании: а – адаптивной степенной коррекции яркости; б – локального вычитания фона; в – адаптивной степенной коррекции яркости с применением сингулярного разложения для  $I^3$ ,  $I^4$ ,  $I_l^3$ ,  $I_h^3$

### Выводы

Использование нечеткой логики типа 2 позволяет синтезировать дополнительные параметры изображения с использованием нелинейных функций преобразования исходных данных, что дает возможность:

- усилить влияние вариаций яркостных свойств анализируемых изображений на основе локального преобразования уровней яркости исходных данных;
- осуществлять автоматизированный отбор наиболее значимых на основе оценки яркости при формировании входных данных для ортогонального преобразования
- применять методы многомерного анализа данных, в частности, сингулярное разложение, для перехода в новое пространство информативных признаков с последующим автоматическим отбором наиболее значимых компонент для формирования результирующего изображения.

### Список использованной литературы

1. Bezdek J.C., Keller J., Krishnapuram R., Pal N.R. Fuzzy Models and Algorithms for Pattern Recognition and Image Processing. Handbooks of Fuzzy Sets series. Boston: Kluwer Academic Publisher 1999. 678 p.
2. Tizhoosh H.R., NauBecker H. Fuzzy Image Processing: An Overview. Handbook on Computer Vision and Applications. Academic Press. 1999. Vol. 2. P. 683–727.
3. Fuzzy Sets and Their Extensions: Representation, Aggregation and Models / edited by Bustince H., Herrera F., Montero J. Springer, 2008. 674 p.
4. Bloch I. Signal and Image Processing. Telecom ParisTech, 2008. 295 p.
5. Handbook of Biomedical Imaging / edited by Paragios N., Duncan J., Ayache N. Springer, 2015. 308 p.
6. Zadeh L.A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. *Information Sciences*. 1975. Vol. 8. P. 199–249.
7. Chi Z., Yan H., Pham T. Fuzzy algorithms: With Applications to Image Processing and Pattern Recognition. Singapore; – New Jersey; – London; – Hong Kong : Word Scientific, 1998. 225 p.
8. Castillo O., Melin P. Type-2 Fuzzy Logic: Theory and Applications. Springer-Verlag, 2008. 223 p.
9. Mendel J.M., John R. Type 2 Fuzzy Sets Made Simple. *IEEE Transactions On Fuzzy Systems*. 2002. Vol. 10. No 2. P. 117–127.
10. Mendel J.M., Robert I.J., Feilong L. Interval Type 2 Fuzzy Logic Systems Made Simple. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*. 2006. Vol. 14. No 6. P. 808–821.

11. Akhmetshina L., Yegorov A. Improvement of Grayscale Images in Orthogonal Basis of the Type-2 Membership Function. *CMIS-2021: The Fourth International Workshop on Computer Modeling and Intelligent Systems*, Zaporizhzhia, April 27 2021. P. 465–474.

### References

1. Bezdek, J.C., Keller, J., Krishnapuram, R., & Pal, N.R. (1999). *Fuzzy Models and Algorithms for Pattern Recognition and Image Processing*. Handbooks of Fuzzy Sets series. Boston : Kluwer Academic Publisher.
2. Tizhoosh, H.R., & HauBecker, H. (1999). *Fuzzy Image Processing: An Overview*. Handbook on Computer Vision and Applications. *Academic Press*. **2**, 683–727.
3. Bustince, H., Herrera, F., & Montero, J. (Ed.) (2008). *Fuzzy Sets and Their Extensions: Representation, Aggregation and Models*. Springer.
4. Bloch, I. (2008). *Signal and Image Processing*. Telecom ParisTech.
5. Paragios, N., Duncan, J., & Ayache, N. (Ed.) (2015). *Handbook of Biomedical Imaging / edited by Springer*. 2015. 308 p.
6. Zadeh, L.A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. *Information Sciences*. **8**, 199–249.
7. Chi, Z., Yan, H., & Pham, T. (1998). *Fuzzy algorithms: With Applications to Image Processing and Pattern Recognition*. Singapore; – New Jersey; – London; – Hong Kong : Word Scientific.
8. Castillo, O., Melin, P. (2008). *Type-2 Fuzzy Logic: Theory and Applications*. Springer-Verlag 2008. 223 p.
9. Mendel J.M., John R. Type 2 Fuzzy Sets Made Simple. *IEEE Transactions On Fuzzy Systems*. **10**, 2, 117-127.
10. Mendel, J.M., Robert, I.J., & Feilong, L. (2006). Interval Type 2 Fuzzy Logic Systems Made Simple. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*. **14**, 6, 808-821.
11. Akhmetshina, L., & Yegorov, A. (2021). Improvement of Grayscale Images in Orthogonal Basis of the Type-2 Membership Function. *CMIS-2021: The Fourth International Workshop on Computer Modeling and Intelligent Systems*, Zaporizhzhia, April 27 2021, pp.. 465–474.

Ахметшина Людмила Георгиевна – д.т.н., профессор, профессор электронных вычислительных машин Днепропетровского национального университета имени Олеся Гончара. E-mail: akhmlul@gmail.com, ORCID: 0000-0002-5802-0907.

Егоров Артем Александрович – старший преподаватель кафедры компьютерных наук и информационных технологий Днепропетровского национального университета имени Олеся Гончара. E-mail: for\_\_students@ukr.net, ORCID: 0000-0002-7558-785X

УДК 004.048+004.94

С.А. БАБІЧЕВ

Університет Яна Евангелиста Пуркіне в Усті на Лабі, Чехія  
Херсонський державний університет, Херсон, Україна

Л.М. ЯСІНСЬКА-ДАМРІ

Українська академія друкарства, Львів, Україна

## МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ РЕКОНСТРУКЦІЇ ГЕННОЇ РЕГУЛЯТОРНОЇ МЕРЕЖІ НА ОСНОВІ КОМПЛЕКСНОГО ЗАСТОСУВАННЯ ТОПОЛОГІЧНИХ ПАРАМЕТРІВ

*У статті представлено результати моделювання щодо визначення оптимальної топології генної регуляторної мережі в процесі її реконструкції із застосуванням кореляційного алгоритму реконструкції мережі. Генна регуляторна мережа представлялася у вигляді неорієнтованого графу, у якому вузли є гени або метаболіти, а дуги визначають зв'язок між відповідними елементами мережі. Оцінка топології мережі здійснювалася шляхом розрахунку значень одиночних топологічних параметрів, які враховують як структуру мережі, так і кількість і характер зв'язків між відповідними елементами. Були досліджені наступні одиночні топологічні параметри: кількість вузлів мережі, ступінь вузлів або їх зв'язність, щільність мережі, коефіцієнти кластеризації та централізації і гетерогенність. Остаточне рішення щодо топології мережі приймалося на основі аналізу узагальненого топологічного параметру, що розраховувався із застосуванням функції бажаності Харрінгтона. Моделювання процесу реконструкції генної мережі на основі профілів експресії генів було проведено у програмному середовищі Cytoscape з використанням профілів експресії генів даних toe430 бази даних ArrayExpress, що містять інформацію про експресію генів мезенхімальних клітин двох типів: нервового гребня та мезодерми. Процес реконструкції генної регуляторної мережі здійснювався із застосуванням кореляційного алгоритму, практична реалізація якого передбачає розрахунок коефіцієнтів парної кореляції між профілями експресії генів, що досліджуються. Топологія мережі у даному випадку формується на основі значення трешолдінгового коефіцієнта  $\tau$ , що визначає порогове значення наявності зв'язку між парою відповідних генів мережі. У результаті моделювання були створені діаграми розподілу одиночних топологічних параметрів і узагальненого топологічного індексу від значення коефіцієнту трешолдінгу. Аналіз отриманих діаграм дозволив визначити оптимальну топологію генної мережі.*

*Ключові слова: генна регуляторна мережа, топологія мережі, топологічні параметри, функція бажаності Харрінгтона, трешолдінг, алгоритм кореляційного виводу.*

S.A. BABICHEV

Jan Evangelista Purkyně University in Ústí nad Labem, Czech Republic  
Kherson State University, Kherson, Ukraine

L.M. YASINSKA-DAMRI

Ukrainian Academy of Printing, Lviv, Ukraine

## MODELLING OF GENE REGULATORY NETWORK RECONSTRUCTION PROCEDURE BASED ON THE COMPLEX USE OF TOPOLOGICAL PARAMETERS

*The paper presents the simulation results concerning the determination of the gene regulatory network optimal topology during its reconstruction using the correlation inference algorithm. The gene regulatory network was presented as an undirected graph, in which the nodes are genes or metabolites, and the arcs define the connection between the corresponding network elements. The assessment of the network topology was carried out by calculating the values of single topological parameters, taking into account both the structure of the network and the nature of the connections between the corresponding elements. The following single topological parameters were investigated: the number of nodes in the network, the degree of nodes or their connectivity, the density of the network, the coefficients of clustering and centralization, and network heterogeneity. The final decision regarding the network topology was done based on the analysis of the generalized topological index, which was calculated using the Harrington desirability function. Modelling of the gene network reconstruction process based on gene expression profiles was carried out in the Cytoscape software environment using the toe430 gene expression profiles of the ArrayExpress database, which contains information concerning the genes expression of two types of mesenchymal cells: neural crest and mesoderm. The*



*process of gene regulatory network reconstruction was carried out using a correlation inference algorithm, the practical implementation of which involves calculating the pair correlation coefficients between the studied gene expression profiles. The network topology, in this case, was formed on the basis of the thresholding coefficient  $\tau$ , which determines the threshold value for the presence of a connection between a pair of corresponding network genes. As a result of modelling, the diagrams of the distribution of single topological parameters and the generalized topological index versus the value of the thresholding coefficient were created. The analysis of these diagrams can allow us to determine the gene regulatory network optimal topology.*

*Keywords: gene regulatory network, network topology, topological parameters, Harrington desirability function, thresholding, correlation inference algorithm.*

**С.А. БАБИЧЕВ**

Университет Яна Евангелиста Пуркине в Усти на Лабє, Чехия  
Херсонский государственный университет, Херсон, Украина

**Л.М. ЯСИНСКАЯ-ДАМРИ**

Украинская академия книгопечатания, Львов, Украина

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РЕКОНСТРУКЦИИ ГЕННОЙ РЕГУЛЯТОРНОЙ СЕТИ НА ОСНОВЕ КОМПЛЕКСНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ**

*В статье представлены результаты моделирования по определению оптимальной топологии генной регуляторной сети в процессе ее реконструкции с применением корреляционного алгоритма реконструкции сети. Генная регуляторная сеть представлялась в виде неориентированного графа, в котором узлы являются генами или метаболитами, а дуги определяют связь между соответствующими элементами сети. Оценка топологии сети осуществлялась путем расчета значений одиночных топологических параметров, учитывающих как структуру сети, так и характер связей между соответствующими элементами. Были исследованы следующие одиночные топологические параметры: количество узлов сети, степень узлов или их связность, плотность сети, коэффициенты кластеризации и централизации и гетерогенность. Окончательное решение касательно топологии сети принималось на основе анализа обобщенного топологического параметра, который рассчитывался с применением функции желательности Харрингтона. Моделирование процесса реконструкции генной сети на основе профилей экспрессии генов проводилось в программной среде Cytoscape с использованием профилей экспрессии генов тое430 базы данных ArrayExpress, содержащих информацию о экспрессии генов мезенхимальных клеток двух типов: нервного гребня и мезодермы. Процесс реконструкции генной регуляторной сети осуществлялся с применением корреляционного алгоритма, практическая реализация которого предполагает расчет коэффициентов парной корреляции между исследуемыми профилями экспрессии генов. Топология сети в данном случае формировалась на основе трешолдингового коэффициента  $\tau$ , который определяет пороговое значение наличия связи между парой соответствующих генов сети. В результате моделирования были построены диаграммы распределения одиночных топологических параметров и обобщенного топологического индекса от значения коэффициента трешолдинга. Анализ полученных диаграмм позволил определить оптимальную топологию генной сети.*

*Ключевые слова: генная регуляторная сеть, топология сети, топологические параметры, функция желательности Харрингтона, трешолдинг, алгоритм корреляционного вывода.*

### **Постановка проблеми**

Сучасні системи обробки інформації у більшості випадків ґрунтуються на використанні аналогій функціонування біологічних механізмів і процесів, що протікають у живих організмах. До таких процесів слід віднести функціонування природної нейронної мережі, імунні процеси, генна мережа тощо. Особливістю таких систем є децентралізована паралельна обробка інформації, великий рівень складності, здатність навчатися, розпізнавати інформацію та формувати рішення. Створення штучних моделей сучасних біологічних систем та дослідження їхньої поведінки можливе на основі системного підходу, який передбачає комплексне використання методів молекулярної біології, математики, інформатики, законів фізики, і створює умови для розуміння, які чинники визначають характер функціонування біологічної

системи з метою корегування даного процесу. Реконструкція та моделювання генної регуляторної мережі (ГРМ) формує основу для дослідження та аналізу характеру взаємодій генів і впливів цих взаємодій на функціональні можливості біологічного організму. Складність процесу реконструкції ГРМ визначається тим, що експериментальні дані, які використовуються для реконструкції мережі, зазвичай не дозволяють однозначно визначити структуру мережі та характер взаємозв'язку між її вузлами. Окрім того, велика кількість генів, які визначають структуру та обсяг мережі, ускладнює процес інтерпретації результатів, що отримуються. Тому виникає необхідність у дослідженнях по кількісній оцінці топології мережі та характеру взаємозв'язку між її елементами зі застосуванням у якості експериментальних даних профілів експресій генів, отриманих шляхом ДНК-мікрочіпових експериментів.

### **Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Реконструкція ГРМ та інтерпретування результатів її роботи є досить складними задачами, які у даний час не мають однозначного розв'язку. Перші роботи по реконструкції біологічних генних мереж із експериментальних даних були опубліковані у кінці 90-х років минулого століття [1-4]. У даних роботах було запропоновано декілька підходів по даному типу моделювання. У [5-7] опубліковано декілька обзорів, які стосуються методів реконструкції та моделювання ГРМ. Основна ідея реконструкції ГРМ полягає у використанні експериментальних даних експресій генів для отримання моделей шляхом оцінки та аналізу зав'язків між молекулярними об'єктами. Однак слід зазначити, що даний процес є дуже складним внаслідок того, що дана проблема має комбінаторний характер, з одного боку, і експериментальні дані у багатьох випадках неповні та неточні, з іншого боку. Крім того, наявність великої кількості параметрів, змінних та обмежень викликає необхідність застосування чисельних та обчислюваних методів.

Сучасні технології отримання даних експресій генів мають тенденцію охоплювати максимальну кількість змінних системи [8-11]. Наприклад, технологія мікрочіпів ДНК дозволяє вимірювати експресію десятків тисяч генів одночасно, тобто кожний об'єкт, що досліджується, характеризується вектором експресій генів довжиною десятки тисяч одиниць. Використання повного набору параметрів дозволяє підвищити точність моделі, але при цьому ускладнюється процес пошуку адекватної моделі, оскільки розмірність простору пошуку експоненціально зростає зі збільшенням кількості параметрів моделі. Вочевидь, що у такому випадку гени можуть бути згруповані у модулі або кластери в залежності від функціональної подібності профілів їх експресій. Технологія кластеризації профілів експресій генів дозволяє вирішити проблему зменшення кількості генів [12-15]. Моделі, що отримані з використанням кластерів взаємно координуваних генів, легше інтерпретуються в процесі подальшої валідації моделі з використанням додаткової інформації щодо експресії генів. Але при цьому виникає проблема вибору кількості кластерів та рівню деталізації процесу кластеризації даних. Таким чином, можна зробити висновок, що ГРМ представляють складну систему взаємодіючих елементів, у якій прості невеликі компоненти виконують комплексне колективне завдання. При цьому слід зазначити, що на даний час не існує ефективної технології реконструкції генної регуляторної мережі, яка здатна з високим ступенем ймовірності передбачити характер подальшого розвитку біологічного організму на генному рівні.

**Метою статті** є проведення моделювання щодо оптимізації топології генної регуляторної мережі на основі комплексного застосування одиночних топологічних параметрів мережі та функції бажаності Харрінгтона.

### Викладення основного матеріалу дослідження

ГРМ представляє собою орієнтований або неорієнтований граф, дуги якого можуть бути зваженими (при наявності ваги, що визначає силу зв'язку) або незваженими. Тому для визначення параметрів, що визначають топологію мережі, може бути використана теорія графів. У процесі моделювання розраховувалися наступні топологічні параметри мережі [16]:

- *Кількість вузлів* мережі визначає загальну кількість генів, що мають зв'язки між собою.
- *Ступенем вузла мережі* або його *зв'язністю* називають сумарну вагу зв'язків (дуг), що з'єднують даний вузол із сусідніми вузлами:

$$k_i = \sum_{j=1, i \neq j}^{n_i} \omega_{ij}, \quad (1)$$

де  $n_i$  – кількість вузлів  $i$ -го гена,  $\omega_{ij}$  – вага дуги, що з'єднує гени  $i$  та  $j$ .

- *Середній ступінь* або *середня зв'язність* мережі визначається як середнє значення ступенів усіх вузлів мережі:

$$k_{\text{сеп}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i. \quad (2)$$

- *Максимальний ступінь* визначає максимальне значення елементів вектору зв'язностей всіх вузлів мережі:

$$k_{\text{max}} = \max(\overline{k_1}, \overline{k_i}). \quad (3)$$

- *Щільність мережі* визначається як відношення кількості зважених зв'язків між вузлами мережі до максимально можливої кількості зв'язків між вузлами даної мережі:

$$Dens = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \omega_{ij}}{0.5 \times n(n-1)}. \quad (4)$$

- *Коефіцієнт кластеризації вузла* визначає ймовірність того, що найближчі сусіди даного вузла зв'язані між собою безпосередньо. *Коефіцієнт кластеризації мережі* визначається як середнє значення коефіцієнтів кластеризації всіх її вузлів:

$$Cl = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{0.5 \times k_i(k_i - 1)}, \quad (5)$$

де  $n$  – кількість генів у мережі,  $e_i$  – кількість реальних зв'язків вузла  $i$  із сусідніми вузлами,  $k_i$  – кількість сусідів гена  $i$ , враховуючи сам ген, які можуть скласти повноцінний кластер.

- *Коефіцієнт централізації мережі* визначає ступінь її близькості до топології зірки. Даний коефіцієнт розраховується за формулою:

$$Centr = \frac{n}{n-2} \left( \frac{k_{\text{max}}}{n-1} - Dens \right). \quad (6)$$

- *Гетерогенність мережі* визначає ступінь неоднорідності топології мережі та виражається через дисперсію і середнє значення середнього ступеня вузлів за формулою:

$$G = \frac{\sqrt{\text{var}(k_{\text{cep}})}}{\text{mean}(k_{\text{cep}})} . \quad (7)$$

Параметри (1) – (7) дозволяють зробити попередню оцінку топології моделі ГРМ. При незмінній кількості вузлів менші значення щільності та кластеризації мережі й більше значення гетерогенності свідчить про більш високу якість топології мережі за рахунок її спрощення і різноманітності при незмінній кількості вузлів. Значення коефіцієнта централізації свідчить про ступень близькості топології мережі до зіркоподібної структури. При цьому слід відзначити, що оптимальна структура мережі відповідає мінімальним значенням щільності вузлів і коефіцієнта кластеризації та максимальним значенням коефіцієнтів централізації та гетерогенності. Для прийняття остаточного рішення по вибору структури мережі запропоновано комплексний критерій на основі функції бажаності Харрінгтона, використання якої передбачає перетворення шкал топологічних параметрів у лінійну шкалу безрозмірного показника  $Y$ , значення якого змінюється від -2 до 5. Приватні бажаності для кожного значення показника  $Y$  розраховуються у відповідності до формули:

$$d = \exp(-\exp(-Y)) . \quad (8)$$

Шкала бажаності має інтервал від 0 до 1. Значення  $d = 0$  відповідає абсолютно неможливій топології з точки зору даного критерію, а значення  $d = 1$  – найкращій топології. Вибір оцінок на шкалі бажаності 0,63 і 0,37 пояснюється зручністю розрахунків:  $0,63=1-1/e$ , а  $0,37=1/e$ . Значення 0,37 зазвичай відповідає межі допустимих значень. Узагальнений індекс бажаності Харрінгтона як середнє геометричне значення усіх приватних бажаностей:

$$GDI = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n d_i} . \quad (9)$$

Максимальне значення індексу бажаності Харрінгтона відповідає коефіцієнту трешолдінгу, який дозволяє отримати оптимальну структуру генної мережі на основі комплексного аналізу її топологічних параметрів.

Процес реконструкції ГРМ на основі кореляційного аналізу передбачає розрахунок коефіцієнтів парної кореляції між профілями експресій генів, що досліджуються. Оскільки у випадку аналізу матриці експресій генів вектори профілів являють собою послідовності раціональних чисел, доцільним є використання метода Пірсона для розрахунку парної кореляції між відповідними профілями. Коефіцієнт парної кореляції у випадку його значущості представляє силу взаємозв'язку між відповідними вузлами мережі. Вага дуги дорівнює коефіцієнту кореляції пари профілів експресій генів, між якими оцінюється зв'язок. Топологія мережі у даному випадку визначається значенням трешолдінгового коефіцієнта  $\tau$ , що визначає порогове значення наявності зв'язку між парою генів мережі. Ваговий коефіцієнт дуги, що з'єднує відповідні гени, визначається наступним чином:

$$\omega(g_a, g_b) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } r(g_a, g_b) < \tau; \\ r(g_a, g_b), & \text{якщо } r(g_a, g_b) \geq \tau. \end{cases} \quad (10)$$

Моделювання процесу реконструкції генної мережі на основі профілів експресій генів було проведено у програмному середовищі *CytoScape* [17] з використанням профілів експресій генів даних *moe430* бази даних *ArrayExpress*[18], що містять

інформацію про експресію генів мезенхімальних клітин двох типів: нервового гребня та мезодерми. Дані отримані шляхом ДНК-мікрочіпових експериментів. Матриця вихідних даних містила 147 генів та 20 умов визначення експресій відповідних генів. Практична реалізація процесу моделювання передбачала наступні етапи:

Етап I. Постановка проблеми. Формування даних.

1. Формування вихідних даних у вигляді матриці, де рядки представляють гени, а стовпці – умови проведення ДНК-мікрочіпового експерименту.

Етап II. Приблизна оцінка інтервалу зміни трешолдінгового коефіцієнта.

2. Завдання приблизного інтервалу та кроку зміни коефіцієнта трешолдінгу.

Ініціалізація початкового значення трешолдінгового коефіцієнта:  $\tau = \tau_{\min}$ .

3. Реконструкція ГРМ, топологія якої відповідає завданому значенню трешолдінгового коефіцієнта.

4. Розрахунок топологічних параметрів отриманої генної регуляторної мережі.

5. Якщо значення коефіцієнта трешолдінгу менше за максимальне, збільшення даного значення на  $d\tau$  (крок зміни коефіцієнта трешолдінгу) та перехід на крок 3 даної процедури. У протилежному випадку, побудова діаграм залежності отриманих топологічних параметрів від значення трешолдінгового коефіцієнта.

6. Аналіз отриманих результатів, визначення нового, більш вузького інтервалу та меншого кроку зміни значення трешолдінгового коефіцієнта.

Етап III. Визначення оптимального значення коефіцієнта трешолдінгу.

7. Реконструкція генної регуляторної мережі в межах нового інтервалу зміни значень трешолдінгового коефіцієнта. Розрахунок параметрів оцінки топології генної регуляторної мережі на кожному кроці зміни значення трешолдінгового коефіцієнта.

8. Побудова діаграм зміни значень топологічних параметрів у залежності від коефіцієнта трешолдінгу. Аналіз отриманих результатів. Визначення оптимального значення трешолдінгового коефіцієнта.

Етап IV. Реконструкція генної регуляторної мережі.

9. Реконструкція ГРМ із застосування оптимального значення коефіцієнта трешолдінгу.

На рис. 1 зображені діаграми зміни одиночних топологічних параметрів при зміні коефіцієнта трешолдінгу від 0,45 до 0,55 з кроком 0,01. При цьому, у випадку наявності декількох зв'язаних між собою, але відокремлених від основної мережі генів, виділялася мережа генів, що мають найбільшу кількість взаємозв'язаних вузлів. Підмережа з декількома вузлами видалялася з мережі.

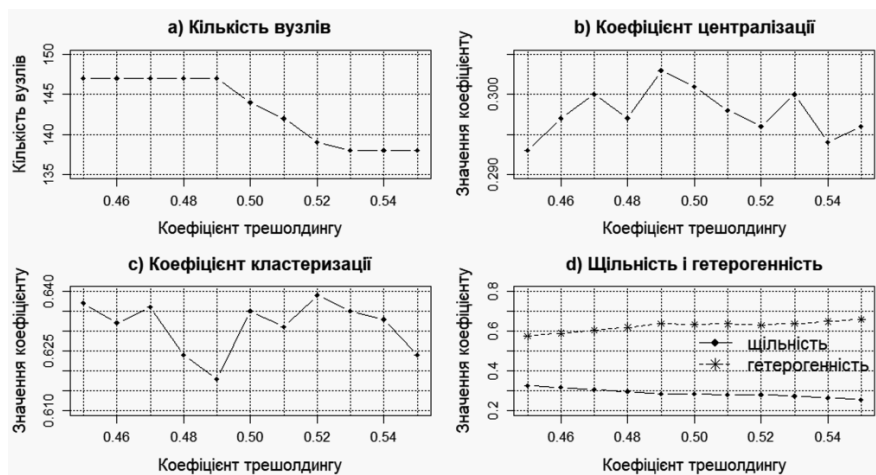


Рис. 1. Діаграми зміни одиночних параметрів оцінки топології генної мережі в інтервалі зміни коефіцієнта трешолдінгу від 0,45 до 0,55 з кроком 0,01

Як можна бачити з рис. 1, значення коефіцієнта трешолдінгу, що визначає структуру ГРМ, визначається чотирма топологічними параметрами: коефіцієнтами кластеризації, централізації і гетерогенності мережі та щільністю її вузлів. При цьому слід відзначити, що оптимальна структура мережі відповідає мінімальним значенням щільності вузлів і коефіцієнта кластеризації та максимальним значенням коефіцієнтів централізації та гетерогенності. На рис. 2 зображено діаграму залежності значення комплексного критерію від трешолдінгового коефіцієнта, значення якого змінювалися в інтервалі від 0,45 до 0,55 з кроком 0,01.

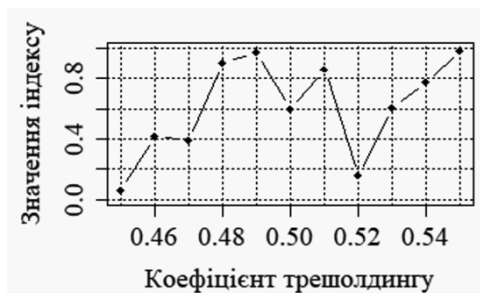


Рис. 2. Діаграма розподілу індексу бажаності Харрінгтона при різних значеннях коефіцієнта трешолдінгу

Аналіз отриманих результатів показує, що оптимальним за одиночними параметрами оцінки топології генної мережі є значення коефіцієнта трешолдінгу 0,49. У цьому випадку мережа містить 147 генів, коефіцієнт централізації досягає максимуму, а коефіцієнт кластеризації – мінімуму. Значення коефіцієнтів щільності та гетерогенності в інтервалі зміни трешолдінгового коефіцієнта від 0,45 до 0,49 монотонно змінюються у меншу та більшу сторони відповідно. В інтервалі від 0,49 до 0,51 швидкість зміни даних параметрів дорівнює нулю. Значення комплексного критерію, розрахованого на основі функції бажаності Харрінгтона, також досягає максимуму при значенні коефіцієнта трешолдінгу 0,49. На рис. 3 зображений результат реконструкції генної регуляторної мережі у випадку застосування алгоритму кореляційного виводу з коефіцієнтом трешолдінгу 0,49.

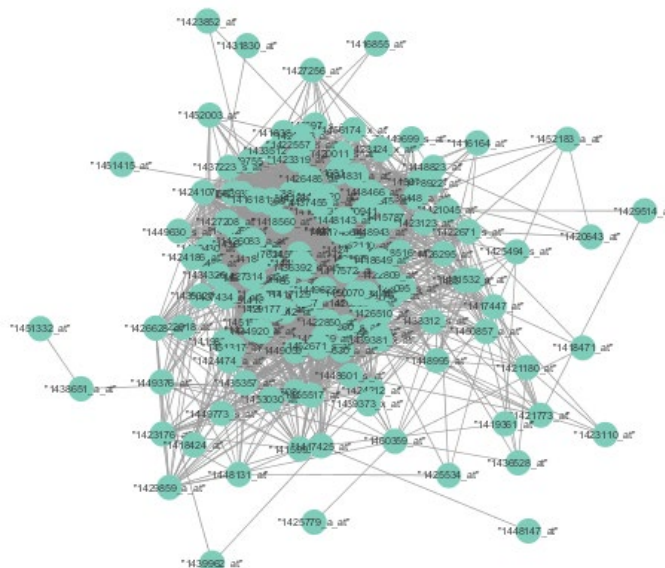


Рис. 3. Результат реконструкції генної мережі при застосуванні алгоритму кореляційного виводу

### Висновки

У статті представлені результати моделювання щодо оптимізації значення трешолдінгового коефіцієнта при реконструкції генної регуляторної мережі при застосуванні кореляційного алгоритму реконструкції мережі. Даний параметр визначає топологію мережі, що отримується, та її функціональні можливості в процесі подальшого моделювання. Отримані діаграми залежності значень топологічних параметрів від коефіцієнту трешолдінгу, аналіз яких показав, що більш якісна з точки зору топології є мережа з меншими значеннями середньої щільності вузлів і коефіцієнта кластеризації та більшими значеннями коефіцієнтів централізації й гетерогенності мережі. Остаточне рішення по формуванню мережі (фіксація значення коефіцієнта трешолдінгу) приймалося на основі максимуму узагальненого індексу бажаності Харрінгтона, який містив як компоненти відповідні топологічні параметри генної мережі.

### Список використаної літератури

1. D'haeseleer P., Wen X., Fuhrman S., Somogyi R. Linear modeling of mRNA expression levels during CNS development and injury. *Pacific Symposium on Biocomputing*. 1999. P. 41–52.
2. Liang S., Fuhrman S., Somogyi R. REVEAL, a general reverse engineering algorithm for inference of genetic network architectures. *Pacific Symposium on Biocomp*. 1998. P. 18–29.
3. Friedman N., Linial M., Nachman I., Pe'er D. Using Bayesian networks to analyse expression data. *Journal of Computational Biology*. 2000. №7(3-4). P. 601–620.
4. Chen T., He H. L., Church G. M. Modeling gene expression with differential equations. *Proceedings of the Pacific Symposium on Biocomputing*. 1999. P. 29–40.
5. Bansal M., Belcastro V., Ambesi-Impombato A., di Bernardo D. How to infer gene networks from expression profiles. *Molecular Systems Biology*. 2007. №3(78). P.1–10.
6. Yaghoobi H., Haghipour S., Hamzeiy H., et al. A Review of Modeling Techniques for Genetic Regulatory Networks. *Journal of Medical Signals and Sensors*. 2012. №2(1). P. 61–70.
7. Emmert-Streib F., Dehmer M., Haibe-Kains B. Gene regulatory networks and their applications: understanding biological and medical problems in terms of networks. *Frontiers in cell and developmental biology*. 2014. P. 1–7.
8. Sonesson C., Delorenzi M. A comparison of methods for differential expression analysis of RNA-seq data. *BMC Bioinformatics*. 2013. №14(91). P. 1–18.
9. Arnone M.I., Davidson E.H. The hardwiring of development: organization and function of genomic regulatory systems. *Development*. 1997. №124(10). P. 1851–1864.
10. Jeong H., Tombor B., Albert R., et al. The large-scale organization of metabolic networks. *Nature*. 2000. № 407(6804). P. 651–654.
11. Bork P., Jensen L.J., von Mering C., et al. Protein interaction networks from yeast to human. *Current Opinion in Structural Biology*. 2004. №14(3). P. 292–299.
12. Babichev S., Taif M. A., Lytvynenko V. Inductive model of data clustering based on the agglomerative hierarchical algorithm. *Proceeding of the 2016 IEEE First International Conference on Data Stream Mining and Processing (DSMP)*. 2016. P.19–22.
13. Babichev S., Taif M. A., Lytvynenko V., Korobchynskyi M. Objective clustering inductive technology of gene expression sequences features. *Communication in Computer and Information Science*. 2017. № 716. P. 359–372.

14. Babichev S., Lytvynenko V., Skvor J., Fiser J. Model of the objective clustering inductive technology of gene expression profiles based on SOTA and DBSCAN clustering algorithms. *Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2018. №.689. P. 21–39.
15. Pontes B., Giráldez R., Aguilar-Ruiz J. S. Biclustering on expression data: A review. *Journal of Biomedical Informatics*. 2015. № 57. P. 163–180.
16. Assenov Y., Ramirez F., Schelhorn S.-E., et al. Computing topological parameters of biological networks. *Bioinformatics*. 2008. №24(2). P. 282–284.
17. Shannon P., Markiel A., et al. Cytoscape: a software environment for integrated models of biomolecular interaction networks. *Genome Res*. 2003. P. 2498–2504.
18. Bhattacharjee V., Mukhopadhyay P., et al. Neural crest and mesoderm lineage-dependent gene expression in orofacial development. *Differentiation*, 2007. P. 128–139.

### References

1. D'haeseleer, P., Wen, X., Fuhrman, S., & Somogyi R. (1999). Linear modeling of mRNA expression levels during CNS development and injury. *Pacific Symposium on Biocomputing*. pp. 41–52.
2. Liang, S., Fuhrman, S., & Somogyi, R. (1998). REVEAL, a general reverse engineering algorithm for inference of genetic network architectures. *Pacific Symposium on Biocomp*. pp. 18–29.
3. Friedman, N., Linial, M., Nachman, I., & Pe'er, D. (2000). Using Bayesian networks to analyse expression data. *Journal of Computational Biology*. 7(3-4), 601–620.
4. Chen, T., He, H. L., & Church, G. M. (1999). Modeling gene expression with differential equations. *Proceedings of the Pacific Symposium on Biocomputing*. pp. 29–40.
5. Bansal, M., Belcastro, V., Ambesi-Impiomato, A., & di Bernardo, D. (2007). How to infer gene networks from expression profiles. *Molecular Systems Biology*. 3(78), 1–10.
6. Yaghoobi, H., Haghypour, S., Hamzeiy, H., et al. (2012). A Review of Modeling Techniques for Genetic Regulatory Networks. *Journal of Medical Signals and Sensors*. 2(1), 61–70.
7. Emmert-Streib, F., Dehmer, M., & Haibe-Kains, B. (2014). Gene regulatory networks and their applications: understanding biological and medical problems in terms of networks. *Frontiers in cell and developmental biology*. pp. 1–7.
8. Sonesson, C., & Delorenzi, M. (2013). A comparison of methods for differential expression analysis of RNA-seq data. *BMC Bioinformatics*. 14(91), 1–18.
9. Arnone, M.I., & Davidson E.H. (1997). The hardwiring of development: organization and function of genomic regulatory systems. *Development*. 124(10), 1851–1864.
10. Jeong, H., Tombor, B., Albert, R., et al. (2000). The large-scale organization of metabolic networks. *Nature*. 407(6804), 651–654.
11. Bork, P., Jensen, L.J., von Mering, C., et al. (2004). Protein interaction networks from yeast to human. *Current Opinion in Structural Biology*. 14(3), 292–299.
12. Babichev, S., Taif, M. A., & Lytvynenko V. (2016). Inductive model of data clustering based on the agglomerative hierarchical algorithm. *Proceeding of the 2016 IEEE First International Conference on Data Stream Mining and Processing (DSMP)*. pp.19–22.



13. Babichev, S., Taif, M. A., Lytvynenko, V., & Korobchynskiy, M. (2017). Objective clustering inductive technology of gene expression sequences features. *Communication in Computer and Information Science*. **716**, 359–372.
14. Babichev, S., Lytvynenko, V., Skvor, J., & Fiser, J. (2018). Model of the objective clustering inductive technology of gene expression profiles based on SOTA and DBSCAN clustering algorithms. *Advances in Intelligent Systems and Computing*. **689**, 21–39.
15. Pontes, B., Giráldez, R., & Aguilar-Ruiz, J. S. (2015). Biclustering on expression data: A review. *Journal of Biomedical Informatics*. **57**, 163–180.
16. Assenov, Y., Ramirez, F., Schelhorn, S.-E., et al. (2008). Computing topological parameters of biological networks. *Bioinformatics*. **24**(2), 282–284.
17. Shannon, P., Markiel, A., et al. (2003). Cytoscape: a software environment for integrated models of biomolecular interaction networks. *Genome Res*. pp. 2498–2504.
18. Bhattacharjee, V., Mukhopadhyay, P., et al. (2007). Neural crest and mesoderm lineage-dependent gene expression in orofacial development. *Differentiation*. pp. 128–139.

Бабічев Сергій Анатолійович - доктор технічних наук, професор, професор кафедри інформатики університету Яна Євангеліста Пуркіне в Усті на Лабі, Чехія, професор кафедри інформатики, програмної інженерії та економічної кібернетики Херсонського державного університету. E-mail: sergii.babichev@ujep.cz, sbabichev@ksu.ks.ua, <https://orcid.org/0000-0001-6797-1467>

Ясінська-Дамрі Людмила Михайлівна - кандидат технічних наук, доцентка, доцентка кафедри інформатики та комп'ютерних наук Української академії друкарства. E-mail: Lm.yasinska@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-8629-8658>

УДК 517.958:519.63

М. Г. БЕРДНИК., І. Г. ГУЛІНА  
Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»

## **МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ І МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗАДАЧІ НЕЙМАНА ТЕПЛООБМІНУ ПАРАБОЛОЇДА ОБЕРТАННЯ**

*В даний час недостатньо вивчені питання про розподіл температурних полів в заготовках при новому способу нагрівання, що здійснюється шляхом обертання заготовок в магнітному полі постійного струму, який створюється у збудниках з надпровідними обмотками, без знання яких неможливо здійснити його технічну реалізацію з високими техніко-економічними показниками. При цьому невелике число наукових робіт присвячено дослідженням електромагнітних і теплових явищ всередині заготовки при її обертанні в магнітному полі постійного струму. Тому вельми актуальною є задача розробки математичних методів моделювання температурних полів в заготовках при індукційному нагріву металу з використанням інноваційної технології, розв'язанню якої присвячена ця робота. В статті побудована нова узагальнена просторова математична модель розрахунку температурних полів в заготовках у вигляді параболоїда обертання, що обертається з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла у вигляді крайової задачі математичної фізики, а також знаходження розв'язків отриманої крайової задачі. Вперше побудована математична модель розрахунку полів температури в параболоїді обертання, який обертається, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, у вигляді крайової задачі математичної фізики для гіперболічного рівняння теплопровідності з граничними умовами Неймана. Побудоване інтегральне перетворення для двовимірного кінцевого простору, із застосуванням якого знайдено температурне поле у вигляді збіжних рядів по функціям Фур'є. Знайдений розв'язок узагальненої крайової задачі теплообміну параболоїда обертання, який обертається, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла, може знайти застосування при моделюванні температурних полів, які виникають при індукційному нагріві, що здійснюється шляхом обертання заготовок в магнітному полі постійного струму, який створюється у збудниках з надпровідними обмотками.*

*Ключові слова: комплексний ряд Фур'є, крайова задача Неймана, інтегральне перетворення Лапласа, час релаксації.*

М. Г. БЕРДНИК., И. Г. ГУЛИНА  
Национальный технический университет «Днепропетровская политехника»

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ТЕПЛООБМЕНА ПАРАБОЛОИДА ВРАЩЕНИЯ**

*В настоящее время недостаточно изучены вопросы о распределении температурных полей в заготовках при новом способе нагрева, который осуществляется путем вращения заготовок в магнитном поле постоянного тока, создаваемого в возбуждателях со сверхпроводящими обмотками, без знания которых невозможно осуществить его техническую реализацию с высокими технико-экономическими показателями. При этом небольшое число научных работ посвящено исследованию электромагнитных и тепловых явлений внутри заготовки при ее вращении в магнитном поле постоянного тока. Поэтому весьма актуальной является задача разработки математических методов моделирования температурных полей в заготовках при индукционном нагреве металла с использованием инновационной технологии, решению которой посвящена эта работа. В статье построена новая обобщенная пространственная математическая модель расчета температурных полей в заготовках в виде параболоида вращения, который вращается с постоянной угловой скоростью, с учетом конечной скорости распространения тепла, в виде краевой задачи математической физики, а также нахождение решений полученной краевой задачи. Впервые построена математическая модель расчета полей температуры в параболоиде вращения, который вращается, с учетом конечной скорости распространения тепла, в виде краевой задачи математической физики для гиперболического уравнения теплопроводности с граничными условиями Неймана. Построено интегральное преобразование для двумерного конечного пространства, с применением которого найдено температурное поле в виде сходящихся рядов по функциям Фурье. Найденное решение обобщенной краевой задачи теплообмена параболоида вращения, который вращается, с учетом конечности величины скорости распространения тепла, может найти применение при моделировании температурных полей, возникающих при*

индукционном нагреве, который осуществляется путем вращения заготовок в магнитном поле постоянного тока, создаваемого в возбуждателях со сверхпроводящими обмотками.

Ключевые слова: комплексный ряд Фурье, краевая задача Неймана, интегральное преобразование Лапласа, время релаксации.

M. H. BERDNYK, I. G. HULINA  
National Technical University Dnipro Polytechnic

## **MATHEMATICAL MODEL AND METHOD OF SOLVING THE GENERALIZED NEYMAN PROBLEM OF HEAT EXCHANGE OF PARABOLOID OF ROTATION**

Currently insufficiently studied the distribution of temperature fields in the workpieces with a new method of heating, carried out by rotating the workpieces in a magnetic field of direct current, which is created in exciters with superconducting windings without knowledge of which it is impossible to implement its technical implementation with high technical and economic performance. A small number of scientific papers are devoted to the study of electromagnetic and thermal phenomena inside the workpiece during its rotation in a magnetic field of direct current. Therefore, the task of developing mathematical methods for modeling temperature fields in workpieces during induction heating of metal using innovative technology, the solution of which is devoted to this work, is very important. The article constructs a new generalized spatial mathematical model for calculating temperature fields in workpieces, in the form of a paraboloid of rotation rotating at a constant angular velocity, taking into account the finite velocity of heat propagation as a boundary value problem of mathematical physics, and finding solutions to the boundary value problem. For the first time, a mathematical model for calculating temperature fields in a paraboloid of rotation, taking into account the finite velocity of rotating heat, is constructed as a boundary value problem of mathematical physics for hyperbolic equations of thermal conductivity with Neumann boundary conditions. An integral transformation for a two-dimensional finite space is constructed, using which the temperature field is found in the form of convergent series by Fourier functions. The solution of the generalized boundary value problem of heat exchange of a rotating paraboloid, taking into account the finiteness of the value of heat propagation, can be used to modulate the temperature fields arising from induction heating by rotating the workpieces in a magnetic field of direct current generated in the excitation. with superconducting windings.

Keywords: complex Fourier series, Neumann boundary value problem, Laplace integral transformation, relaxation time.

### **Постановка проблеми**

В даний час в різних областях промисловості значно розширилася сфера застосування електротехнологічних процесів. Одним з великомасштабних електротехнологічних процесів, що застосовуються в кольоровій металургії, є процес індукційного нагріву металу, призначений для термообробки металів під пластичну деформацію, загартування.

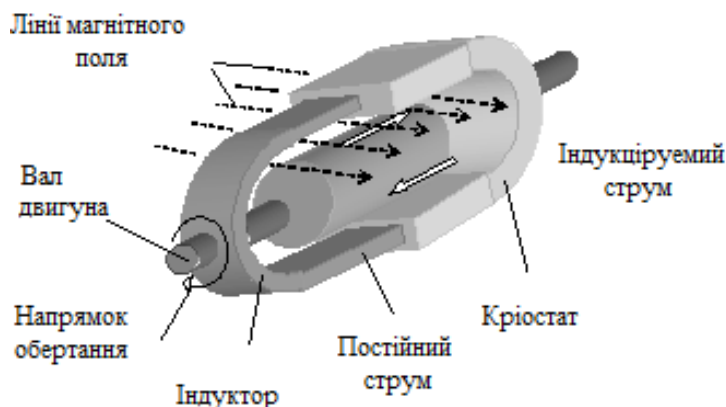


Рис. 1. Індукційний нагрів заготовки в магнітному полі

Різке підвищення енергетичної ефективності забезпечує принципово нова енергозберігаюча технологія індукційного нагріву [1], що здійснюється шляхом обертання заготовок в магнітному полі постійного струму, який створюється у збудниках з надпровідними обмотками (рис. 1).

### **Аналіз останніх досліджень і публікацій**

В даний час недостатньо вивчені питання про розподіл температурних полів в заготовках при новому способу нагрівання, без знання яких неможливо здійснити його технічну реалізацію з високими техніко-економічними показниками. Температурні поля в заготовках можуть бути отримані і досліджені шляхом побудови адекватних математичних моделей процесу технології індукційного нагріву на базі сучасної методології чисельного моделювання.

Відомі теоретичні дослідження інноваційної технології нагріву заготовок, які обертаються в магнітному полі постійного струму, пов'язані, в основному, з питаннями енергозбереження та явищем надпровідності [1]. При цьому невелике число наукових робіт присвячено дослідженням електромагнітних і теплових явищ всередині заготовки при її обертанні в магнітному полі постійного струму. Тому вельми актуальною є задача розробки математичних методів моделювання температурних полів в заготовках при індукційному нагріві металу з використанням інноваційної технології, розв'язанню якої присвячена ця робота.

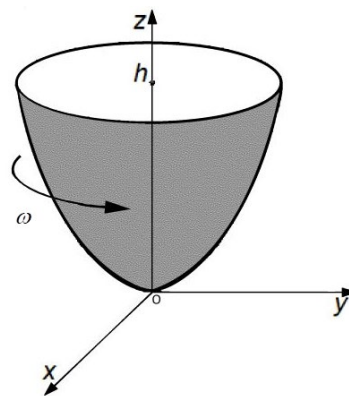
### **Мета дослідження**

Метою статті є побудова нової узагальненої просторової математичної моделі розрахунку температурних полів в заготовках у вигляді параболоїда обертання, що обертається з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, у вигляді крайової задачі математичної фізики для гіперболічного рівняння теплопровідності, а також знаходження рішень отриманої крайової задачі.

### **Викладення основного матеріалу дослідження**

Розглянемо розрахунок температурного поля  $T(\rho, \varphi, z, t)$  параболоїда обертання (рис. 2) з твірною лінією  $r^2 = 2pz$  в циліндричній системі координат  $(r, \varphi, z)$ .

Нехай параболоїд обертається навколо осі  $OZ$  з постійною кутовою швидкістю  $\omega$ , а швидкість поширення тепла є відомою величиною. Теплофізичні властивості параболоїда не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні. У початковий момент часу температура тіла постійна  $G_0$ , а на бічній поверхні тіла відоме значення теплового потоку  $V(\varphi, z)$ . При  $z=h$  відоме значення теплового потоку  $G_1(r, \varphi)$ .



**Рис. 2.** Параболоїд обертання з твірною лінією  $r^2 = 2pz$

В [2] отримано узагальнене рівняння переносу енергії для рушійного елемента суцільного середовища, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла. Згідно [2], узагальнене рівняння балансу енергії твердого тіла, яке обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі  $OZ$ , і теплофізичні властивості якого не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні, в циліндричній системі координат набуває вигляду:

$$\gamma c \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} + \omega \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \tau_r \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \omega \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi \partial t} \right] \right\} = \lambda \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right], \quad (1)$$

де  $\gamma$  – щільність середовища;  $c$  – питома теплоємність;  $T(\rho, \varphi, z, t)$  – температура середовища;  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності;  $t$  – час;  $\tau_r$  – час релаксації.

Математично, задача визначення температурного поля тіла полягає в інтегруванні диференціального рівняння теплопровідності (1) в області  $D = \left\{ (\rho, \varphi, z, t) \mid r \in (0, \sqrt{2ph}), \varphi \in (0, 2\pi), z \in (0, h), t \in (0, \infty) \right\}$ , що з урахуванням прийнятих допущень запишеться у вигляді:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \omega \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + \tau_r \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \tau_r \omega \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi \partial t} = a \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right] \quad (2)$$

з початковими умовами

$$\theta(r, \varphi, z, 0) = 0, \quad \frac{\partial \theta(r, \varphi, z, 0)}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

і граничними умовами

$$\int_0^t \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=\sqrt{2ph}} e^{\tau_r t} dr = G(\varphi, z), \quad \int_0^t \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=h} e^{\tau_r t} dz = \Lambda(r, \varphi), \quad (4)$$

де  $\theta = \frac{T(r, \varphi, z, t) - G_0}{T_{\max} - G_0}$  – відносна температура тіла;  $G(\varphi, z) = \frac{V(\varphi, z) \tau_r}{\lambda(T_{\max} - G_0)}$ ;

$\Lambda(r, \varphi) = \frac{G_1(r, \varphi) \tau_r}{\lambda(T_{\max} - G_0)}$ ;  $G(\varphi, z), \Lambda(r, \varphi) \in C(0, 2\pi)$ ;  $a = \frac{\lambda}{c \gamma}$  – коефіцієнт теплопровідності.

Тоді розв'язок крайової задачі (2)–(4)  $\theta(r, \varphi, z, t)$  є двічі неперервно диференційованим за  $r, \varphi, z$ , один раз за  $t$  в області  $D$  і неперервним на  $\bar{D}$  [3], тобто  $\theta(r, \varphi, z, t) \in C^{2,1}(D) \cap C(\bar{D})$ , а функції  $G(\varphi, z), \Lambda(r, \varphi), \theta(r, \varphi, z, t)$  можуть бути розкладені в комплексний ряд Фур'є [3]

$$\begin{Bmatrix} \theta(r, \varphi, z, t) \\ G(\varphi, z) \\ \Lambda(r, \varphi) \end{Bmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \begin{Bmatrix} \theta_n(r, z, t) \\ G_n(z) \\ \Lambda_n(r) \end{Bmatrix} \cdot \exp(in\varphi), \quad (5)$$

де 
$$\left\{ \begin{matrix} \theta_n(r, z, t) \\ G_n(z) \\ \Lambda_n(r) \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \begin{matrix} \theta(r, \varphi, z, t) \\ G(\varphi, z) \\ \Lambda(r, \varphi) \end{matrix} \right\} \cdot \exp(-in\varphi) d\varphi; \Lambda_n(\rho) = \Lambda_n^{(1)}(\rho) + i\Lambda_n^{(2)}(\rho);$$

$$\theta_n(\rho, z, t) = \theta_n^{(1)}(\rho, z, t) + i\theta_n^{(2)}(\rho, z, t); \quad G_n(z) = G_n^{(1)}(z) + iG_n^{(2)}(z).$$

З огляду на те, що  $\theta(r, \varphi, z, t)$  функція дійсна, надалі обмежимося розглядом  $\theta_n(r, z, t)$  для  $n=0, 1, 2, \dots$ , тому що  $\theta_n(r, z, t)$  і  $\theta_{-n}(r, z, t)$  будуть комплексно спряженими [3]. Підставляючи значення функцій з (5) у (2)–(4), в результаті одержимо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial \theta_n^{(i)}}{\partial t} + \mathcal{G}_n^{(i)} \theta_n^{(m_i)} + \tau_r \frac{\partial^2 \theta_n^{(i)}}{\partial t^2} + \tau_r \mathcal{G}_n^{(i)} \frac{\partial \theta_n^{(m_i)}}{\partial t} = a \left[ \frac{\partial^2 \theta_n^{(i)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_n^{(i)}}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} \theta_n^{(i)} + \frac{\partial^2 \theta_n^{(i)}}{\partial z^2} \right] \quad (6)$$

з початковими умовами

$$\theta_n^{(i)}(\rho, z, 0) = 0, \quad \frac{\partial \theta_n^{(i)}(\rho, z, 0)}{\partial t} = 0 \quad (7)$$

і граничними умовами

$$\int_0^t \frac{\partial \theta_n^{(i)}}{\partial r} \Big|_{r=\sqrt{2ph}} e^{\tau_r} dr = G_n^{(i)}(z), \quad \int_0^t \frac{\partial \theta_n^{(i)}}{\partial z} \Big|_{z=h} e^{\tau_r} dz = \Lambda_n^{(i)}(r), \quad (8)$$

де  $\mathcal{G}_n^{(1)} = -\omega n$ ;  $\mathcal{G}_n^{(2)} = \omega n$ ;  $m_1 = 2$ ,  $m_2 = 1$ ;  $i = 1, 2$ .

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (6) з умовами (7)–(8) інтегральне перетворення Лапласа [4]. У результаті одержуємо систему диференціальних рівнянь

$$s \tilde{\theta}_n^{(i)} + \mathcal{G}_n^{(i)} (\tilde{\theta}_n^{(m_i)} + \tau_r s \tilde{\theta}_n^{(m_i)}) + \tau_r s^2 \tilde{\theta}_n^{(i)} = a \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \tilde{\theta}_n^{(i)}}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r^2} \tilde{\theta}_n^{(i)} + \frac{\partial^2 \tilde{\theta}_n^{(i)}}{\partial z^2} \right] \quad (9)$$

з граничними умовами

$$\frac{\partial \tilde{\theta}_n^{(i)}}{\partial r} \Big|_{r=\sqrt{2ph}} = \tilde{G}_n^{(i)}(z), \quad \frac{\partial \tilde{\theta}_n^{(i)}}{\partial z} \Big|_{z=h} = \tilde{\Lambda}_n^{(i)}(r), \quad (10)$$

де  $\tilde{G}_n^{(i)}(z) = G_n^{(i)}(z) \left( 1 + \frac{1}{s\tau_r} \right)$ ;  $\tilde{\Lambda}_n^{(i)}(z) = \Lambda_n^{(i)}(z) \left( 1 + \frac{1}{s\tau_r} \right)$ .

Для розв’язання крайової задачі (9)–(10) застосовуємо інтегральне перетворення:

$$\bar{f}(\mu_{n,k}) = \iint_D Q(\mu_{n,k}, r, z) \cdot r \cdot f(r, z) d\sigma. \quad (11)$$

Власні функції  $Q(\mu_{n,k}, r, z)$  і власні значення  $\mu_{n,k}$  знаходяться із розв’язку спектральної задачі:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} Q + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} + \mu_{n,k} \cdot Q = 0, \tag{12}$$

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial r} \right|_{r=\sqrt{2pz}} = 0, \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial z} \right|_{z=h} = 0. \tag{13}$$

Власні функції  $Q(\mu_{n,k}, r, z)$  і власні значення  $\mu_{n,k}$  в (12)- (13) знаходяться за формулами, які приведені в [5], а формула оберненого перетворення має вигляд:

$$f(\rho, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q(\mu_{n,k}, r, z)}{\|Q(\mu_{n,k}, r, z)\|^2} \bar{f}(\mu_{n,k}). \tag{14}$$

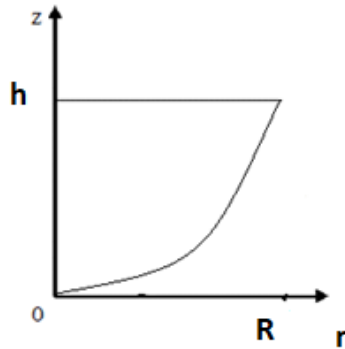
Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (9) інтегральне перетворення (11), в результаті одержуємо систему алгебраїчних рівнянь відносно  $\bar{\theta}_n^{(i)}$ :

$$s \bar{\theta}_n^{(i)} + \mathcal{G}_n^{(i)} \left( \bar{\theta}_n^{(m_i)} + \tau_r s \bar{\theta}_n^{(m_i)} \right) + \tau_r s^2 \bar{\theta}_n^{(i)} = q_{n,k} \left( \frac{\tilde{\Omega}_{n,k}^{(i)}}{\mu_{n,k}} - \bar{\theta}_n^{(i)} \right) \tag{15}$$

де  $\tilde{\Omega}_{n,k}^{(i)} = \int_0^h \sqrt{2pz} \cdot Q(\mu_{n,k}, \sqrt{2pz}, z) \tilde{G}_n^{(i)}(z) dz + \oint_L \left( Q(\mu_{n,k}, r, z) \frac{\partial \bar{\theta}_n^{(i)}}{\partial z} - \bar{\theta}_n^{(i)} \frac{\partial Q(\mu_{n,k}, r, z)}{\partial z} \right) dl;$

$$q_{n,k} = a \mu_{n,k}.$$

Криволінійний інтеграл обчислюється по замкнутому додатно орієнтованому контуру (рис.3):



**Рис. 3.** Замкнутий контур з твірною лінією  $r^2 = 2pz$ . ( $R = \sqrt{2ph}$ )

Розв'язавши систему рівнянь (15), одержуємо

$$\bar{\theta}_n^{(i)} = a \cdot \frac{\tilde{\Omega}_{n,k}^{(i)} (\tau_r s^2 + s + q_{n,k}) + (-1)^{i+1} \omega n \tilde{\Omega}_{n,k}^{(m_i)} (1 + s \tau_r)}{(\tau_r s^2 + s + q_{n,k})^2 + \omega^2 n^2 (1 + s \tau_r)^2}. \tag{16}$$

Застосовуючи до зображення функцій (16) формули оберненого перетворення Лапласа [4], одержуємо оригінали функцій:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k}, t) = & \sum_{j=1}^2 \zeta_{n,k}(s_j) \left\{ \tilde{\Omega}_{n,k}^{(1)}(s_j) \left[ (2\tau_r s_j + 1) + \tau_r \omega n i \right] + \tilde{\Omega}_{n,k}^{(2)}(s_j) \left[ \tau_r \omega n - (2\tau_r s_j + 1) i \right] \right\} \times \\ & \times \left( e^{s_j t} - 1 \right) + \sum_{j=3}^4 \zeta_{n,k}(s_j) \left\{ \tilde{\Omega}_{n,k}^{(1)}(s_j) \cdot \left[ (2\tau_r s_j + 1) - \tau_r \omega n i \right] + \tilde{\Omega}_{n,k}^{(2)}(s_j) \left[ \tau_r \omega n + (2\tau_r s_j + 1) i \right] \right\} \times \\ & \times \left( e^{s_j t} - 1 \right), \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k}, t) = & \sum_{j=1}^2 \zeta_{n,k}(s_j) \left\{ \tilde{\Omega}_{n,k}^{(2)}(s_j) \left[ (2\tau_r s_j + 1) + \tau_r \omega n i \right] - \tilde{\Omega}_{n,k}^{(1)}(s_j) \left[ \tau_r \omega n - (2\tau_r s_j + 1) i \right] \right\} \times \\ & \times \left( e^{s_j t} - 1 \right) + \sum_{j=3}^4 \zeta_{n,k}(s_j) \left\{ \tilde{\Omega}_{n,k}^{(2)}(s_j) \left[ (2\tau_r s_j + 1) - \tau_r \omega n i \right] - \tilde{\Omega}_{n,k}^{(1)}(s_j) \left[ \tau_r \omega n + (2\tau_r s_j + 1) i \right] \right\} \times \\ & \times \left( e^{s_j t} - 1 \right), \end{aligned} \tag{18}$$

де 
$$\zeta_{n,k}(s_j) = \frac{0.5 s_j^{-1} a}{(2\tau_r s_j + 1)^2 + (\tau_r \omega n)^2},$$

а значення  $s_j$  для  $j=1, 2, 3, 4$  визначаються за формулами

$$s_{1,2} = \frac{(\tau_r \omega n i - 1) \pm \sqrt{(1 + \tau_r \omega n i)^2 - 4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r}, \quad s_{3,4} = \frac{(\tau_r \omega n i + 1) \pm \sqrt{(1 - \tau_r \omega n i)^2 - 4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r}.$$

Таким чином, з урахуванням формул обернених перетворень (5) і (14), одержуємо температурне поле параболоїда обертання, що обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі OZ, із урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла:

$$\theta(r, \varphi, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \bar{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k}, t) + i \bar{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k}, t) \right] \frac{Q(\mu_{n,k}, r, z)}{\|Q(\mu_{n,k}, r, z)\|^2} \right\} \exp(in\varphi),$$

де  $\bar{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k}, t), \bar{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k}, t)$  визначаються за формулами (17), (18).

### Висновки

У даній роботі вперше побудована математична модель розрахунку полів температури в параболоїді обертання, який обертається, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, у вигляді крайової задачі математичної фізики для гіперболічних рівнянь теплопровідності з граничними умовами Неймана. Побудоване інтегральне перетворення для двовимірного кінцевого простору, із застосуванням якого знайдено температурне поле у вигляді збіжних рядів по функціям Фур'є. Знайдений розв'язок узагальненої крайової задачі теплообміну параболоїда обертання, який обертається, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла, може знайти застосування при моделюванні температурних полів, які виникають при індукційному нагріві, що здійснюється шляхом обертання заготовок в магнітному полі постійного струму, який створюється у збудниках з надпровідними обмотками.



**Список використаної літератури**

1. Заикина Н. В., Пleshivtseva Ю. Э. Моделирование и управление температурными полями в процессе индукционного нагрева заготовок, вращающихся в магнитном поле постоянного тока. *Вестник Самарского государственного технического университета, серия «Технические науки»*. 2009. № 3 (25). С. 215-223.
2. Бердник М. Г. Аналітичний розв'язок узагальненої крайової задачі теплообміну циліндра, який обертається. *Математичні машини і системи*. 2015. № 4. С.117-122.
3. Маркович Б. М. Рівняння математичної фізики. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2010. 384 с.
4. Лопушанська Г. П., Лопушанський А. О., М'яус О. М. Перетворення Фур'є, Лапласа: узагальнення та застосування. Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 2014. 152 с.
5. Berdnyk M. The mathematic model and method for solving the dirichlet heat- exchange problem for empty isotropic rotary body. *Non-Traditional Technologies in the Mining Industry. Solid State Phenomena*. Vol. 277. Trans Tech Publications, Switzerland. 2018. P. 168-177.

**References**

1. Zaikina, N. V., & Pleshivtseva, Yu. E. (2009). Modelirovanie i upravlenie temperaturnymi polyami v protsesse induktsionnogo nagreva zagotovok, vraschayuschihся v magnitnom pole postoyannogo toka. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tehnikeskogo universiteta, seriya «Tehnikeskie nauki»*. **3(25)**, 215-223.
2. Berdnyk, M. H. (2015). Analitychnyi rozv'язok uzahalnenoї kraiovoi zadachi teploobminu tsylindra, yakyi obertaietsia. *Matematychni mashyny i systemy*. **4**, 117-122.
3. Markovych, B. M. (2010). Rivniannia matematychnoi fizyky. Lviv: Vydavnytstvo Lvivskoi politekhniki.
4. Lopushanska, H. P., Lopushanskyi, A. O. & M"iaus, O. M. (2014). Peretvorennia Fur"ie, Laplasa: uzahalnennia ta zastosuvannia. Lviv: LNU im. Ivana Franka.
5. Berdnyk, M. (2018). The mathematic model and method for solving the dirichlet heat-exchange problem for empty isotropic rotary body. *Non-Traditional Technologies in the Mining Industry. Solid State Phenomena*. Trans Tech Publications, Switzerland. **277**, 168-177.

Бердник Михайло Геннадійович – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри програмного забезпечення комп'ютерних систем Національного технічного університету "Дніпровська політехніка". E-mail: [mgb2006@ukr.net](mailto:mgb2006@ukr.net), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4894-8995>.

Гуліна Ірина Григорівна – к.т.н., доцент кафедри програмного забезпечення комп'ютерних систем Національного технічного університету «Дніпровська політехніка». E-mail: [gulina.irina.g@gmail.com](mailto:gulina.irina.g@gmail.com), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2565-5006>.

УДК 519.688:004.932

Л.П. ВАКАЛ  
 Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова  
 Є.С. ВАКАЛ  
 Київський національний університет імені Тараса Шевченка

## МЕТОД КОДУВАННЯ КОНТУРІВ МУЗИЧНИМ ЗВУКОМ

*У статті розглянуті технології перетворення візуальної інформації у звукову форму, які активно розвиваються у даний час. Ці технології використовуються у системах звукобачення для незрячих і людей із слабким зором. Зрячим людям частковий перенос візуальної інформації на акустичний сигнал дозволить покращити загальне сприйняття інформації, полегшити задачу візуального моніторингу, зосередити увагу одночасно на декількох візуальних полях. У статті запропоновано метод побудови звукового образу контуру об'єкта на цифровому зображенні за допомогою музичного звуку у зручному для сприйняття діапазоні частот від 440 Гц до 1760 Гц. Контур визначає найважливішу властивість об'єкту – його форму і є найбільш інформативною характеристикою для розпізнавання. Згідно із запропонованим методом, звуковий образ формується на основі одновимірного представлення контуру з використанням сигнатури «кут-відстань» – функції відстані від центроїда до точок контуру з рівномірним кроком по куту. Центроїд є аналогом «точки погляду» – місця, куди сфокусовані очі людини, коли вона починає оглядати обмежений контуром об'єкт. При побудові послідовності звукових сигналів використовується принцип: більшому значенню сигнатури відповідає більша частота звукового сигналу (більш висока нота). Слух людини характеризується відносно високою роздільною здатністю щодо сприйняття зміни частоти музичного звуку. Побудований за цим методом музичний образ несе візуальну інформацію про розташування точок контуру об'єкта, при цьому задачу розпізнавання форми об'єкта виконує мозок людини. Загальний час відтворення звукового образу контуру залежить від вибраного кроку по куту і заданої тривалості звучання кожного сигналу послідовності. Враховуючи інерційність слуху, рекомендовано задати тривалість звучання 65 мс. На основі звукових образів нескладно інтерпретувати прості геометричні фігури (коло, квадрат та ін.), які є фундаментальними будівельними блоками більш складних об'єктів. Тому визнання їхньої характерної звукової сигнатури – важливий крок до інтерпретації складних зображень.*

*Ключові слова:* перетворення візуальної інформації у звук, контур, сигнатура, частота звуку.

Л.П. ВАКАЛ  
 Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова  
 Є.С. ВАКАЛ  
 Київський національний університет імені Тараса Шевченка

## МЕТОД КОДИРОВАНИЯ КОНТУРОВ МУЗЫКАЛЬНЫМ ЗВУКОМ

*В статье рассмотрены технологии преобразования визуальной информации в звуковую форму, которые активно развиваются в настоящее время. Эти технологии используются в системах звуковидения для незрячих и людей со слабым зрением. Зрячим людям частичный перенос визуальной информации на акустический сигнал позволит улучшить общее восприятие информации, облегчить задачу визуального мониторинга, сосредоточит внимание одновременно на нескольких визуальных полях. В статье предложен метод построения звукового образа контура объекта на цифровом изображении с помощью музыкального звука в удобном для восприятия диапазоне частот от 440 Гц до 1760 Гц. Контур определяет важнейшую особенность объекта – его форму и является наиболее информативной характеристикой для распознавания. В соответствии с предложенным методом, звуковой образ формируется на основе одномерного представления контура с использованием сигнатуры «угол-расстояние» – функции расстояния от центроида до точек контура с равномерным шагом по углу. Центроид является аналогом «точки взгляда» – места, куда сфокусированы глаза человека, когда он начинает осматривать ограниченный контуром объект. При построении последовательности звуковых сигналов используется принцип: большему значению сигнатуры соответствует большая частота звукового сигнала (более высокая нота). Слух человека характеризуется относительно высокой разрешающей способностью к восприятию изменения частоты музыкального звука. Построенный по этому методу музыкальный образ несет визуальную информацию о расположении точек контура объекта, при этом задачу распознавания формы объекта*

выполняет мозг человека. Общее время воспроизведения звукового образа зависит от выбранного шага по углу и заданной длительности звучания каждого сигнала в последовательности. Учитывая инерцию слуха, рекомендовано задать длительность звучания 65 мс. На основе звуковых образов несложно интерпретировать простые геометрические фигуры (круг, квадрат и др.), которые являются фундаментальными строительными блоками более сложных объектов. Поэтому признание их характерной звуковой сигнатуры – важный шаг к интерпретации сложных изображений.

Ключевые слова: преобразование визуальной информации в звук, контур, сигнатура, частота звука.

L.P. VAKAL

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics

YE.S. VAKAL

Taras Shevchenko National University of Kyiv

## METHOD OF ENCODING CONTOURS WITH MUSICAL SOUND

*The article discusses technologies for converting visual information into sound form, which are actively developing at the present time. These technologies are used in auditory-visual systems for blind and visually impaired people. For sighted people, partial transfer of visual information to an acoustic signal will improve a general perception of information, facilitate a task of visual monitoring, and focus simultaneously on several visual fields. In the article it is proposed a method for constructing a sound image of an object's contour on a digital image using musical sound in a convenient for perception frequency range from 440 Hz to 1760 Hz. The contour defines the most important feature of the object is its shape and it is the most informative characteristic for recognition. In accordance with the proposed method, the sound image is formed on a basis of a one-dimensional representation of the contour using the "angle-distance" signature is a function of the distance from centroid to the contour points with a uniform step on the angle. Centroid is analogous to the "point of view" that is a place where the eyes of a person are focused, when he begins to inspect an object bounded by the contour. When constructing a sequence of sound signals, the principle is used: a higher value of the signature corresponds to a higher frequency of the sound signal (higher note). Human hearing is characterized by a relatively high resolution to perceive changes in a musical sound frequency. The musical image constructed by this method carries visual information about the location of the object's contour points, while the task of recognizing the shape of the object is performed by the human brain. A total playback time of the sound image depends on the selected step on angle and the specified duration of sounding each signal in the sequence. Taking into account the inertia of hearing, it is recommended to set the duration of a signal 65 ms. Based on sound images, it is easy to interpret simple geometric shapes (circle, square, etc.), which are fundamental building blocks of more complex objects. Therefore, the recognition of their characteristic sound signature is an important step towards the interpretation of complex images.*

*Keywords: converting visual information into sound, contour, signature, sound frequency.*

### Постановка проблеми

У даний час активно розвиваються технології перетворення візуальної інформації у звукову форму. Вони використовуються насамперед у системах звукобачення, призначених для сліпих або людей із слабким зором. Зрячим людям частковий перенос візуальної інформації на акустичний сигнал зможе покращити загальне сприйняття інформації та полегшити задачу візуального моніторингу. Загалом, завдяки доповненню зорової сенсорної системи людини слуховими сигналами з'являється можливість розробки систем, які дозволять сприймати за межами видимого спектра, збільшити роздільну здатність сприйняття зображень, зосередити увагу одночасно на декількох візуальних полях тощо.

Для перетворення візуальної інформації у звукову форму розроблено різні технології (методи). Найбільш відомою є технологія vOICe [1], яка надає людині комплекс звуків, що несуть візуальну інформацію, і при цьому задачу розпізнавання залишає її мозку. Зображення, представлене як двовимірний матриця пікселів, конвертується у звук по стовпцях. При цьому верхньому пікселю стовпця відповідає максимальна частота звуку, нижньому – мінімальна частота, яскравості пікселя – амплітуда звуку. Сигнали з одного стовпця сумуються і результируючий акустичний

сигнал відтворюється. Описаний процес повторюється для наступних стовпців матриці.

Слід зауважити, що кодування цілого зображення попіксельно призводить до захаращення звукового сигналу, а генеровані звукові ландшафти не завжди приємні для слуху людини. Тому актуальною є розробка методів подання візуальної інформації за допомогою значно приємнішого для слуху людини музичного звуку.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

На відміну від шумів, що мають так званий суцільний частотний спектр, музичний звук – це звук тональний, який має лінійчатий дискретний частотний спектр [2]. Людина краще розпізнає і запам'ятовує саме дискретну за частотою інформацію. Музичний звук лежить в основі побудови музичного строю. Основним у сучасній європейській музиці є 12-ступеневий рівномірно темперований стрій, який містить сім повних і дві неповні октави. У кожену повну октаву входять 12 звуків, послідовно розташованих за висотою тону. Проміжок між двома сусідніми звуками називається півтоном. Тільки сім з дванадцяти звуків октави мають власні назви – це ноти «до», «ре», «мі», «фа», «соль», «ля», «сі». Основою рівномірно темперованої шкали є нота «ля» з частотою 440 Гц. Шкала має єдиний коефіцієнт для усіх інтервалів, рівний  $\sqrt[12]{2} \approx 1,0595$ . Це означає, що для обчислення частоти ноти  $f_2$ , знаючи частоту ноти  $f_1$ , потрібно помножити частоту ноти  $f_1$  на число  $(\sqrt[12]{2})^a$ , де  $a$  – кількість півтонів, що відокремлюють ці ноти [2].

Слух людини характеризується досить високою роздільною здатністю щодо сприйняття зміни частоти музичного звуку. Тому при кодуванні візуальної інформації саме частоту звуку використовують, як правило, для відображення кількісних показників. Наприклад, у системі Audiograph за допомогою музики незрячому користувачу передається інформація про координати графічного об'єкта, а також про його тип і форму [3]. Координати озвучуються за принципом: більшому значенню координати відповідає більш висока нота. Абсциса і ордината розрізняються по тембру (орган і фортепіано). На основі цього принципу озвучуються також форми графічних об'єктів.

Метод кодування форми об'єкта за допомогою поліфонічної музичної послідовності запропоновано в роботі [4]. Кодування чорно-білого зображення здійснюється по стовпцях з використанням рухомого курсору, поділеного на сегменти, що відповідають нотам у чотирьох октавах шкали до мажор. Інформація щодо форми фігури в декартових координатах перетворюється в музичну послідовність, в якій абсциса представлена часом, а ордината – нотами. Складні об'єкти представляються через базові шаблони, такі як квадрати, кола тощо.

Отримати інформацію не тільки про форму, але й про колір об'єкта дозволяє система EyeMusic [5]. Зображення в ній кодується, як і в системі vOIce, по стовпцях зліва направо. Для кожного пікселя відповідно до його кольору (усього кольорів шість) встановлюється музичний інструмент, відповідно до координати Y – нота, відповідно до яскравості – гучність ноти. Максимальна частота звуку обмежена величиною 1568 Гц.

Нещодавно японськими вченими в рамках астрономічного проекту звукової обробки наукових даних про космос було розроблено програмне забезпечення під назвою SIPReS [6], яке дозволяє незрячому користувачу визначати положення точки на зображенні, просто слухаючи ноти. Частота звучання ноти залежить від яскравості точки. Мінімальна і максимальна частота дорівнюють 220 Гц і 1760 Гц відповідно.

### Мета дослідження

Для сприйняття візуальної інформації незрячими і людьми зі слабким зором пропонується озвучувати контури об'єктів на зображеннях. Дослідження в галузі психології зору і численні результати в області створення автоматизованих систем розпізнавання дозволяють стверджувати, що контури є найбільш інформативними характеристиками розпізнаваних образів. Саме вони визначають найважливішу властивість об'єкта – його форму. Метою дослідження є розробка методу побудови звукового образу контуру об'єкта з використанням музичних звуків у приємному для слуху людини діапазоні частот від 440 Гц до 1760 Гц.

### Виклад основного матеріалу дослідження

Контур об'єкта на зображенні можна представити у вигляді множини точок із координатами  $x$  і  $y$ . Таке представлення є двовимірним. У методі побудови акустичного образу об'єкта, що пропонується, спочатку необхідно отримати одновимірне представлення контуру. Найбільш поширеним і розвиненим підходом до побудови одновимірної функції контуру є сигнатурний аналіз – представлення функції контуру (сигнатури) відносно центроїда (деякої середньої точки об'єкта, наприклад, його центра ваги) [7]. При такому підході забезпечується інваріантність сигнатури до лінійного зміщення контуру, оскільки центроїд зміщується разом із контуром. У сигнатурному аналізі існують різні варіанти функцій-сигнатур [7, 8]. Звуковий образ контуру пропонується будувати на основі сигнатури «кут-відстань» – функції відстані від центроїда до точок контуру з рівномірним кроком по куту. Ця сигнатура додатково опрацьовується, щоб забезпечити її незалежність також від повороту і розміру контуру.

На основі сигнатури «кут-відстань» у методі, що пропонується, формується послідовність музичних звуків за принципом: більшому значенню сигнатури відповідає більш висока нота. Побудований за цим методом музичний образ несе візуальну інформацію про розташування точок контуру об'єкта, при цьому задачу розпізнавання форми об'єкта виконує мозок людини. Після нетривалого тренування на основі почутого музичного образу нескладно розрізнити на слух прості фігури, наприклад, коло, прямокутник, трикутник тощо. Ці фігури є фундаментальними будівельними блоками більш складних об'єктів, тому визнання їхньої характерної (відмінної) звукової сигнатури – важливий крок до інтерпретації складних зображень. Крім того, при такому підході до кодування звуковий канал не захаращується на відміну від методів, де у звук переводять кожний піксель зображення.

Позначимо  $C^{(0)} = \{(x_i, y_i), i = \overline{1, N}\}$  множини точок контуру, упорядкованих за годинниковою стрілкою. Метод побудови звукового образу контуру з використанням музичних звуків складається з наступних кроків.

1. Обчислюються координати точки  $O(x_0, y_0)$  – центра ваги описаного навколо контуру  $C^{(0)}$  прямокутника:

$$x_0 = (x_{\min} + x_{\max})/2; y_0 = (y_{\min} + y_{\max})/2,$$

де  $\bar{x}_{\min}$ ,  $\bar{y}_{\min}$  і  $\bar{x}_{\max}$ ,  $\bar{y}_{\max}$  – відповідно мінімальні та максимальні значення координат точок контуру. Центроїд  $O(x_0, y_0)$  є аналогом «точки погляду» – місця, куди сфокусовані очі людини, коли вона починає оглядати обмежений контуром об'єкт.

2. Виконується перехід від декартової системи координат  $(x, y)$  до полярної  $(r, \varphi)$  з полюсом у точці  $O(x_0, y_0)$ .

3. Набір точок контуру  $C^{(1)} = \{(r_i, \varphi_i), i = \overline{1, N}\}$  у полярних координатах сортується у порядку зростання кута  $\varphi$ . Якщо зустрічаються дві або більше точок контуру з однаковим кутом, то вибирається точка з максимальним значенням  $r$  [7].

4. На основі набору  $C^{(1)}$  будується дискретна упорядкована послідовність відстаней  $r_1, \dots, r_m$ , взятих із рівномірним кроком  $\Delta\varphi$  по куту. Вибір величини кроку залежить від бажаної точності представлення контуру. Наприклад, при  $\Delta\varphi = 2^\circ$  ця послідовність містить  $m = 180$  елементів, які відповідають 180 точкам розгортки контуру.

Якщо для деякого кута  $\varphi^* = k \cdot \Delta\varphi$  ( $k$  – натуральне число,  $k < m$ ) у наборі  $C^{(1)}$  немає відповідного значення  $r^*$ , то воно обчислюється наближено з використанням методів апроксимації або інтерполяції функцій [9–11]. Найпростіше значення  $r^*$  можна знайти лінійною інтерполяцією

$$r^* = r_i + \frac{r_{i+1} - r_i}{\varphi_{i+1} - \varphi_i}(\varphi^* - \varphi_i), \varphi_i < \varphi^* < \varphi_{i+1}, i = \overline{1, m-1}.$$

5. Елементи множини  $r_1, \dots, r_m$  нормуються по максимальному значенню  $r_{\max}$ . Це забезпечує інваріантність сигнатури щодо розміру контуру [12]. Результатом буде послідовність відстаней  $d_k = r_k / r_{\max}$ ,  $k = \overline{1, m}$ , значення яких лежать у діапазоні  $[0, 1]$ .

6. Для незалежності сигнатури «кут-відстань» від повороту контуру елементи послідовності  $d_1, \dots, d_m$  зміщуються таким чином, щоб вказана послідовність починалась з мінімального (максимального) значення.

7. Шкала відстаней  $d_1, \dots, d_m$  у діапазоні від 0 до 1 розбивається на 25 інтервалів довжиною  $h = 0,04$ . Значенням  $d_k$  з першого інтервалу відповідає звукова частота 440 Гц, з останнього – 1760 Гц. Звукові частоти для усіх інтервалів та їхню музичну нотацію наведено у табл. 1, де літерами С, D, E, F, G, A, В згідно з науковою нотацією позначено ноти «до», «ре», «мі», «фа», «соль», «ля», «сі», а символом # (діез) – підвищення ноти на півтон.

Таблиця 1

Звукові частоти (в Гц) на інтервалах шкали та їхня музична нотація

№	Частота	Нотація	№	Частота	Нотація	№	Частота	Нотація
1	440,0	A <sub>4</sub>	10	740,0	F <sup>#</sup> <sub>5</sub>	19	1244,5	D <sup>#</sup> <sub>6</sub>
2	466,26	A <sup>#</sup> <sub>4</sub>	11	784,0	G <sub>5</sub>	20	1318,5	E <sub>6</sub>
3	493,9	B <sub>4</sub>	12	830,6	G <sup>#</sup> <sub>5</sub>	21	1396,9	F <sub>6</sub>
4	523,3	C <sub>5</sub>	13	880,0	A <sub>5</sub>	22	1480,0	F <sup>#</sup> <sub>6</sub>
5	554,4	C <sup>#</sup> <sub>5</sub>	14	932,3	A <sup>#</sup> <sub>5</sub>	23	1568,0	G <sub>6</sub>
6	587,3	D <sub>5</sub>	15	987,8	B <sub>5</sub>	24	1661,2	G <sup>#</sup> <sub>6</sub>
7	622,3	D <sup>#</sup> <sub>5</sub>	16	1047,4	C <sub>6</sub>	25	1760	A <sub>6</sub>
8	659,3	E <sub>5</sub>	17	1108,7	C <sup>#</sup> <sub>6</sub>			
9	698,5	F <sub>5</sub>	18	1174,7	D <sub>6</sub>			

8. Обчислюється частота звучання  $f_k$  сигналу для представлення точки контуру, якій відповідає значення  $d_k$ , за формулою

$$f_k = f_{\min} \cdot 2^{\frac{1}{12} \left[ \frac{d_k}{h} \right]}, \quad k = \overline{1, m},$$

де  $f_{\min}$  – мінімальна частота звуку ( $f_{\min} = 440$  Гц),  $[\cdot]$  – ціла частина дійсного числа.

Слід зазначити, що за степенем періодичності сигнатури можна судити про складність контуру. Простим, симетричним контурам відповідають періодичні сигнатури. Складний контур має аперіодичну сигнатуру.

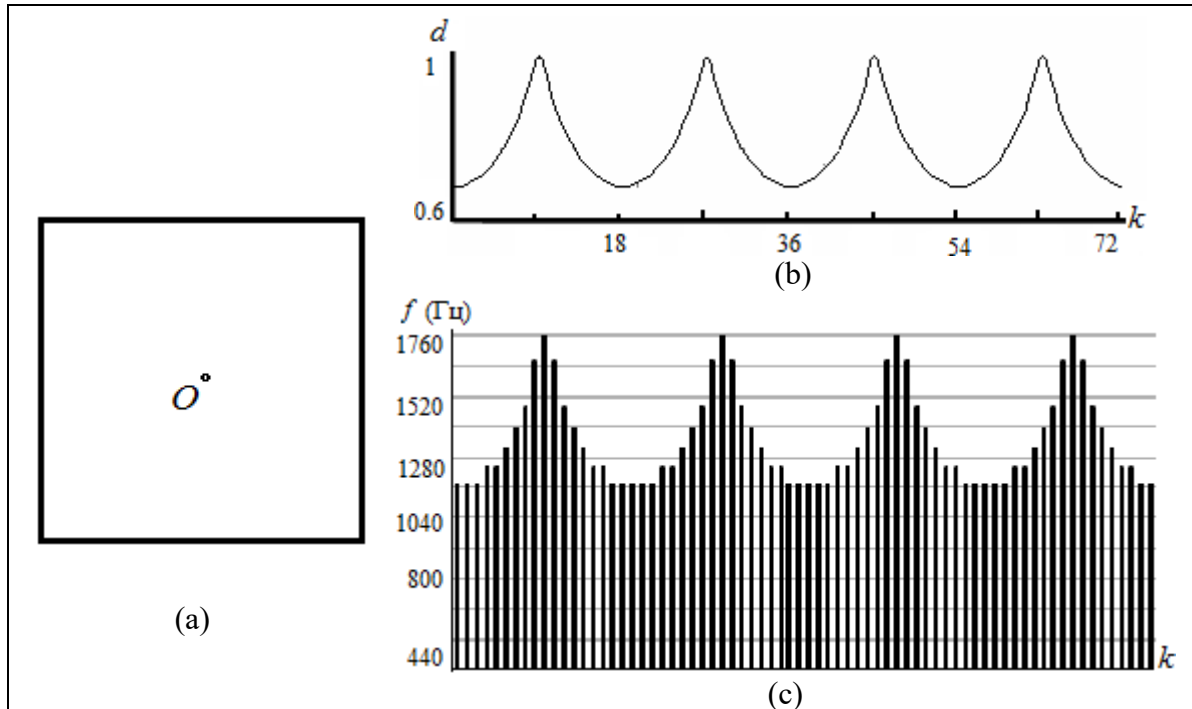


Рис. 1. Кодування контуру квадрата музичним звуком: (а) контур із центроїдом  $O$ ; (б) сигнатура; (с) частоти звуків музичного представлення.

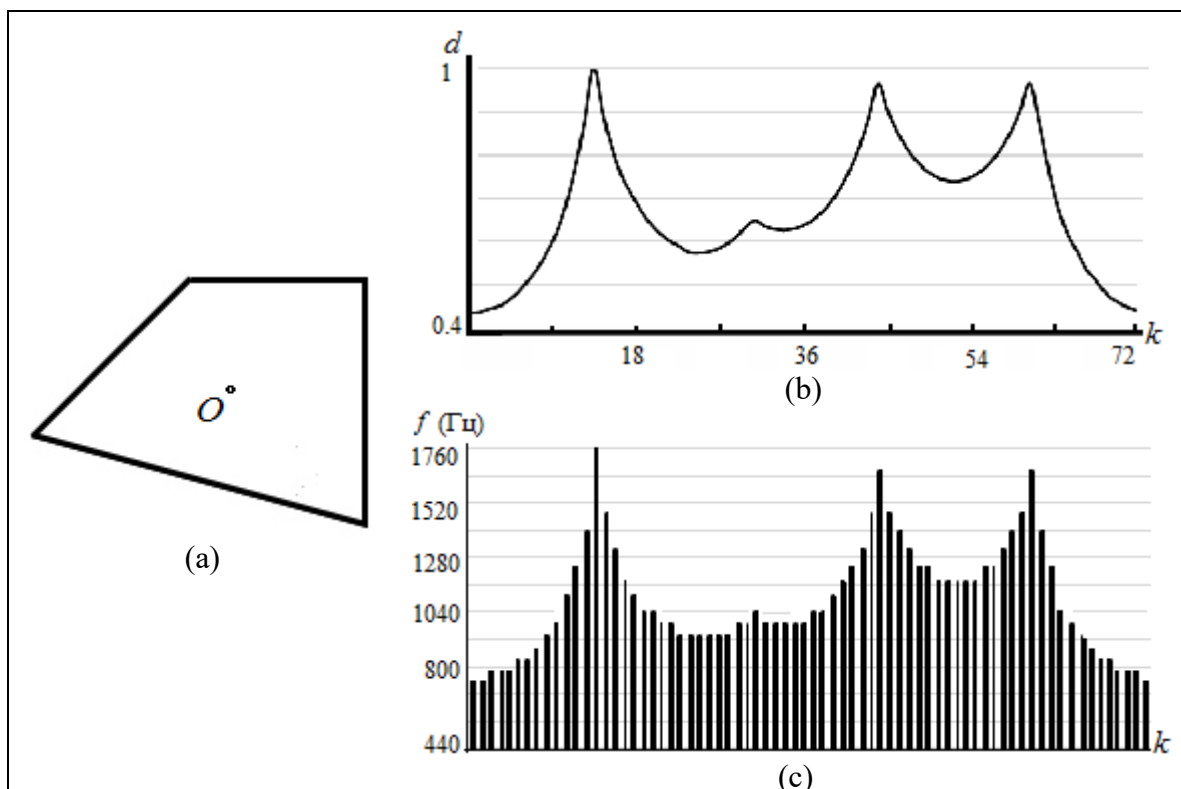


Рис. 2. Кодування контуру чотирикутника музичним звуком: (а) контур із центроїдом  $O$ ; (б) сигнатура; (с) частоти звуків музичного представлення.

Як приклад розглянемо зображення сигнатур «кут-відстань» (при  $\Delta\varphi = 5^\circ$ ) і частот музичних звуків для представлення контурів квадрата (рис. 1) і неправильного чотирикутника (рис. 2). У випадку квадрата сигнатура складається з чотирьох однакових ланок (рис. 1, б). Звуковий образ його також складається з чотирьох однакових фрагментів (рис. 1, с), кожен з яких за допомогою музичної нотації (табл. 1) можна представити у вигляді  $\{D_6 D_6 D_6 D_6^\# D_6^\# E_6 F_6 F_6^\# G_6^\# A_6 G_6^\# F_6^\# F_6 E_6 D_6^\# D_6 D_6\}$ .

Загальний час відтворення музичного образу контуру залежить від вибраного кроку по куту  $\Delta\varphi$  (він визначає кількість сигналів у звуковій послідовності) і заданої тривалості звучання сигналу частотою  $f_k$ . Через інерційність слуху для частот у діапазоні 1000–2000 Гц висота тону починає сприйматися через 15 мс, а для частот нижче 500 Гц – лише через 60 мс [2]. З огляду на цей факт, для впевненого сприйняття музичного образу контуру тривалість звучання сигналу будь-якої частоти можна задати рівною 65 мс. Наприклад, загальний час відтворення акустичного образу контуру при  $\Delta\varphi = 5^\circ$  становитиме приблизно 5 с.

### Висновки

Запропоновано метод побудови звукового образу контуру з використанням музичних звуків у зручному для сприйняття діапазоні частот від 440 Гц до 1760 Гц. Звуковий образ формується на основі одновимірного представлення контуру з використанням сигнатури «кут-відстань». При цьому більшому значенню сигнатури відповідає більш висока нота. На основі таких звукових образів нескладно інтерпретувати прості фігури (коло, квадрат та ін.), які є фундаментальними будівельними блоками більш складних об'єктів. Тому визнання їхньої характерної звукової сигнатури – важливий крок до інтерпретації складних зображень.



### Список використаної літератури

1. Meijer P.B.L. An Experimental System for Auditory Image Representations. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*. 1992. Vol. 39, No. 2. P. 112–121.
2. Радзишевский А.Ю. Основы аналогового и цифрового звука. Москва: Издательский дом “Вильямс”, 2006. 288 с.
3. Alty J.L., Rigas D.I. Communicating Graphical Information to Blind Users Using Music: the Role of Context. *Proceedings of the SIGCHI conference on Human factors in computing systems*, Los Angeles, USA, April 18–23 1998. P. 574–581.
4. Cronly-Dillon J., Persaud K.C., Gregory R. P. F. The Perception of Visual Images Encoded in Musical Form: A Study in Cross-Modality Information Transfer. *Proceedings: Biological Sciences*. 1999. Vol. 266, No. 1436. P. 2427–2433.
5. Abboud S., Hanassy S., Levy-Tzedek S., Maidenbaum S., Amedi A. EyeMusic: Introducing a ‘Visual’ Colourful Experience for the Blind Using Auditory Sensory Substitution. *Restorative Neurology and Neuroscience*. 2014. Vol. 32, No. 2. P. 247–257.
6. Uno S., Suzuki Y., Watanabe T., Matsumoto M., Wang Y. Sound-based image and position recognition system ‘SIPReS’. *Proceedings of the 24<sup>th</sup> International Conference on Auditory Display (ICAD 2018)*, Michigan Technological University, USA, June 10–15 2018. P. 67–72.
7. Гостев И.М. Методы идентификации графических объектов на основе геометрической корреляции. *Физика элементарных частиц и атомного ядра*. 2010. Т. 41. № 1. С. 49–96.
8. Zhang D., Lu G. Review of shape representation and description techniques. *Pattern Recognition*. 2004. Vol. 37, No. 1. P. 1–19.
9. Каленчук-Порханова А.А., Вакал Л.П. Пакет программ аппроксимации функций. *Комп’ютерні засоби, мережі та системи*. 2008. № 7. С. 32–38.
10. Вакал Л.П. Рівномірне кусково-поліноміальне наближення. *Комп’ютерні засоби, мережі та системи*. 2006. № 5. С. 53–59.
11. Vakal L.P. Solving uniform nonlinear approximation problem using continuous genetic algorithm. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. Vol. 48, No. 6. P. 49–59.
12. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. Москва : Техносфера, 2012. 1104 с.

### References

1. Meijer P.B.L. (1992) An Experimental System for Auditory Image Representations. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*. **39**, 2, 112–121.
2. Radzishhevskiy, A.Yu. (2006) Osnovy analogovogo i tsifrovogo zvuka. Moskva: Izdatelskiy dom “Vilyams”.
3. Alty, J.L., & Rigas, D.I. (1998) Communicating Graphical Information to Blind Users Using Music: the Role of Context. *Proceedings of the SIGCHI conference on Human factors in computing systems*, Los Angeles, USA, 574–581.
4. Cronly-Dillon, J., Persaud, K.C., & Gregory, R.P.F. (1999) The Perception of Visual Images Encoded in Musical Form: A Study in Cross-Modality Information Transfer. *Proceedings: Biological Sciences*. **266**, 1436, 2427–2433.
5. Abboud, S., Hanassy, S., Levy-Tzedek, S., Maidenbaum, S., & Amedi, A. (2014) EyeMusic: Introducing a ‘Visual’ Colourful Experience for the Blind Using Auditory Sensory Substitution. *Restorative Neurology and Neuroscience*. **32**, 2, 247–257.
6. Uno, S., Suzuki, Y., Watanabe, T., Matsumoto, M., & Wang, Y. (2018) Sound-based image and position recognition system ‘SIPReS’. *Proceedings of the 24<sup>th</sup> International*

- Conference on Auditory Display (ICAD 2018)*, Michigan Technological University, USA, 67–72.
7. Gostev, I.M. (2010) Metodyi identifikatsii graficheskikh ob'ektov na osnove geometricheskoy korrelyatsii. *Fizika elementarnykh chastits i atomnogo yadra*. **41**, 1, 49–96.
  8. Zhang, D., & Lu, G. (2004) Review of shape representation and description techniques. *Pattern Recognition*. **37**, 1, 1–19.
  9. Kalenchuk-Porkhanova, A.A., & Vakal, L.P. (2008) Paket programm approksimatsii funktsiy. *Kompiuterni zasoby, merezhi ta systemy*. **7**, 32–38.
  10. Vakal, L.P. (2006) Rivnomirne kuskovo-polinomialne nablyzhennia. *Kompiuterni zasoby, merezhi ta systemy*. **5**, 53–59.
  11. Vakal, L.P. (2016) Solving uniform nonlinear approximation problem using continuous genetic algorithm. *Journal of Automation and Information Sciences*. **48**, 6, 49–59.
  12. Gonsales, R., & Vuds, R. (2012) *Tsifrovaya obrabotka izobrazheniy*. Moskva: Tehnosfera.

Вакал Лариса Петрівна – к.т.н., старший науковий співробітник Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова. E-mail: [lara.vakal@gmail.com](mailto:lara.vakal@gmail.com), ORCID: 0000-0002-1658-5432.

Вакал Євген Сергійович – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри математичної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка. E-mail: [jvakal@gmail.com](mailto:jvakal@gmail.com), ORCID: 0000-0001-8581-9098.

УДК 514.18

О.В. ВОРОНЦОВ,  
Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка»  
І.В. ВОРОНЦОВА  
Полтавський коледж нафти і газу Національного університету  
«Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка»

## ЗАКОНОМІРНОСТІ ЗМІНИ ВЕЛИЧИН КОЕФІЦІЄНТІВ СУПЕРПОЗИЦІЇ У ПРОЦЕСІ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ГІПЕРБОЛІЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ

*У проектуванні сучасних будівельних споруд, архітектурних форм покриттів значне місце займає геометричне проектування, коли на стадії ескізу обумовлені основні геометричні форми з їх перевагами і недоліками.*

*Застосування геометричного апарату суперпозицій у поєднанні з класичним методом скінченних різниць, дозволяє істотно підвищити ефективність та розширити можливості процесу дискретного моделювання геометричних образів (ГО). Зокрема, дослідити можливість використання у якості інтерполянтів не тільки параболічних, а й будь-яких інших функціональних залежностей.*

*У процесі створення методик дискретного моделювання ГО звичайні способи інтерполяції не дозволяють застосовувати трансцендентні функції як інтерполянти, тому що при підстановці в них значень вихідних умов отримують систему трансцендентних рівнянь, яку не вдається розв'язати у загальному випадку.*

*У даній статті досліджено закономірності змін величин коефіцієнтів суперпозиції трьох довільно заданих, як суміжних, так і не суміжних вузлових точок для дискретного моделювання ланцюгової лінії. Дані дослідження визначають загальний підхід до одержання подібних закономірностей зміни величин коефіцієнтів суперпозиції трьох довільно заданих, як суміжних, так і не суміжних вузлових точок для визначення координат  $n$  точок модельованих будь-яких одновимірних функціональних залежностей та довільних одновимірних множин точок.*

*Розроблений спосіб дозволяє проводити трансцендентні криві через задані точки, що у більшості випадків є неможливим при застосуванні звичайних методів інтерполяції.*

*У подальшому результати даної роботи дозволять визначати закономірності зміни величини одного із трьох коефіцієнтів суперпозиції, як для суміжних, так і для не суміжних заданих трьох вузлових точок різних елементарних функцій, що дозволить розв'язувати задачі суцільної дискретної інтерполяції та екстраполяції числовими послідовностями будь-яких одновимірних функціональних залежностей (визначати ординати шуканих точок дискретних кривих) без трудомістких операцій складання та розв'язання великих систем лінійних та трансцендентних рівнянь.*

*Ключові слова: дискретне моделювання, геометричні образи, метод скінчених різниць, статико-геометричний метод, геометричний апарат суперпозицій, ланцюгова лінія, гіперболічні функції.*

О. В. ВОРОНЦОВ,  
Национальный университет «Полтавская политехника имени Юрия Кондратюка»  
И.В. ВОРОНЦОВА  
Полтавский колледж нефти и газа Национального университета  
«Полтавская политехника имени Юрия Кондратюка»

## ЗАКОНОМЕРНОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ ВЕЛИЧИН КОЭФФИЦИЕНТОВ СУПЕРПОЗИЦИИ В ПРОЦЕССЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

*В проектировании современных строительных сооружений, архитектурных форм покрытий значительное место занимает геометрическое проектирование, когда на стадии эскиза обусловлены основные геометрические формы с их преимуществами и недостатками.*

*Применение геометрического аппарата суперпозиций в сочетании с классическим методом конечных разностей позволяет существенно повысить эффективность и расширить возможности процесса дискретного моделирования геометрических образов (ГО). В частности, исследовать возможность использования в качестве интерполянтов не только параболических, но и любых других функциональных зависимостей.*

*В процессе создания методик дискретного моделирования ГО обычные способы интерполяции не позволяют применять трансцендентные функции как интерполянты, потому что при подстановке в них значений исходных условий получают систему трансцендентных уравнений, которую не удается решить в общем случае.*

*В данной статье исследованы закономерности изменений величин коэффициентов суперпозиции трех произвольно заданных, как смежных, так и не смежных узловых точек для дискретного моделирования цепной линии. Данные исследования определяют общий подход к получению подобных закономерностей изменения величин коэффициентов суперпозиции трех произвольно заданных, как смежных, так и не смежных узловых точек для определения координат  $n$  точек моделируемых любых одномерных функциональных зависимостей и произвольных одномерных множеств точек.*

*Разработанный способ позволяет проводить трансцендентные кривые через заданные точки, что в большинстве случаев невозможно при использовании обычных методов интерполяции.*

*В дальнейшем результаты данной работы позволят определять закономерности изменения величины одного из трех коэффициентов суперпозиции, как для смежных, так и для не смежных заданных трех узловых точек различных элементарных функций, что позволит решать задачи сплошной дискретной интерполяции и экстраполяции числовыми последовательностями любых одномерных функциональных зависимостей (определять ординаты искомых точек дискретных кривых) без трудоемких операций составления и решения больших систем линейных и трансцендентных уравнений.*

*Ключевые слова: дискретное моделирование, геометрические образы, метод конечных разностей, статико-геометрический метод, геометрический аппарат суперпозиций, цепная линия, гиперболические функции.*

**O.V. VORONTSOV,**

National University «Yuri KondratyukPoltava Polytechnic»

**I.V. VORONTSOVA**

Poltava Oil and Gas College ofNational University «Yuri KondratyukPoltava Polytechnic»

## **REGULARITIES OF VALUES CHANGE OF SUPERPOSITION COEFFICIENTS IN INTERPOLATION BY HYPERBOLIC FUNCTIONS**

*In design of modern building structures, architectural coating forms, geometric design takes a significant place, when at a sketch stage basic geometric shapes are determined together with their advantages and disadvantages*

*Using the geometric apparatus of superpositions in combination with the classical finite difference method we can significantly increase efficiency and expand capabilities of discrete modeling of geometric images. In particular, we can investigate the possibility of using as parabolic functional dependencies as any other ones as interpolants.*

*Creating discrete modeling techniques, traditional interpolation methods do not allow using transcendental functions as interpolants. This is due to the fact that the system of transcendental equations, which is obtained by substituting initial conditions into these functions, cannot be solved in the general case.*

*In this article it was investigated regularities of values change of superposition coefficients of three arbitrarily specified nodal points (both adjacent and non-adjacent) for discrete modeling of a catenary. These researches determine a general approach to obtaining similar regularities of values change of superposition coefficients of three arbitrary given nodal points (as adjacent as not-adjacent) to determine coordinates of  $n$  points of any modeled one-dimensional functional dependencies and arbitrary one-dimensional sets of points.*

*The developed method allows transcendental curves to be drawn through specified points, which is not possible with usual interpolation methods.*

*In the future, the results of this work will make it possible to determine regularities of change a value of one from three superposition coefficients for three given nodal points (as adjacent as not-adjacent) of various elementary functions. This will allow solving problems of continuous discrete interpolation and extrapolation by numerical sequences of any one-dimensional functional dependencies (to determine ordinates of desired points of discrete curves) without cumbersome operations of compiling and solving huge systems of linear and transcendental equations.*

*Key words: discrete modeling, geometric images, finite difference method, static-geometric method, geometric apparatus of superpositions, catenary, hyperbolic functions.*

### Постановка проблеми

У процесі створення методик дискретного моделювання геометричних образів (ГО) звичайні способи інтерполяції не дозволяють застосовувати трансцендентні функції як інтерполянти тому, що при підстановці в них значень вихідних умов отримаємо систему трансцендентних рівнянь, яку не вдається розв'язати у загальному випадку.

Залучення геометричного апарату суперпозицій для розв'язання задач інтерполяції значно розширює можливості дискретного моделювання ГО. Дослідивши закономірності зміни величин коефіцієнтів суперпозиції, як для суміжних, так і для не суміжних заданих трьох вузлових точок трансцендентних функцій, зможемо розв'язувати задачі суцільної дискретної інтерполяції та екстраполяції трансцендентними функціями без трудомістких операцій складання та розв'язання великих систем трансцендентних рівнянь.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Питанням застосування для дискретного моделювання ГО геометричного апарату суперпозицій в поєднанні з класичним методом скінченних різниць, статико-геометричним методом, математичним апаратом числових послідовностей присвячені роботи авторів даної статті [1, 2, 3, 4].

### Формулювання мети дослідження

Метою даної статті є дослідження закономірностей зміни величин коефіцієнтів суперпозиції трьох довільно заданих, як суміжних, так і не суміжних вузлових точок у процесі дискретної інтерполяції гіперболічними функціями, що дозволить розв'язувати задачі суцільної дискретної інтерполяції та екстраполяції трансцендентними функціями без трудомістких операцій складання та розв'язання великих систем трансцендентних рівнянь.

### Викладення основного матеріалу дослідження

Згідно доведеної у роботі [1] Властивості 1, координати будь-якої точки одновимірної множини точок є суперпозицією координат трьох довільних точок цієї множини і виведено формули для визначення величин коефіцієнтів суперпозиції із системи рівнянь (1):

$$\begin{cases} x_0 - x_3 = k_1(x_1 - x_3) + k_2(x_2 - x_3) \\ y_0 - y_3 = k_1(y_1 - y_3) + k_2(y_2 - y_3) \end{cases}, \quad (1)$$

у вигляді (2):

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{(x_0 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_0 - y_3)}{(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)}, \\ k_2 &= \frac{(x_1 - x_3)(y_0 - y_3) - (x_0 - x_3)(y_1 - y_3)}{(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)}, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $x_0, x_1, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2, y_3$  – відомі числові параметри,  $k_1, k_2$  – невідомі.

У задачах дискретної інтерполяції та екстраполяції невідомою величиною є ордината  $y_0$ , тому розв'яжемо дану систему рівнянь, у якій відомими числовими параметрами будуть  $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, k_1$ , а  $y_0$ , та, наприклад,  $k_2$  – невідомі, або  $y_0$ , та  $k_1$  – невідомі.

Результатом такого розв'язку будуть формули (3) і (4):

$$y_0 = k_1(y_1 - y_3) + y_3 - \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} [k_1(x_1 - x_3) + (x_3 - x_0)],$$

або:

$$y_0 = k_1 y_1 + ((k_1(x_2 - x_1) + (x_0 - x_2))y_3 + (k_1(x_1 - x_3) + (x_3 - x_0))y_2) / (x_3 - x_2);$$

$$y_0 = k_2 y_2 + ((k_2(x_1 - x_2) + (x_0 - x_1))y_3 + (k_2(x_2 - x_3) + (x_3 - x_0))y_1) / (x_3 - x_1); \quad (3)$$

$$k_1 = (k_2(x_2 - x_3) + (x_3 - x_0)) / (x_3 - x_1);$$

$$k_2 = (k_1(x_1 - x_3) + (x_3 - x_0)) / (x_3 - x_2). \quad (4)$$

Дослідивши закономірності зміни величини коефіцієнта суперпозиції  $k_i$  при моделюванні дискретних аналогів певних одновимірних числових послідовностей, зможемо розв'язувати задачі суцільної дискретної інтерполяції та екстраполяції числовими послідовностями будь-яких одновимірних функціональних залежностей (визначати ординати шуканих точок дискретних кривих) без трудомістких операцій складання та розв'язання великих систем лінійних рівнянь.

Розглянемо, наприклад, процес формування дискретних аналогів трансцендентних функціональних залежностей.

Наприклад, для вихідних умов замкненої форми числової послідовності (5)

$$y_i = chi; \quad (5)$$

$$i + 1 = 0, i + 2 = 1, i + 3 = 2, i_0 = i + 4 = 3;$$

$$y_{i+1} = 1, y_{i+2} = 1,543080635, y_{i+3} = 3,762195691,$$

$$y_0 = y_{i+4} = 10,067662,$$

числові дискретні значення якої представлені графічно на рисунку 1, величини коефіцієнтів суперпозиції, обчислені за формулами (2), матимуть значення:  $k_1 = 2,4381069994$ ,  $k_2 = -5,8762139987$ ,  $k_3 = 4,4381069993$ .

Величини коефіцієнту суперпозиції  $k_1$ :

$$k_1 = 2,4381069994; 11,4006053799; 38,060320756; 112,812110429; 318,286580244 \quad (6)$$

і величини  $k_2, k_3$  представляють собою числові послідовності, що, як і значення ординат числової послідовності  $y_i = chi$ , описуються рекурентною формулою на підставі шаблону (7):

$$\begin{array}{c} \textcircled{1} \approx \textcircled{2,368} - \textcircled{-1,736} - \textcircled{0,368} \end{array}, \quad (7)$$

одержаного в результаті досліджень у роботі [3].

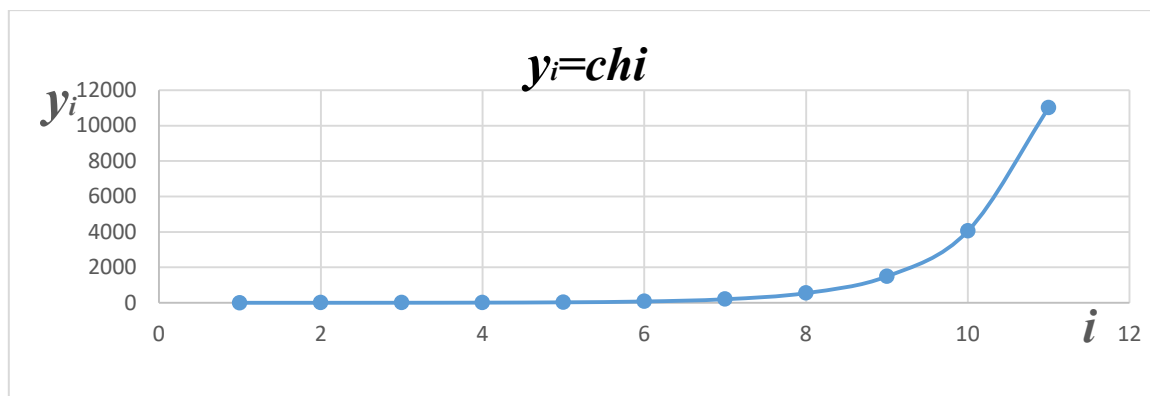


Рисунок 1. Графік дискретного ряду вузлових точок числової послідовності  $y_i = chi$

Дискретні значення величин коефіцієнтів суперпозиції графічно представлені на рисунку 2.

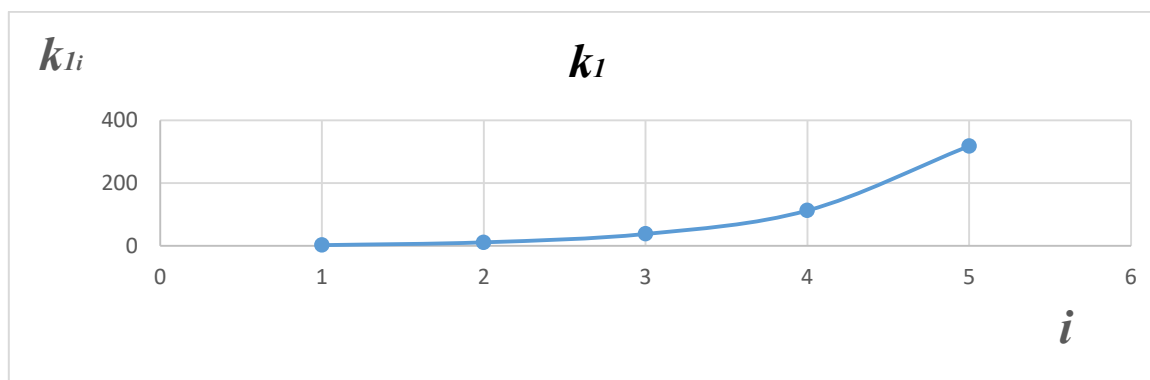


Рисунок 2. Графік дискретного ряду значень коефіцієнту суперпозиції  $k_i$ .

У шаблоні (7) величини коефіцієнтів суперпозиції трьох суміжних із шуканою точок одержані з точністю до третього знаку після коми. Тому, як і для величин коефіцієнтів суперпозиції даного обчислювального шаблону, отримуємо результат з точністю до третього знаку після коми:

$$\begin{aligned}
 y_{i-2} &= 2,368 \cdot y_{i-1} - 1,736 \cdot y_i + 0,368 \cdot y_{i+1}, & (8) \\
 2,4381069994 &= 2,368 \cdot 11,4006053799 - 1,736 \cdot 11,4006053799 + \\
 &+ 0,368 \cdot 38,060320756 = 2,438773.
 \end{aligned}$$

Тому достатньо мати три члени послідовності для визначення її  $n$  членів.

На підставі одержаних вище закономірностей зміни величин коефіцієнтів суперпозиції трьох суміжних вузлових точок (8) зможемо обчислити  $n$  дискретних значень вузлових точок числової послідовності (5) як суперпозиції трьох довільно заданих суміжних вузлових точок.

Отримані дискретні значення ординат модельованої кривої представляють собою числову послідовність, що, як і значення ординат числової послідовності (5), описується рекурентною формулою (8) і також є ланцюговою лінією.

Дискретні значення ординат вузлових точок модельованої кривої показано на рисунку 3.

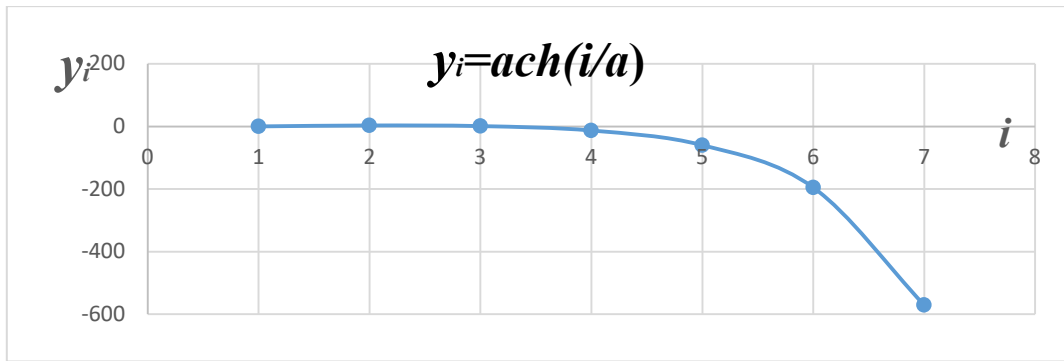
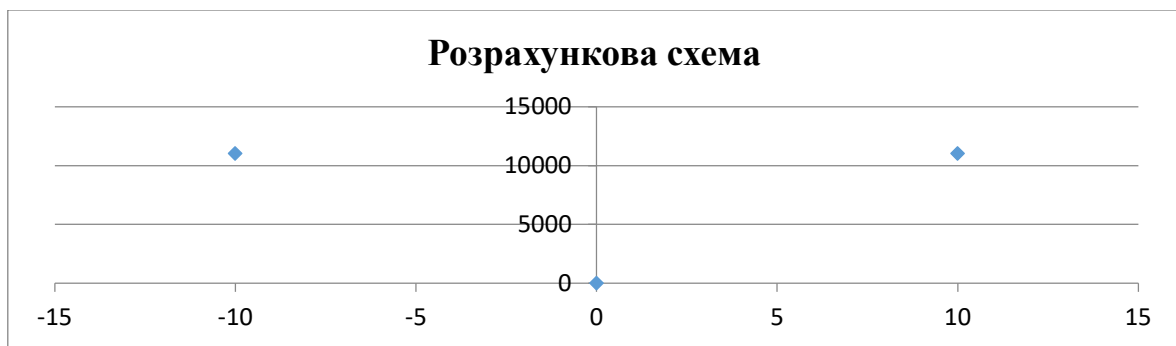
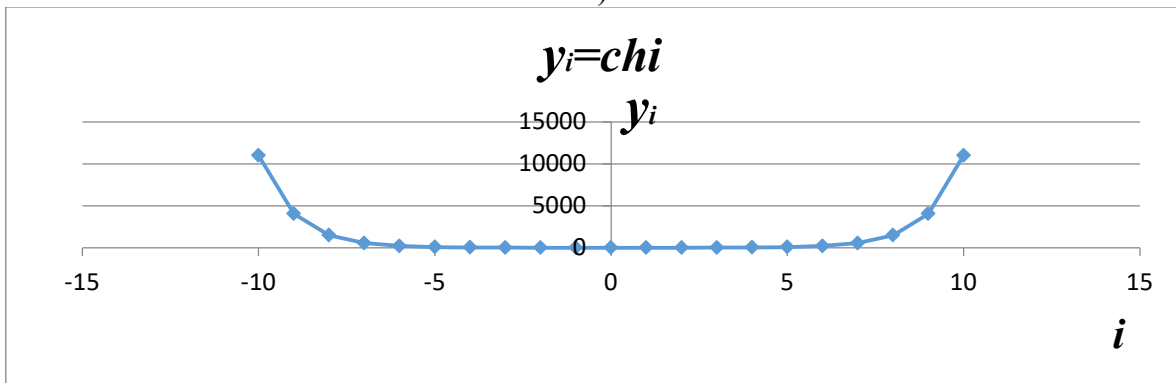


Рисунок 3. Графік дискретних значень ординат вузлових точок модельованої кривої

Розглянемо процес формування дискретних аналогів функціональних залежностей також на основі числової послідовності (5), члени якої представлені графічно на рисунку 4 б).



а)



б)

Рисунок 4 а), б). Розрахункова схема і графік дискретного ряду вузлових точок числової послідовності  $y_i = chi$

Для симетричних вихідних умов розрахункової схеми, представленої на рисунку 4 а):

$$i_1 = -10, i_2 = 0, i_3 = 10 ;$$

$$y_{i_1} = 11013,2329201; y_{i_2} = 1, y_{i_3} = 11013,2329201;$$

за формулами (2) обчислимо величини коефіцієнтів суперпозиції заданих двох контурних і центральної вузлових точок для визначення ординат проміжних вузлових точок.



Величини коефіцієнтів суперпозиції представляють собою числові послідовності, що, як і значення ординат числової послідовності  $y_i = ch_i$ , описуються рекурентною формулою (10) на підставі шаблону (9):

$$1 \approx 0,422 \cdot 0,733 \cdot -0,155, \quad (9)$$

одержаного в результаті досліджень у роботі [3],

$$y_{i-1} = 0,422 \cdot y_{i-2} + 0,733 \cdot y_i - 0,155 \cdot y_{i+1}, \quad (10)$$

Результати обчислень дискретних значень ординат модельованої кривої представлено графічно на рисунку 5.

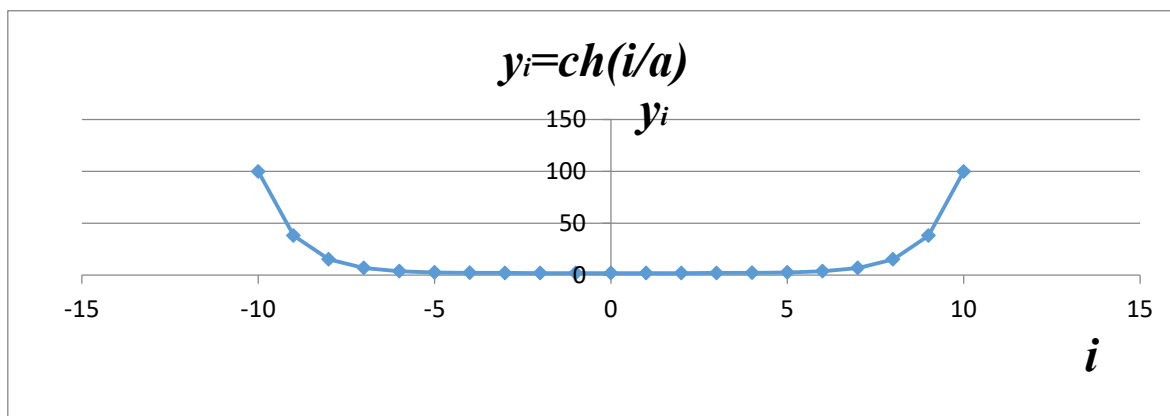


Рисунок 5. Графік дискретних значень ординат вузлових точок модельованої кривої

Таким чином виконано дискретну інтерполяцію гіперболічною функцією суперпозиціями координат трьох довільно заданих точок.

### Висновки

У даній статті досліджено закономірності зміни величин коефіцієнтів суперпозиції трьох довільно заданих, як суміжних, так і не суміжних вузлових точок у процесі дискретної інтерполяції гіперболічними функціями. Результати даних досліджень визначають загальний підхід до одержання подібних закономірностей зміни величин коефіцієнтів суперпозиції трьох довільно заданих, як суміжних, так і не суміжних вузлових точок для визначення координат  $n$  точок модельованих будь-яких одновимірних функціональних залежностей та довільних одновимірних множин точок.

### Список використаної літератури.

1. Воронцов О.В., Тулупова Л.О. Дискретное моделирование кривых поверхностей суперпозициями двумерных точечных множеств. *Сборник статей по материалам XL международной научно-практической конференции «Технические науки – от теории к практике»*. Новосибирск. 2014. №11 (36). С. 7–16.
2. Воронцов О.В., Воронцова І.В. Спосіб одновимірної дискретної інтерполяції за координатами трьох точок числових послідовностей на прикладі показникових функцій. *Прикладні питання математичного моделювання*. Херсон: ХНТУ. 2020.Т.3. №2.2. С. 35–43.

3. Vorontsov O.V., Tulupova L.O., Vorontsova I.V. Discrete modeling of building structures geometric images. *International Journal of Engineering & Technology*. 2018. Vol. 7/ No. 3.2. P. 727–731.
4. Vorontsov O.V., Tulupova L.O., Vorontsova I.V. Modeling of shell type spatial structural forms by superpositions of support nodes coordinates. *Lecture Notes in Civil Engineering*. 2019. Vol. 73. P. 501–513.

#### References.

1. Vorontsov, O.V., & Tulupova, L.O. (2014). Diskretnoe modelirovanie krivyyih poverhnostey superpozitsiyami dvumernyyih tochechnyyih mnozhestv: *sbornik statey po materialam XL mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii «Tehnicheskie nauki – ot teorii k praktike»*. Novosibirsk, **11**(36), 7–16.  
[http://sibac.info/sites/default/files/archive/2014/2014.11.19\\_teh.\\_nauki\\_pravka.pdf](http://sibac.info/sites/default/files/archive/2014/2014.11.19_teh._nauki_pravka.pdf)
2. Vorontsov, O.V., & Vorontsova, I.V. (2020). Sposib odnovymirnoi dyskretnoi interpoliatsii za koordynatamy trokh tochk chyslovykh poslidoynosti na prykladi pokaznykovykh funktsii. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuvannia*. Kherson, **3**, 2.2, 35–43. DOI:10.32782.2618-0340/2020.3.2-2.3
3. Vorontsov, O.V., Tulupova, L.O., & Vorontsova, I.V. (2018). Discrete modeling of building structures geometric images. *International Journal of Engineering & Technology*. **7**, 3.2, 727–731. DOI: 10.14419/ijet.v7i3.2.15467
4. Vorontsov, O.V., Tulupova, L.O., & Vorontsova, I.V. (2019). Modeling of shell type spatial structural forms by superpositions of support nodes coordinates. *Lecture Notes in Civil Engineering*. **73**, 501-513. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-42939-3>

Воронцов Олег Вікторович – к.т.н., доцент, завідуючий кафедрою нарисної геометрії і графіки Національного університету «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка», e-mail: [voronoleg6163@gmail.com](mailto:voronoleg6163@gmail.com), ORCID: 0000-0001-7339-9196.

Воронцова Ірина Валеріївна – к.пед.н., викладач Полтавського коледжу нафти і газу Національного університету «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка», e-mail: [ira061061@gmail.com](mailto:ira061061@gmail.com), ORCID: 0000-0001-9131-2816.

УДК 620.179.147+519.853.6

В.Я. ГАЛЬЧЕНКО, Р.В. ТРЕМБОВЕЦЬКА, В.В. ТИЧКОВ  
Черкаський державний технологічний університет

## ТЕХНІКИ СТВОРЕННЯ СУРОГАТНИХ МОДЕЛЕЙ ВИХРОСТРУМОВИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ В ГІПЕРПРОСТОРІ ЗАСОБАМИ АДИТИВНОЇ НЕЙРОМЕРЕЖЕВОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

*Сформульовано задачу багатовимірної апроксимації функціональних апроксимаційних залежностей розподілу густини вихрових струмів для низки структур систем збудження накладних вихрострумових перетворювачів. Запропоновано універсальну методологію щодо побудови багатовимірних апроксимаційних моделей (сурогатних моделей) різновидів систем збудження накладних вихрострумових перетворювачів. Розглянуто метод опису «точними» математичними моделями процесу взаємодії рухомого вихрострумового перетворювача з об'єктом контролю, який є обов'язковою складовою запропонованої методології. Комп'ютерний план обчислювального експерименту запропоновано реалізовувати на основі квазивипадкових послідовностей із мінімальним розходженням, а саме із застосуванням ЛП<sub>τ</sub>-послідовностей Соболя та адитивних рекурсивних R<sub>τ</sub>-послідовностей Кронекера. Для побудови багатовимірних сурогатних моделей запропоновано використовувати гібридний підхід, що передбачає розбиття простору пошуку на декілька декомпозиційних областей, в кожній із яких здійснюється локальна апроксимація, з наступним об'єднанням складових частин апроксимацій в єдину неперервну модель та одночасне застосування адитивно-комітетної нейромережевої технології. Верифікація створених багатовимірних сурогатних моделей здійснюється оцінкою їх адекватності та інформативності за низкою статистичних показників, а саме, коефіцієнту детермінації, відношення стандартних відхилень, середньої величини модельної похибки, залишкового середнього квадрата похибки та оцінкою відновлення з їх використанням гіперповерхні відгуку.*

*Розглянуто приклади апроксимаційних залежностей накладних вихрострумових перетворювачів із різними геометричними формами системи збудження, а саме, круговою і рамковою та різними структурами як планарними, так і об'ємними. Для кожного з розглянутого прикладу наведено результати відтворення багатовимірних поверхонь відгуку у вигляді ліній рівня, отриманих за допомогою апроксимаційних моделей. Якість створених сурогатних моделей оцінювалася діаграмами розсіювання, відносним значенням похибки апроксимації та гістограми розподілу цих похибок.*

*Ключові слова: однорідний накладний вихрострумовий перетворювач, густина вихрових струмів, однорідний розподіл, гіперповерхня відгуку, багатовимірні моделі апроксимації, сурогатна модель, метамодель, комп'ютерний план експерименту, адитивна нейромережева регресія.*

В.Я. ГАЛЬЧЕНКО, Р.В. ТРЕМБОВЕЦКАЯ, В.В. ТЫЧКОВ  
Черкасский государственный технологический университет

## ТЕХНИКИ СОЗДАНИЯ СУРРОГАТНЫХ МОДЕЛЕЙ ВИХРЕТОКОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ В ГИПЕРПРОСТРАНСТВЕ СРЕДСТВАМИ АДДИТИВНОЙ НЕЙРОСЕТЕВОЙ АППРОКСИМАЦИИ

*Сформулирована задача многомерной аппроксимации функциональных аппроксимационных зависимостей распределения плотности вихревых токов для нескольких структур систем возбуждения накладных вихретоковых преобразователей. Предложена универсальная методология для построения многомерных моделей аппроксимации (суррогатных моделей) разновидностей систем возбуждения накладных вихретоковых преобразователей. Рассмотрен метод описания «точными» математическими моделями процесса взаимодействия движущегося вихретокового преобразователя с объектом контроля, который является обязательной составляющей предложенной методологии. Компьютерный план вычислительного эксперимента предложено реализовывать на основе квазислучайных последовательностей с минимальным расхождением, а именно, с использованием ЛП<sub>τ</sub>-последовательностей Соболя и адитивных рекурсивных R<sub>τ</sub>-последовательностей Кронекера. Для построения многомерных суррогатных моделей предложено использовать гибридный подход, заключающийся в разбиении пространства поиска на несколько декомпозиционных областей, в каждой из которых осуществляется локальная аппроксимация, с последующим объединением составных частей аппроксимаций в одну непрерывную модель и одновременным использованием адитивно-комитетной нейросетевой технологии. Верификация созданных многомерных суррогатных моделей осуществляется оценкой их адекватности и информативности рядом статистических показателей, а именно,*

коэффициентом детерминации, отношением стандартных отклонений, средней модельной погрешностью, остаточным средним квадратом погрешности и оценкой восстановления с их использованием гиперповерхности отклика.

Рассмотрены примеры аппроксимаций накладных вихретоковых преобразователей с различными геометрическими формами систем возбуждения, а именно, круговой и рамковой и разными структурами как планарными, так и объемными. Для каждого рассмотренного примера приведены результаты воспроизведения многомерных поверхностей отклика в виде линий уровня, полученных с помощью методов аппроксимации. Качество созданных суррогатных моделей оценивалось диаграммами рассеивания, относительным значением погрешности аппроксимации и гистограммами распределения этих погрешностей

Ключевые слова: однородный накладной вихретоковой преобразователь, плотность вихревых токов, однородное распределение, гиперповерхность отклика, многомерные модели аппроксимации, суррогатная модель, метамодель, компьютерный план эксперимента, аддитивная нейросетевая регрессия.

V. Ya. HALCHENKO, R. V. TREMBOVETSKA, V. V. TYCHKOV  
Cherkasy State Technological University

## TECHNIQUES FOR CREATING SURROGATE MODELS OF EDDY-CURRENT PROBES IN HYPERSPACE BY MEANS OF ADDITIVE NEURAL NETWORK APPROXIMATION

*The problem of multidimensional approximation of functional approximation dependences of the eddy current density distribution for several structures of excitation systems of surface eddy current probes is formulated. A universal methodology for the construction of multidimensional approximation models (surrogate models) of various excitation systems of surface eddy current probes is proposed. The method of describing the "exact" mathematical models of the interaction process of a moving eddy current probe with the testing object, which is a mandatory component of the proposed methodology, is considered. The computer design of the computational experiment is proposed to be realized on the basis of quasi-random sequences with minimal difference, namely with the use of Sobol's LP<sub>r</sub>-sequences and additive recursive R<sub>d</sub>-sequences of Kronecker. To design multidimensional surrogate models, it is proposed to use a hybrid approach, which consists in dividing the search space into several decomposition areas, in each of which local approximation is carried out, followed by combining the constituent parts of the approximations into one continuous model and the simultaneous use of additive-committee neural network technology. Verification of the created multidimensional surrogate models is carried out by assessing their adequacy and informativeness on a number of statistical indicators, namely the coefficient of determination, the ratio of standard deviations, the mean model error, the residual mean square error and the assessment of recovery using their response surface.*

*Examples of approximation dependences of surface eddy current probes with different geometric shapes of the excitation system, namely circular and frame and different structures, both planar and three-dimensional, are considered. For each of the considered examples the results of reproduction of multidimensional response surfaces in the form of level lines obtained by means of approximation models are given. The quality of the created surrogate models was evaluated by scattering diagrams, the relative value of the approximation error and the histogram of the distribution of these errors.*

*Keywords: homogeneous surface eddy current probe, eddy current density, homogeneous distribution, response hypersurface, multidimensional approximation models, surrogate model, metamodel, computer design of experiment, additive neural network regression.*

### Постановка проблеми

Розвиток засобів неруйнівного вихрострумовеого контролю, викликаний необхідністю виконання завдань дефектометрії, призвів до потреби однорідних накладних вихрострумівих перетворювачів (ОНВСП). Застосування ОНВСП, які генерують однорідний розподіл густини вихрових струмів (ГВС) в об'єктах контролю (ОК), дозволяє забезпечити однорідну чутливість до дефектів суцільності. Тому створення спеціальних конструкцій НВСП, а саме систем збудження (СЗ) в їх складі, що забезпечують наперед заданий розподіл ГВС в зоні контролю об'єкту є непростою проектною задачею, яку доцільно розв'язувати із використанням параметричного оптимального синтезу.

Серед можливих конструкцій СЗ виділяють гомогенні та гетерогенні структури збудження НВСП. Гомогенні структури містять або системи тільки кругових витків із радіусами  $r_{0i}$ , або тільки системи витків у вигляді рамок розмірами  $a \times b$  із однаковою або різною висотою розташування відносно ОК. Тобто існує розмаїття варіантів структур СЗ, причому інтуїтивно не можна віддати перевагу ні одній із них. Кожен варіант СЗ потребує ретельного дослідження з точки зору можливості забезпечення апіорі заданого однорідного розподілу ГВС в зоні контролю об'єкта.

Ідея цілеспрямованої реалізації зондувальних властивостей електромагнітного поля (ЕМП), розглядається в роботах [1-4] і її втілення дає різноманітні конструктивні рішення СЗ з покращеними селективністю та чутливістю ВСП. Так в роботі [4] наведено детальний аналіз науково-технічної інформації щодо вихрострумовеого контролю з використанням ЕМП збудження з апіорі заданими властивостями та узагальнено підходи теоретичних досліджень в цьому напрямку. Проте в наявних дослідженнях головна увага зосереджувалася на нерухомих відносно ОК перетворювачах, що не вимагало необхідності синтезувати заданий розподіл ГВС в ОК. Для рухомих НВСП, що є характерним для автоматизованих процесів контролю, необхідно враховувати вклад струмів перенесення в розподіл ГВС. Постановка задачі щодо створення наперед заданого розподілу ГВС із врахуванням ефекту швидкості раніше дослідниками не розглядалася.

Перші спроби в цьому напрямку належать авторам [5], де запропоновано метод сурогатного нелінійного оптимального метаевристичного синтезу ОНВСП. Застосування технології сурогатної оптимізації дозволяє розв'язувати задачі оптимального синтезу з використанням метамodelей ВСП, які характеризуються високою обчислювальною продуктивністю. Створення апроксимаційних modelей (метамodelей, сурогатних modelей) НВСП, що з прийнятною точністю відтворюють багатовимірні в загальному випадку поверхні відгуку, є дуже важливим етапом методу, який визначає в кінцевому результаті успішність синтезу апіорі заданого однорідного розподілу ГВС в зоні контролю об'єкта.

**Метою даних досліджень** є створення універсального методу апроксимації гіперповерхонь відгуку НВСП із достатньою точністю, що є запорукою успішного розв'язку задач параметричного сурогатного синтезу перетворювачів з однорідною чутливістю в зоні контролю.

#### **Аналіз останніх досліджень і публікацій**

З'ясуємо наявні на даний час методи побудови метамodelей, які широко застосовуються науковцями для розв'язку різноманітних технічних задач. З літературних джерел вдалося виявити широке коло відомих підходів до побудови регресійних залежностей, кожен з яких має як переваги, так і недоліки, які необхідно враховувати при їх застосуванні [6-7]. Детальний аналіз цих методів міститься в оглядовій статті авторів [8]. Серед їх різновидів, зокрема поліноміальних, сплайн-апроксимацій, крігінг-метамodelей, регресійних RBF-мodelей тощо, авторами перевага віддається евристичним метамodelям.

При створенні метамodelей для складних випадків топології гіперповерхонь відгуку широке застосування завдяки своїм універсальним апроксимаційним властивостям знаходять штучні нейронні мережі на радіально-базисних функціях RBF-ANN та багаточарових перцептронах MLP-ANN. Сформулюємо задачу багатовимірної

апроксимації математично для ряду структур СЗ НВСП у вигляді функціональних апроксимаційних залежностей розподілу ГВС. В табл. 1 наведено різновиди таких залежностей, де  $x$  та  $y$  є просторовими координатами на поверхні ОК в зоні контролю.

Планарна (пласка) кругова структура СЗ характеризується наявністю  $M$  котушок із радіусами  $r_{0i}$  ( $i = 1...M$ ) із рівномірним  $\Delta r = \text{const}$  або нерівномірним  $\Delta r = \text{var}$  їх розташуванням, що знаходяться на одній висоті  $z_0$  над ОК. Планарна рамкова структура СЗ розглядається аналогічною. На відміну від планарної структури СЗ для характеристики об'ємної додається ще один параметр, а саме, висота розташування котушок  $z_{0i}$  над ОК. Також слід відзначити, що табл. 1 так само містить інформацію щодо квадратних СЗ НВСП, які є окремим випадком прямокутної СЗ.

Таблиця 1.

Різновиди апроксимаційних залежностей розподілу ГВС ОНВСП

№	Структура СЗ НВСП	Геометрична форма СЗ	Функціональна апроксимаційна залежність ГВС
1	планарна	кругова	$\mathcal{F}=f(x, y, r_0)$
2	об'ємна		$\mathcal{F}=f(x, y, r_0, z_0)$
3	планарна	квадратна	$\mathcal{F}=f(x, y, a)$
		прямокутна	$\mathcal{F}=f(x, y, a, b)$
4	об'ємна	квадратна	$\mathcal{F}=f(x, y, a, z_0)$
		прямокутна	$\mathcal{F}=f(x, y, a, b, z_0)$
5	об'ємна	квадратна тангенціальна	$\mathcal{F}=f(x, y, a, b, x_0)$

Топологія багатовимірних поверхонь відгуку ГВС є вельми складною та не підлягає візуалізації. Тому задача створення методу апроксимації гіперповерхонь відгуку ГВС з достатньою точністю, тобто побудови метамоделей НВСП, є актуальною та заслуговує на увагу.

Створення апроксимацій гіперповерхонь відгуку виконується в декілька етапів: перший – характеристика взаємодії НВСП з ОК за допомогою «точної» електродинамічної математичної моделі; другий – побудова комп'ютерного плану обчислювального експерименту (КПЕ); третій – створення апроксимаційної моделі і завершальний етап – встановлення адекватності, інформативності та оцінювання точності отриманої апроксимаційної моделі.

### Викладення основного матеріалу дослідження

Аналітичні функціональні залежності, тобто «точні» електродинамічні математичні моделі, що описують розподіл комплексних компонент магнітної індукції в середовищі ОК, отримані дослідниками в роботі [9] шляхом розв'язку крайових задач в частинних похідних з відповідними граничними умовами та припущеннями. Середовище вважалось лінійним, однорідним, ізотропним; ОК – струмопровідним, нескінченної ширини та довжини та кінцевої товщини  $d$ ; нескінченно тонкий рухомий зі швидкістю  $v$  відносно ОК виток СЗ розміщується на висоті  $z_0$  над ОК та живиться змінним струмом  $I$  круговою частотою  $\omega$ ; електрична провідність  $\sigma$ , відносна магнітна проникність  $\mu_r$  матеріалу ОК і швидкість руху перетворювача  $\vec{v} = (v_x, v_y, 0)$  є сталими.

Тоді математична модель розподілу ГВС в ОК визначається через частинні похідні складових магнітної індукції  $B_x, B_y, B_z$  за просторовими координатами:

$$J_x = \frac{1}{\mu_0 \cdot \mu_r} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left[ j \cdot \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot I}{8 \cdot \pi^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi^2 + \eta^2}{\eta \cdot \gamma \cdot (1 - e^{-2\gamma d})} \cdot \left[ \left\{ -(1 + \lambda_0) \cdot e^{-2\gamma d} + v_0 \cdot e^{(\gamma - \sqrt{\xi^2 + \eta^2})d} \right\} \cdot e^{\gamma z} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \left\{ 1 + \lambda_0 - v_0 \cdot e^{(\gamma - \sqrt{\xi^2 + \eta^2})d} \right\} \cdot e^{-\gamma z} \right] \cdot e^{-j(x \cdot \xi + y \cdot \eta)} \cdot e^{-z_0 \cdot \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \cdot S(\xi, \eta) d\xi d\eta \right] - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot I}{8 \cdot \pi^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 - e^{-2\gamma d})} \cdot \left[ \left\{ -(1 + \lambda_0) \cdot e^{-2\gamma d} + v_0 \cdot e^{(\gamma - \sqrt{\xi^2 + \eta^2})d} \right\} \cdot e^{\gamma z} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \left\{ 1 + \lambda_0 - v_0 \cdot e^{(\gamma - \sqrt{\xi^2 + \eta^2})d} \right\} \cdot e^{-\gamma z} \right] \cdot e^{-j(x \cdot \xi + y \cdot \eta)} \cdot e^{-z_0 \cdot \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \cdot S(\xi, \eta) d\xi d\eta, \right] \right] \quad (1)$$

$$J_y = \frac{1}{\mu_0 \cdot \mu_r} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot I}{8 \cdot \pi^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi}{\eta \cdot (1 - e^{-2\gamma d})} \cdot \left[ \left\{ -(1 + \lambda_0) \cdot e^{-2\gamma d} + v_0 \cdot e^{(\gamma - \sqrt{\xi^2 + \eta^2})d} \right\} \cdot e^{\gamma z} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \left\{ 1 + \lambda_0 - v_0 \cdot e^{(\gamma - \sqrt{\xi^2 + \eta^2})d} \right\} \cdot e^{-\gamma z} \right] \cdot e^{-j(x \cdot \xi + y \cdot \eta)} \cdot e^{-z_0 \cdot \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \cdot S(\xi, \eta) d\xi d\eta \right] - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial x} \left[ j \cdot \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot I}{8 \cdot \pi^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi^2 + \eta^2}{\eta \cdot \gamma \cdot (1 - e^{-2\gamma d})} \cdot \left[ \left\{ -(1 + \lambda_0) \cdot e^{-2\gamma d} + v_0 \cdot e^{(\gamma - \sqrt{\xi^2 + \eta^2})d} \right\} \cdot e^{\gamma z} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \left\{ 1 + \lambda_0 - v_0 \cdot e^{(\gamma - \sqrt{\xi^2 + \eta^2})d} \right\} \cdot e^{-\gamma z} \right] \cdot e^{-j(x \cdot \xi + y \cdot \eta)} \cdot e^{-z_0 \cdot \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \cdot S(\xi, \eta) d\xi d\eta \right] \right] \quad (2)$$

де  $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$  – магнітна постійна у вакуумі;  $j = \sqrt{-1}$ ;

$$\gamma = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - j \cdot \sigma \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot (v_x \cdot \xi + v_y \cdot \eta) + j \cdot \omega \cdot \sigma \cdot \mu_0 \cdot \mu_r};$$

$$\lambda_0 = \frac{\{\gamma^2 - \mu_r^2 \cdot (\xi^2 + \eta^2)\} \cdot (1 - e^{-2\gamma d})}{(\gamma + \mu_r \cdot \sqrt{\xi^2 + \eta^2})^2 - (\gamma - \mu_r \cdot \sqrt{\xi^2 + \eta^2})^2 \cdot e^{-2\gamma d}};$$

$$v_0 = \frac{4 \cdot \mu_r \cdot \gamma \cdot \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \cdot e^{(\sqrt{\xi^2 + \eta^2} - \gamma)d}}{(\gamma + \mu_r \cdot \sqrt{\xi^2 + \eta^2})^2 - (\gamma - \mu_r \cdot \sqrt{\xi^2 + \eta^2})^2 \cdot e^{-2\gamma d}};$$

де  $S(\xi, \eta)$  – функція форми витка СЗ;

$\xi, \eta$  – змінні інтегрування.

У виразах (1), (2) функції форми котушки  $S(\xi, \eta)$  для кругових і рамкових НВСП є різними [9].

Побудова метамоделі із застосуванням штучних нейронних мереж (НМ) передбачає процедуру навчання на масиві даних, які отримуються розрахунком за «точними» математичними моделями. Тому цілком логічним є створення ефективного ПЕ, вибір якого суттєво впливає на точність апроксимаційної моделі. Оскільки топологія

гіперповерхні відгуку ГВС є складною, тому доцільно застосовувати неklasичні методи планування експерименту, а саме комп'ютерні методи заповнення багатовимірного простору пошуку опорними точками. КПЕ найкраще забезпечують відтворення глобальної та локальної поведінки багатовимірної поверхні відгуку. Зважаючи на апіорну невизначеність топології необхідно рівномірно заповнювати гіперпаралелепіпед області пошуку точками, що збільшує ймовірність їх потрапляння в області екстремумів чи перегинів гіперповерхні відгуку.

На сьогодні добре розроблена теорія генерування одновимірних квазівипадкових розширюваних послідовностей, що мають низькі показники розбіжності [10-11]. Як було показано в роботі [12], побудова КПЕ суттєво ускладнюється, якщо розмірність простору більше ніж три. Тобто виникає необхідність додаткових досліджень щодо оптимізованого вибору, так званих, базисних параметрів послідовності та в роботі [12] проведено такі дослідження стосовно ЛП<sub>τ</sub>-послідовностей Соболя. В результаті дослідження встановлено ряд комбінацій ЛП<sub>τ</sub>-послідовностей для три-, чотири- та п'ятивимірних планів, які мають найкращі показники гомогенності. Також для ПЕ для багатовимірного факторного простору доцільно застосовувати сукупності безпараметричних адитивних рекурсивних одновимірних R-послідовностей [13]. Багатовимірні ПЕ на основі цих послідовностей мають прийнятні, хоча й не найкращі, характеристики гомогенності у порівнянні із ПЕ на ЛП<sub>τ</sub>-послідовностях, проте не потребують додаткових досліджень щодо оцінки їх якості. Тому при створенні багатовимірних апроксимаційних моделей для різних варіантів структур збудження НВСП авторами використовуються багатовимірні КПЕ на основі квазівипадкових безпараметричних адитивних R-послідовностей Кронекера з використанням ірраціональних чисел, які своєю чергою отримані на базі узагальненої послідовності Фібоначчі, та комбінації ЛП<sub>τ</sub>-послідовностей Соболя з найкращими показниками центрального та циклічного розходжень.

Розглянемо детально на прикладах особливості застосування нейромережових технологій для створення багатопараметричних апроксимаційних моделей гіперповерхонь НВСП, що мають прийнятні показники точності. При цьому необхідно зауважити, що якість всіх створених багатовимірних апроксимаційних моделей, які розглядаються нижче, обов'язково оцінюється комплексом статистичних показників: коефіцієнтом детермінації  $R^2$ ; відношенням стандартних відхилень  $S.D.ratio$ ; середньою відносною величиною модельної похибки  $MAPE, \%$ ; сумою квадратів залишків  $SS_R$ ; середнім квадратом залишків  $MS_R$ . Також для візуального аналізу результатів та їх кращого сприйняття використовується графічне представлення у вигляді гістограм відносних похибок та діаграм розсіювання.

В роботі [14] розглянутий найпростіший випадок побудови апроксимаційної моделі для кругового НВСП з планарною структурою СЗ при варіюванні трьох параметрів  $\mathcal{F} = f(x, y, r_0)$ . Отримані результати показують неможливість досягнення необхідної точності апроксимаційної моделі за допомогою глобальної одинарної RBF-ANN мережі. І тільки застосування комітетів НМ із прийняттям рішення усередненням по ансамблю з процедурою підсилення *boosting* дозволило отримати задовільну точність апроксимації.

Значно покращити точність цієї апроксимаційної моделі вдалося застосуванням гібридного підходу, коли одночасно використовується технологія декомпозиції області пошуку та НМ, побудованих на техніках асоціативних машин із різними методами отримання рішення. Так в роботі [5] запропоновано використовувати адитивну НМ-регресію [8] з декомпозицією простору пошуку та усередненням по ансамблю. Для отримання прийнятної  $MAPE, \%$  на рівні 4,78 % - 6,76 % виявилось достатнім розбиття простору на три підобласті по радіусу витка СЗ та для кожної з отриманих підобластей



застосування адитивної НМ-регресії з усередненням по ансамблю на останньому рівні апроксимації та підсиленням (boosting). Підсилення здійснювалося шляхом формування підвбірок з використанням процедури беггінг. Для візуалізації отриманих результатів апроксимації багатовимірної поверхні відгуку застосовано зрізи та узагальнені зрізи гіперповерхні. На рис. 1 а показано результат відновлення розподілу ГВС у вигляді ліній рівня для зрізу гіперповерхні відгуку ( $r_0 = 14,7$  мм,  $z_0 = 3$  мм), отриманий за допомогою апроксимаційної моделі із застосуванням адитивної НМ-регресії.

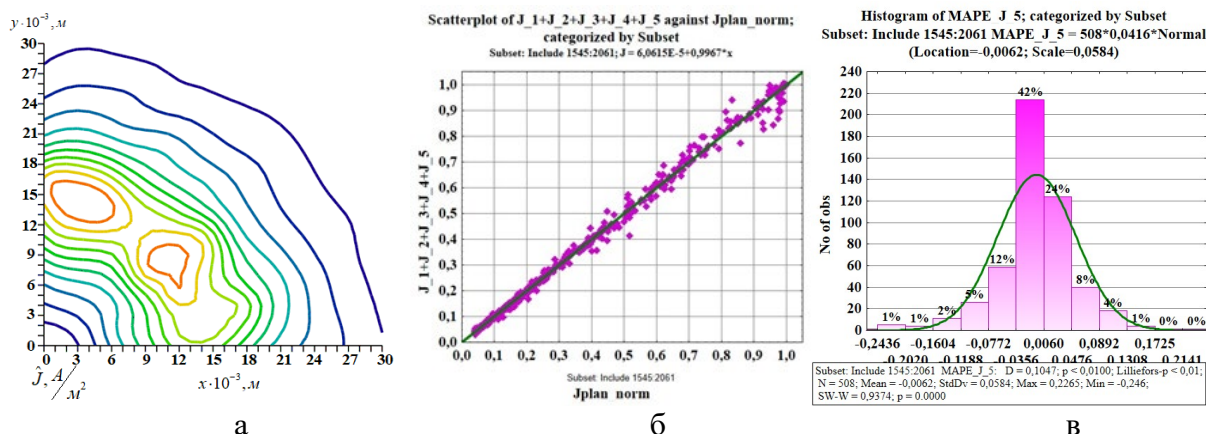


Рис. 1 Відновлення поверхні відгуку за допомогою апроксимаційної моделі на основі адитивної НМ-регресії для НВСП з планарною структурою СЗ: а) лінії рівня для зрізу поверхні  $r = 14.7 \text{ мм} \cup z_0 = 3 \text{ мм}$ ; б) діаграма розсіювання для узагальненого зрізу  $14 < r \leq 15 \text{ мм}$ ; в) гістограма розподілу відносної модельної похибки апроксимації гіперповерхні відгуку

Надалі зупинимося на складнішому прикладі апроксимаційної задачі для кругового рухомого НВСП  $\mathcal{F} = f(x, y, r_0, z_0)$ , що є характерною для об'ємної структури СЗ [15]. Внаслідок нерегулярної поведінки гіперповерхні відгуку ГВС в цьому випадку виконується декомпозиція області пошуку як по висоті розташування СЗ перетворювача, так і по радіусу її складових. В кожній області декомпозиції кількість точок КПЕ задається індивідуально. Завдяки цьому вдається досягти певного компромісу між точністю побудови апроксимаційної моделі і мінімальною кількістю точок  $N_{навч}$ . КПЕ. Для цього випадку, щоб забезпечити необхідну точність, виявилось недостатньо реалізувати запропонований вище підхід. Тому декомпозиція області пошуку здійснена як за висотою розташування перетворювача над ОК, так і за радіусами котушки. Адитивна НМ-регресія ускладнена, а саме на проміжних її рівнях застосовано комітети НМ із тих мереж, продуктивність яких не менша, ніж 95%. Використаний прийом забезпечує прийнятну похибку  $MAPE, \%$  на етапі навчання НМ, яка змінюється від 4,35% до 14,87% та від 5,41% до 24,76% – на етапі відтворення гіперповерхні відгуку.

Для перевірки якості отриманої багатопараметричної апроксимаційної моделі виконується відтворення гіперповерхні відгуку у всіх декомпозиційних областях та оцінюється її адекватність та інформативність за сукупністю статистичних показників. На рис. 2 а наведено результати відновлення поверхні відгуку для НВСП з об'ємною структурою СЗ, отримані за допомогою створеної багатовимірної апроксимаційної моделі, що виконано у всьому діапазоні варіації змінних на значно більшій кількості точок, ніж використовувалося на етапі навчання ( $N_{відтв.} > N_{навч}$ ). Чисельні значення  $MAPE, \%$ , отримані для одного із випадків узагальненого зрізу гіперповерхні відгуку  $6 \leq r \leq 7 \text{ мм}$ , що розташовані на висотах  $3 \leq z_0 \leq 4 \text{ мм}$  на етапах

навчання НМ-моделі відповідно складають 9,56 % та відтворення 11,33 %. В табл. 2 наведено значення *MAPE, %* для декомпозиційної підобласті по висоті  $3 < z \leq 4$  мм.

Діаграми розсіювання значень чотиривимірної апроксимаційної функції на етапі відтворення для декомпозиційної підобласті ( $3 \leq z_0 \leq 4$  мм)  $U$  ( $6 \leq r \leq 7$  мм) представлено на рис. 2 б, а гістограми розподілу відносної модельної похибки апроксимації гіперповерхні відгуку для цієї ж підобласті – на рис. 2 в.

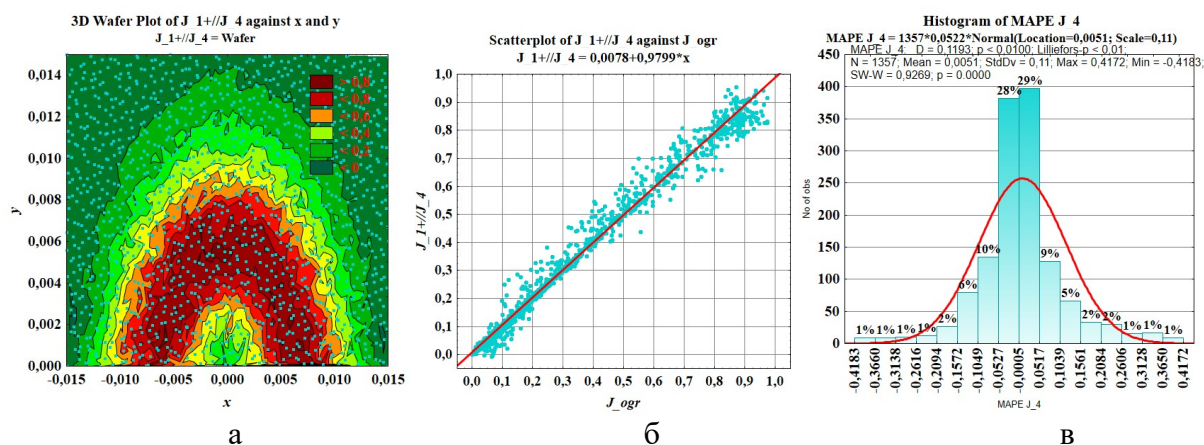


Рис. 2 Відновлення поверхні відгуку узагальненого зрізу ( $3 \leq z_0 \leq 4$  мм)  $U$  ( $6 \leq r \leq 7$  мм) за допомогою апроксимаційної моделі для кругового рухомого НВСП з об’ємною структурою СЗ: а) лінії рівня; б) діаграма розсіювання; в) гістограма розподілу відносної модельної похибки апроксимації гіперповерхні відгуку

Таблиця 2.

Оцінка якості багатопараметричної апроксимаційної моделі кругового рухомого НВСП з об’ємною структурою СЗ для декомпозиційної підобласті по висоті  $3 < z \leq 4$  мм

Позначення підобласті	Області декомпозиції, мм	$N_{навч.}/N_{відтв.}$	<i>MAPE, %</i>	
			Етап навчання	Етап відтворення
I <sub>r</sub>	$2 \leq r \leq 3$	900/1800	4.35	6.22
II <sub>r</sub>	$3 < r \leq 5$	1295/2500	6.66	10.04
III <sub>r</sub>	$5 < r \leq 8$	2089/4153	9.51	12.76
IV <sub>r</sub>	$8 < r \leq 10$	1504/2900	12.68	19.74
V <sub>r</sub>	$10 < r \leq 12$	1428/2600	9.42	14.8
VI <sub>r</sub>	$12 < r \leq 15$	2518/4050	14.67	20.57

Аналогічний підхід застосовано для побудови метамоделі рухомого рамкового НВСП з планарною структурою СЗ (квадратна форма витка). При цьому область пошуку по лінійному розміру витка  $a$  розділялася на шість підобластей. Для отримання прийняттого результату *MAPE, %* апроксимаційної моделі від 7,97 % до 14,91 % (рис. 3) використовувалося усереднення за ансамблем НМ на кожному рівні адитивної НМ-регресії для всіх шести декомпозиційних підобластей.

Створені таким чином апроксимаційні моделі застосовуються в процедурі сурогатного оптимального параметричного синтезу, що дозволяє продуктивно з мінімальними витратами часу здійснювати проектування НВСП з СЗ будь-якої складності. Також вони слугують для попередньої оцінки якості отриманого розв’язку (рис. 4) з метою відбору найкращих рішень для подальшого відтворення поверхні відгуку за «точною» математичною моделлю.

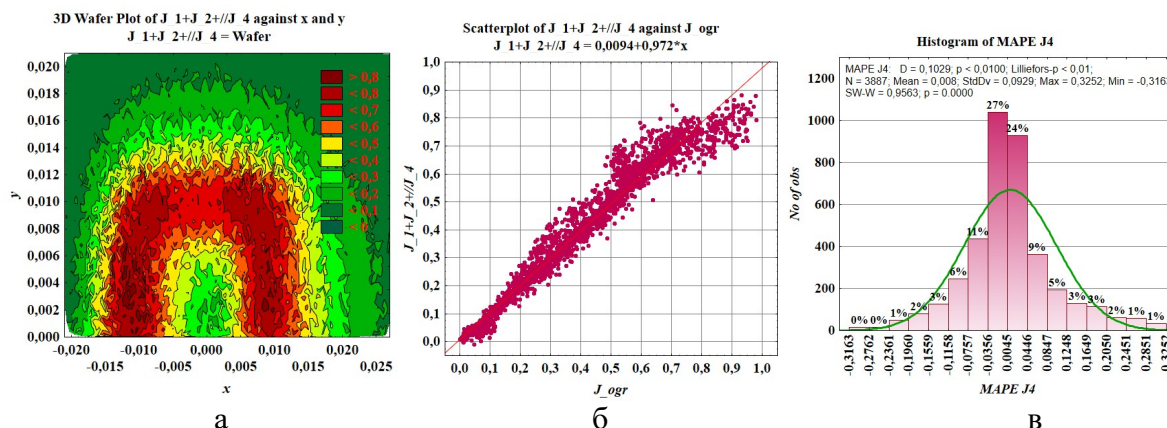


Рис. 3 Відновлення поверхні відгуку для узагальненого зрізу  $9 \leq a \leq 11$  мм за допомогою апроксимаційної моделі для рамкового рухомого НВСП з планарною структурою СЗ:  
 а) лінії рівня; б) діаграма розсіювання; в) гистограма розподілу відносної модельної похибки

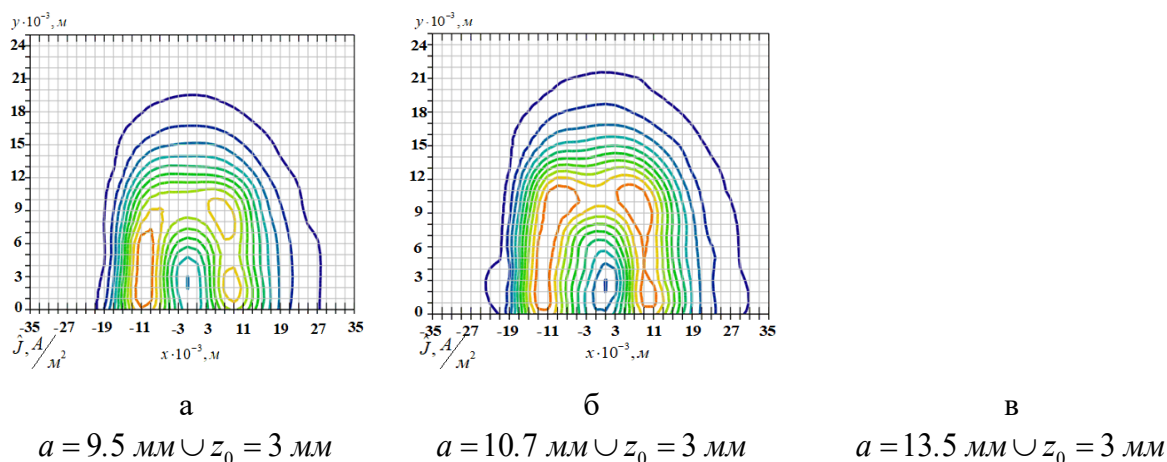


Рис. 4 Відновлення поверхні відгуку за допомогою створеної апроксимаційної моделі для рамкового рухомого НВСП з планарною структурою СЗ, що представлено лініями рівня розподілу ГВС для деяких зрізів

### Висновки

Отже, в роботі запропонована та на прикладах продемонстрована універсальна методологія побудови багатовимірних апроксимаційних (сурогатних) моделей НВСП різноманітних структур СЗ. Вона полягає в поетапному виконанні певних взаємопов'язаних задач. КПЕ для багатовимірного факторного простору пропонується реалізовувати на основі сукупності безпараметричних адитивних рекурсивних одновимірних  $R_d$ -послідовностей та комбінацій ЛП $_r$ -послідовностей Соболя, що мають найкращі показники розбіжності. Їх використання найкраще забезпечує відтворення глобальної та локальної поведінки багатовимірної поверхні відгуку. Для побудови багатовимірних апроксимаційних моделей, зважаючи на суттєву нелінійність та нерегулярну поведінку гіперповерхонь відгуку використано гібридний підхід, що передбачає одночасне застосування технологій декомпозиції області пошуку та НМ, які побудовані на техніках асоціативних машин, а також адитивної НМ-регресії. Для підвищення точності адитивної НМ-регресії використано декілька методів – це усереднення по ансамблю НМ та підсилення шляхом формування підвибірок (бегінг). Внаслідок таких дій та шляхом ускладнення структурних особливостей адитивної НМ-регресії, а саме застосуванням комітетів НМ на останньому або кожному проміжному рівні апроксимації вдалося досягти прийнятної похибки  $MAPE, \%$  багатовимірних метамоделей НВСП.

### Список використаної літератури

1. Ida N., Meyendorf N. Handbook of advanced non-destructive evaluation. Springer. 2019. 1626 p.
2. Su Z., Efremov A., Safdarnejad M., Tamburrino A., Udpa L., Udpa S. Optimization of coil design for near uniform interrogating field generation. *AIP Conference Proceedings*. 2015. Vol. 1650. P. 405–413.
3. Repelianto A. S., Kasai N. The improvement of flaw detection by the configuration of uniform eddy current probes. *Sensors*. 2019. Vol. 19, No 2. Article № 397.
4. Halchenko V. Ya., Trembovetskaya R. V., Tychkov V. V. Surface eddy current probes: excitation systems of the optimal electromagnetic field (review). *Devices and Methods of Measurements*. 2020. Vol. 11. No. 2. P. 91–104.
5. Halchenko V. Ya., Trembovetska R. V., Tychkov V. V., Storchak A. V. Nonlinear surrogate synthesis of the surface circular eddy current probes. *Przegląd elektrotechniczny*. 2019. No 9. P. 76-82.
6. Friedman J. Multivariate adaptive regression splines (with discussion). *Annals of Statistics*, 1991. No. 19. P. 1–141.
7. Fang H., Horstemeyer M. F. Global response approximation with radial basis functions. *Engineering optimization*. 2006. Vol. 38, No. 4, P 407–424.
8. Гальченко В. Я., Трембовецька Р. В., Тичков В. В., Сторчак А. В. Методи створення метамоделей: стан питання. *Вісник Вінницького політехнічного інституту*. 2020. Т. 151, № 4. С. 74 – 88.
9. Itaya T., Ishida K., Kubota Y., Tanaka A., Takehira N. Visualization of Eddy Current Distributions for Arbitrarily Shaped Coils Parallel to a Moving Conductor Slab. *Progress In Electromagnetics Research M*. 2016. Vol. 47. P. 1-12. DOI:<https://doi.org/10.2528/PIERM16011204>.
10. Santner T. J., Williams B. J., Notz W. I. The Design and Analysis of Computer Experiments. New York : Springer (Springer series in statistics); 2nd ed. 2018. 446 p.
11. Random and Quasi-Random Point Sets / P. Hellekalek, G. Larcher, J. Beck and others. Springer: (Lecture notes in statistics 138); 1st ed. 1998 edition (9 October 1998). 334 p.
12. Halchenko V. Ya., Trembovetska R. V., Tychkov V. V., Storchak A. V. The Construction of Effective Multidimensional Computer Designs of Experiments Based on a Quasi-random Additive Recursive  $R_d$ -sequence. *Applied Computer Systems*. 2020. Vol. 25, No. 1. P. 70-76
13. Roberts M. The unreasonable effectiveness of quasirandom sequences. - May 2018. - [online] <http://extremelearning.com.au/unreasonable-effectiveness-of-quasirandom-sequences/>.
14. Halchenko V. Ya., Trembovetska R. V., Tychkov V. V., Development of excitation structure RBF-metamodels of moving concentric eddy current probe. *Electrical Engineering & Electromechanics*. 2019. No. 1, P. 28-38.
15. Гальченко В. Я., Трембовецька Р. В., Тичков В. В. Синтез вихрострумівих перетворювачів з об'ємною структурою системи збудження, що реалізує однорідну чутливість в зоні контролю. *Технічна електродинаміка*. 2021. №. 3. С. 10–18.

### References

1. Ida, N. & Meyendorf, N. (2019). Handbook of advanced non-destructive evaluation. Springer.
2. Su, Z., Efremov, A., Safdarnejad, M., Tamburrino, A., Udpa, L. & Udpa, S. (2015). Optimization of coil design for near uniform interrogating field generation. *AIP Conference Proceedings*. **1650**, 405–413.

3. Repelianto, A. S. & Kasai, N. (2019). The improvement of flaw detection by the configuration of uniform eddy current probes. *Sensors*. **19**, 2. Article № 397.
4. Halchenko, V. Ya., Trembovetskaya, R. V. & Tychkov, V. V. (2020). Surface eddy current probes: excitation systems of the optimal electromagnetic field (review). *Devices and Methods of Measurements*. **11**, 2, 91–104.
5. Halchenko, V. Ya., Trembovetska, R. V., Tychkov, V. V. & Storchak, A. V. (2019). Nonlinear surrogate synthesis of the surface circular eddy current probes. *Przeegląd elektrotechniczny*. **9**, 76-82.
6. Friedman, J. (1991). Multivariate adaptive regression splines (with discussion). *Annals of Statistics*. **19**, 1–141.
7. Fang, H. & Horstemeyer, M. F. (2006). Global response approximation with radial basis functions. *Engineering optimization*. **38**, 4, 407–424.
8. Halchenko M V. Ya., Trembovetska M R. V., Tychkov M V. V. & Storchak A. V. (2020). Methods for Creating Metamodels: State of the Question. *Visnyk of Vinnytsia Polytechnical Institute*. **151**, 4, 74 – 88.
9. Itaya, T., Ishida, K., Kubota, Y., Tanaka, A. & Takehira, N. (2016). Visualization of Eddy Current Distributions for Arbitrarily Shaped Coils Parallel to a Moving Conductor Slab. *Progress In Electromagnetics Research M*. **47**, 1-12.
10. Santner, T. J., Williams, B. J. & Notz, W. I. (2018). The Design and Analysis of Computer Experiments. New York : Springer (Springer series in statistics); 2nd ed. 446.
11. Hellekalek, P., Larcher, G., Beck, J. and others (1998). Random and Quasi-Random Point Sets. Springer: (Lecture notes in statistics 138); 1st ed.
12. Halchenko, V. Ya., Trembovetska, R. V., Tychkov, V. V. & Storchak, A. V. (2020). The Construction of Effective Multidimensional Computer Designs of Experiments Based on a Quasi-random Additive Recursive Rd–sequence. *Applied Computer Systems*. **25**, 1, 70-76.
13. Roberts, M. (2018). The unreasonable effectiveness of quasirandom sequences. [online] <http://extremelearning.com.au/unreasonable-effectiveness-of-quasirandom-sequences/>.
14. Halchenko, V. Ya., Trembovetska, R. V. & Tychkov, V. V. (2019). Development of excitation structure RBF-metamodels of moving concentric eddy current probe. *Electrical Engineering & Electromechanics*. **1**. 28-38.
15. Halchenko, V. Ya., Trembovetska, R. V. & Tychkov, V. V. (2021). Synthesis of eddy current probes with volumetric structure of the excitation system, implementing homogeneous sensitivity in the testing zone. *Tekhnichna Elektrodynamika*. **3**, 10–18.

Гальченко Володимир Якович - д.т.н., професор, професор кафедри приладобудування, мехатроніки та комп'ютеризованих технологій Черкаського державного технологічного університету. E-mail: halchvl@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0304-372X.

Трембовецька Руслана Володимирівна - к.т.н., доцент, доцент кафедри приладобудування, мехатроніки та комп'ютеризованих технологій Черкаського державного технологічного університету, E-mail: r.trembovetska@chdtu.edu.ua, ORCID: 0000-0002-2308-6690.

Тичков Володимир Володимирович - к.т.н., доцент кафедри приладобудування, мехатроніки та комп'ютеризованих технологій Черкаського державного технологічного університету, E-mail: v.tychkov@chdtu.edu.ua, ORCID: 0000-0001-9997-307X.

УДК 004.85

В. В. ГНАТУШЕНКО, Н. Л. ДОРОШ, Т. М. ФЕНЕНКО  
Національна металургійна академія України

## РОЗПІЗНАВАННЯ ЗОБРАЖЕНЬ НАБОРУ FASHION MNIST МЕТОДАМИ ГЛИБОКОГО НАВЧАННЯ

*Огляд сучасних методів розпізнавання об'єктів-зображень показав, що алгоритми глибокого навчання успішно використовуються і дозволяють отримати високу якість. Прикладом можливо привести якість розпізнавання символів набору MNIST, яка наблизилась до 100%. Для другого набору даних, який теж популярний при тестуванні алгоритмів глибокого навчання, а саме, набору елементів одягу та аксесуарів Fashion MNIST, така висока якість розпізнавання ще не отримана.*

*У роботі представлені результати розпізнавання даних Fashion MNIST.*

*Розглянуті моделі нейронної мережі прямого поширення і згорткової мережі.*

*Виконано програмну реалізацію алгоритмів глибокого навчання, а саме, розглянуто багатосарову мережу прямого поширення (FNN) та згорткову нейронну мережу (CNN). Використано мову Python, бібліотеки TensorFlow та Keras. Бібліотека Keras дозволяє спрощувати виклики функцій з TensorFlow. Типовий процес роботи в Python Keras полягає в наступному: завантаження необхідних модулів, завантаження даних, попередня обробка, розбивка їх на навчальну, тестову і валідаційну частини; створення моделі із зазначенням архітектури, та інші. Розроблено модуль для перегляду зображень набору даних, параметрів мережі та інформації з якості розпізнавання.*

*Виконано чисельний експеримент розпізнавання елементів одягу засобами FNN. Проведено автоматичне налаштування гіперпараметрів мережі. Якість розпізнавання на тестових даних дорівнює 0,89. Налаштування гіперпараметрів покращило якість несуттєво. Невисока якість розпізнавання пояснюється також використанням дуже простої моделі нейронної мережі. Поліпшення результатів було досягнуто з використанням згорткової нейронної мережі. Крайній результат розпізнавання, який отримано у роботі, дорівнює 91.26%, але відомий найкращий результат якості розпізнавання дорівнює 94%.*

*Роботу з вдосконалення результатів розпізнавання зображень даних Fashion MNIST доцільно продовжити, а програмний засіб, який розроблено, можливо використовувати щодо розпізнавання інших даних.*

*При творчому підході розпізнавання об'єктів зображень на Python з застосуванням бібліотек Keras Tensorflow і інших є дуже перспективним напрямком для практичного застосування.*

*Ключові слова: розпізнавання зображень, Fashion MNIST, нейронна мережа, FNN, CNN, PYTHON, KERAS, TENSORFLOW, якість розпізнавання, гіперпараметри.*

В. В. ГНАТУШЕНКО, Н. Л. ДОРОШ, Т. М. ФЕНЕНКО  
Национальная металлургическая академия Украины

## РАСПОЗНАВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ НАБОРА FASHION MNIST МЕТОДАМИ ГЛУБОКОГО ОБУЧЕНИЯ

*Обзор современных методов распознавания объектов изображений показал, что алгоритмы глубокого обучения успешно используются и позволяют получить высокое качество. Примером можно привести качество распознавания символов набора MNIST, которое приблизилось к 100%. Для другого набора данных, который тоже популярен в реализации алгоритмов глубокого обучения, а именно, набора элементов одежды и аксессуаров Fashion MNIST, такое высокое качество распознавания еще не достигнуто.*

*В работе представлены результаты распознавания данных Fashion MNIST.*

*Рассмотрены модели нейронной сети прямого распространения и сверточной сети.*

*Проведена программная реализация алгоритмов глубокого обучения, а именно, рассмотрены многослойная сеть прямого распространения (FNN) и сверточная нейронная сеть (CNN). Использованы язык Python, библиотеки TensorFlow и Keras. Библиотека Keras позволяет упрощать вызовы функций по TensorFlow. Типичный процесс работы в Python Keras заключается в следующем: загрузка необходимых модулей, загрузка данных, предварительная обработка, разбивка их на учебную, тестовую и валидационную части; создание модели с указанием архитектуры, и другое. Разработан модуль для просмотра изображений набора данных, параметров сети и информации по качеству распознавания.*

*Проведен численний експеримент розпізнавання елементів одягу методами FNN. Виконана автоматична настройка гіперпараметрів мережі. Якість розпізнавання на тестових даних дорівнює 0,89. Налаштування гіперпараметрів покращило якість несуттєво. Низька якість розпізнавання пояснюється також використанням дуже простої моделі нейронної мережі. Підвищення результатів було досягнуто за допомогою використання сверточної нейронної мережі. Найкращі результати розпізнавання, отримані в роботі, становлять 91,26%, тоді як відомий найкращий результат якості розпізнавання становить 94%.*

*Роботу з вдосконалення результатів розпізнавання зображень даних Fashion MNIST цілесообразно продовжити, а програмне середовище, розроблене, можливо використати для розпізнавання інших даних.*

*При творчому підході до розпізнавання об'єктів зображень на Python з використанням бібліотек Keras Tensorflow і інших, є дуже перспективним напрямком для практичного застосування.*

*Ключові слова: розпізнавання зображень, Fashion MNIST, нейронна мережа, FNN, CNN, PYTHON, KERAS, TENSORFLOW, якість розпізнавання, гіперпараметри.*

V.V. GNATUSHENKO, N.L. DOROSH, T. M. FENENKO  
National Metallurgical Academy of Ukraine

## **FASHION MNIST IMAGE RECOGNITION BY DEEP LEARNING METHODS**

*A review of modern methods for recognizing image objects has shown that deep learning algorithms are successfully used and provide high quality. An example is the quality of character recognition of the MNIST set, which is close to 100%. For another dataset, which is also popular in the implementation of deep learning algorithms, namely, the Fashion MNIST set of clothing items and accessories, such a high recognition quality has not yet been achieved.*

*The paper presents the results of data recognition Fashion MNIST.*

*Models of a feedforward neural network and convolutional network are considered.*

*The software implementation of deep learning algorithms is carried out, namely, a multilayer feedforward network (FNN) and a convolutional neural network (CNN) are considered. The Python language, the TensorFlow and Keras libraries are used. The Keras library allows you to simplify TensorFlow function calls. A typical workflow in Python Keras is as follows: loading the necessary modules, loading data, preprocessing, breaking them into training, test and validation parts; creating a model with an indication of the architecture, and more.*

*A numerical experiment was carried out to recognize clothing items by means of FNN. Automatic tuning of network hyperparameters has been performed. The recognition quality on test data is 0.89. The hyperparameter tuning did not significantly improve the quality. The low quality of recognition is also explained by the use of a very simple neural network model. Improved results have been achieved using convolutional neural networks. The best recognition results obtained in the work is 91.26%, but the known best recognition quality result is 94%.*

*It is advisable to continue the work on improving the results of recognition of images of Fashion MNIST data, and the software that has been developed can be used to recognize other data.*

*With a creative approach to image object recognition in Python using the Keras Tensorflow libraries and others, it is a very promising direction for practical application.*

*Keywords: image recognition, Fashion MNIST, neural network, FNN, CNN, PYTHON, KERAS, TENSORFLOW, recognition quality, hyperparameters.*

### **Постановка проблеми**

Розпізнавання об'єктів за технологією глибокого навчання є популярним і успішним методом вирішення задач інтелектуального аналізу даних. Вивчення та дослідження алгоритмів глибокого навчання доцільно проводити на широко відомих масивах даних, які набули вже статус класичних. Одним з них є набір даних MNIST [1], який існує з 1999 року і включає 70000 зображень рукописних цифр. Найкращий результат розпізнавання 99,7% отриманий з використанням згорткової мережі, класичні ж алгоритми машинного навчання дозволяють розпізнавати до 97% символів MNIST [2]. Завдяки таким добрим результатам, цей набір все ще не втрачає своєї актуальності і використовується в задачах машинного навчання для тестування алгоритмів та методів

розпізнавання [1,3]. Однак, є й така пропозиція: «MNIST is too easy» [2], то бажано використовувати інший набір даних - Fashion MNIST [4].

У роботі представлені результати розпізнавання зображень елементів одягу набору даних Fashion MNIST [4] з використанням алгоритмів глибокого навчання [5].

### **Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Застосування глибокого навчання прискорило прогрес при вирішенні багатьох завдань машинного навчання, в тому числі і в розпізнаванні зображень. У 2009-2010 роках за допомогою згорткових мереж покращилися результати розпізнавання символів.

Більшість завдань машинного навчання зводиться до вирішення задачі оптимізації [6]. У задачі класифікації, яка вирішується у роботі, цільова функція відповідає вибору з кількох класів, тобто має дискретні значення. Кожному класу повинна відповідати область в просторі параметрів. Функція помилки визначається в залежності від числа вірних відповідей. Така метрика (точність класифікації), є кусочно-постійною, а не безперервною функцією, тому оптимізація такої функції не є тривіальною задачею.

Глибоке навчання - підмножина методів машинного навчання, в яких застосовуються штучні нейронні мережі. Слово «глибокий» має на увазі наявність великого числа шарів в штучній нейронній мережі, але його інтерпретація з часом змінювалася. Якщо ще декілька років тому вважалося, що 10 шарів досить, щоб називати мережу глибокою, то тепер глибокою зазвичай називається мережа, яка містить сотні шарів [5, 6].

В даний час застосування глибокого навчання не тільки перспективно, але і практично можливо. З'явилися дуже зручні бібліотеки, які дозволяють швидко побудувати модель нейронної мережі, сформувані для неї граф обчислень, автоматично підрахувати градієнти і виконати процес навчання. З кожним роком ці бібліотеки стають все зручнішими, виходять нові версії існуючих бібліотек, з'являються абсолютно нові програмні продукти в цій області науки. Слід зазначити, що існують і бібліотеки загального призначення, які можуть створити будь-який граф обчислень, і спеціалізовані надбудови, які реалізують різні компоненти нейронних мереж: звичайні шари, згорткові, рекурентні, сучасні алгоритми оптимізації. Такими бібліотеками є TensorFlow і Keras [6-9].

### **Мета дослідження**

Метою роботи є розпізнавання об'єктів набору даних Fashion MNIST методами глибокого навчання з можливістю налаштування гіперпараметрів з використанням програмного засобу, який розроблено.

### **Викладення основного матеріалу дослідження**

Набір даних Fashion MNIST містить 70000 зображень одягу і аксесуарів [4]. З цих 70000 взято 60000 зображень для навчання нейронної мережі, а інші 10000 елементів – для перевірки якості розпізнавання. Набір складається з зображень розміром 28x28 пікселів, кожен піксель представляє собою відтінок сірого. Значення пікселів - це шкала сірого в діапазоні від 0 до 255. У більшості випадків рекомендується виконувати масштабування вхідних значень, наприклад нормалізувати значення пікселів в діапазоні [0,1]. Номери класів - це масив цілих чисел від 0 до 9, вони відповідають класам об'єктів, які зображені на картинках. Кожному зображенню відповідає єдиний клас: 0 T-shirt/top (футболка/топ), 1 Trouser (шорти), 2 Pullover (пуловер), 3 Dress (сукня), 4 Coat (пальто), 5 Sandal (сандали), 6 Shirt (сорочка), 7 Sneaker (кросівки), 8 Bag (сумка), 9 Ankle boot (ботильони).



Для реалізації розпізнавання одягу розроблено модулі програмного засобу з використанням мови Python [10], бібліотек TensorFlow та Keras [6]. Бібліотека Keras дозволяє спрощувати виклики функцій з TensorFlow. Типовий процес роботи в Python Keras полягає в наступному: 1) завантаження необхідних модулів; 2) завантаження даних, попередня обробка, розбивка їх на навчальну, тестову і валідаційну частини; 3) створення моделі (model) із зазначенням архітектури, виду шарів, функції активації, схеми ініціалізації і регуляризації ваг, зміщення та ін.. Розроблено модуль для перегляду зображень набору даних, параметрів мережі та інформації з якості розпізнавання.

В роботі було розглянуто багатшарову мережу прямого поширення (FNN) з використанням методів автоматичного налаштування гіперпараметрів та архітектуру згорткової нейронної мережі (CNN).

Досліджуємо просту послідовну модель, щоб використовувати її як основу для порівняння з більш складними моделями нейронних мереж. Архітектура мережі містить вхідний шар  $28 \times 28 = 784$ , один прихований шар і вихідний шар. Використано алгоритм оптимізації "adam", функцію втрат "sparse\_categorical\_crossentropy", метрику ['accuracy']. Кількість епох дорівнює 30. В результаті обчислень: точність на навчальних даних дорівнює 0,95, точність на тестових даних дорівнює 0,89.

На рисунку 1 наведено приклад перегляду даних та результатів розпізнавання відповідно простої моделі мережі. Вісь ординат відповідає ймовірності розпізнавання для даного класу. Червоний колір означає, що кількість зображень, які неправильно розпізнані, більше, ніж правильно розпізнаних для даного класу; синій – навпаки.

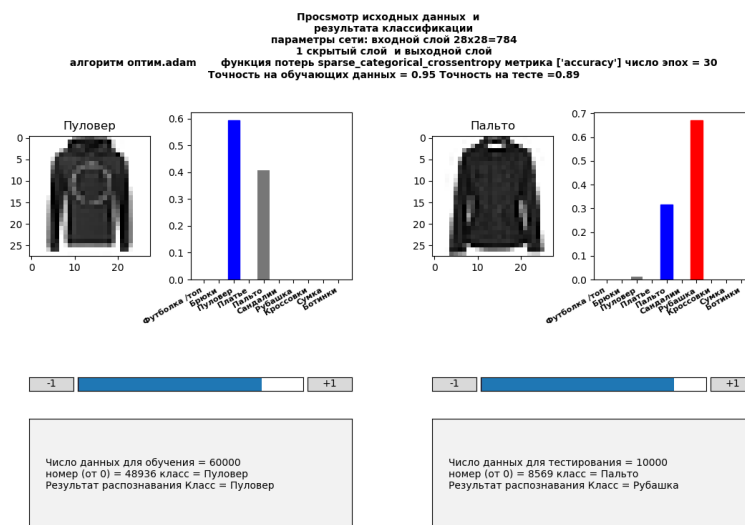


Рис. 1. Приклад перегляду даних та результатів розпізнавання

Проведено дослідження цієї простої моделі при зміні параметрів. У роботі для налаштування гіперпараметрів використано інструмент Keras Tuner. Для цього створено модель мережі з параметрами налаштування для Keras Tuner і його виклик.

Для прихованого шару з ім'ям 'Hidden\_layer' проведено налаштування таких гіперпараметрів: число нейронів в шарі, функції активації (число нейронів в шарі від 50 до 1000 з кроком зміни 50; функції активації з наступного переліку: 'relu', 'tanh', 'sigmoid'). Використовували алгоритми оптимізації ['adam', 'SGD'].

З точки зору найкращої точності визначено 3 варіанти. У всіх трьох наданих варіантах розрахунків метрика якості Score дорівнює приблизно 0,9. Варіанти містять

кількість нейронів в шарі 900, 700, 500; функцію активації 'relu', 'tanh', 'tanh' відповідно варіантам 1, 2,3; алгоритм оптимізації -'adam'.

Результати машинного навчання з використанням нейронної мережі з прямим розповсюдженням сигналу, архітектура якої є найпростішою (FNN-модель за типом «Sequential», з вхідним шаром типу «Flatten», одним прихованим шаром «Dense» і вихідним шаром «Dense») та налаштуванням гіперпараметрів зведені у таблицю 1.

Таблиця 1

Результати розпізнавання для FNN-моделі

	Модель	Параметри шару 'Hidden_layer'		Оптимізатор ['adam', 'SGD']	Точність на валідаційних даних	Точність на тестових даних	Загальне число нейронів	Функція втрат на тестових даних
		Число нейронів	Функція активації ['relu', 'tanh', 'sigmoid']					
1	Початкова модель	784	'relu'	'adam'	0.8976	0.8912	623290	0.3791
2	Модель_1 TUNER RandomSearch	900	'relu'	'adam'	0.9002	0.8935	715510	0.3417
3	Модель_2 TUNER RandomSearch	700	'tanh'	'adam'	0.8988	0.8925	556510	0.3294
4	Модель_3 TUNER RandomSearch	500	'tanh'	'adam'	0.8981	0.8884	397510	0.3209
5	Модель_1 TUNER Hyperband	800	'relu'	'adam'	0.8898	0.8771	636010	0.3341
6	Модель_2 TUNER Hyperband	550	'relu'	'adam'	0.8893	0.8830	437260	0.3329
7	Модель_3 TUNER Hyperband	350	'relu'	'adam'	0.8888	0.8795	278260	0.3404

Налаштування гіперпараметрів також не привело до суттєвого покращення результатів.

Розглянемо згорткову модель нейронної мережі з архітектурою:

- перший прихований шар - це шар згортки, Convolution2D, що має 32 карти функцій, розмір яких дорівнює  $3 \times 3$ , і функції активації relu;
- потім визначено шар пулінг, maxPooling2D, з розміром пулу  $2 \times 2$ , який дає максимальні значення;
- наступний рівень - це рівень регуляризації Dropout, він налаштований на випадкове виключення 20% нейронів в шарі, щоб зменшити перенавчання;
- далі - шар, який перетворює дані двовимірної матриці в вектор Flatten, він дозволяє обробляти вихідні дані стандартними повнозв'язними шарами;
- потім - повнозв'язний шар з 64 нейронами і функцією активації relu;
- вихідний шар має 10 нейронів для 10 класів і функцію активації softmax для виведення ймовірнісних результатів розпізнавання для кожного класу.

На рисунку 2 представлені параметри моделі згорткової мережі та її граф.

Результати розпізнавання дали точність на тестових даних 90,78%

Невірні результати розпізнавання наочно показані у матриці неточності моделі, яка наведена на рисунку 3.

Найбільше невірних результатів отримано при розпізнаванні таких об'єктів, як «Пальто» і «Рубашка».

З метою поліпшення результатів розпізнавання були проведені розрахунки згортковою нейромережею з фільтрами (5x5) і (7x7).

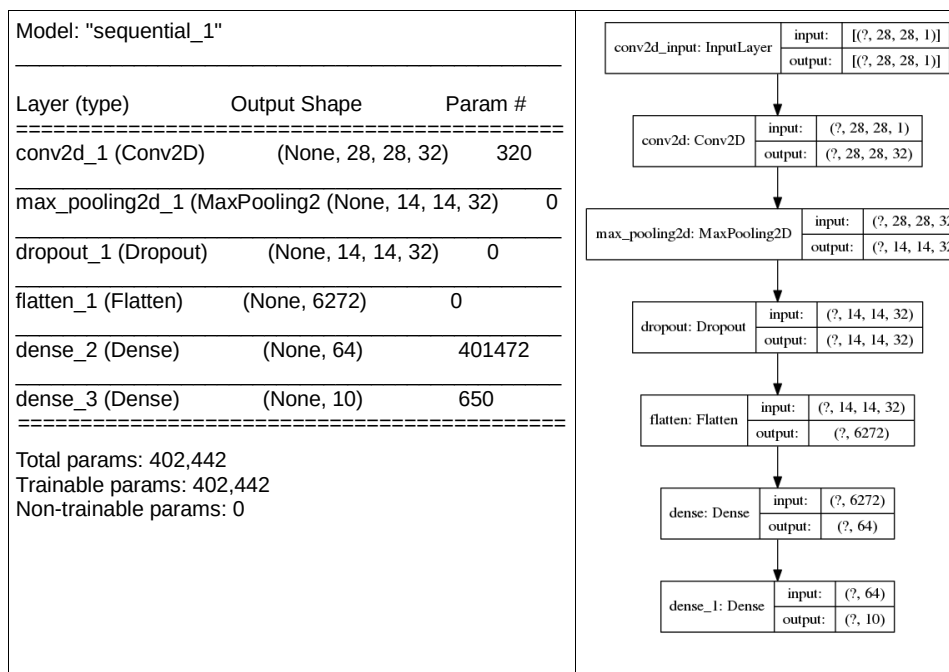


Рис. 2. Параметри моделі і граф CNN



Рис. 3. Матрица неточності моделі CNN

У таблиці 2 показані результати розпізнавання з використанням згорткової нейронної мережі. Крайні результати відповідають моделі з розміром фільтру (7x7), точність розпізнавання дорівнює 91.26%.

Таблиця 2

Результати розпізнавання для CNN-моделі з різними фільтрами

Розмір ядра фільтра	Точність розпізнавання на тестових даних	Значення функції втрат при розпізнаванні тестових даних
3 x 3	90.78%	0.2796
5 x 5	90.89%	0.2799
7 x 7	91.26%	0.2630

Застосування методів автоматичного налаштування гіперпараметрів для такої згорткової мережі є трудомісткою справою, доцільніше буде використовувати другу архітектуру мережі, наприклад [3], де отримана точність трохи більша і дорівнює 93,56%.

Архітектура мережі для конкретного завдання шукається в ході експериментів, напрям яких визначається помилкою на конкретному наборі даних.

### Висновки

Проведено розпізнавання зображень Fashion MNIST з використанням програмного засобу, розробленого мовою Python з функціями бібліотек Keras і Tensorflow. Розглянуті моделі нейронної мережі прямого поширення і згорткової мережі.

Розпізнавання зображень Fashion MNIST за моделлю FNN показало якість розпізнавання на навчальних даних 0,95, на тестових - 0,89. Проведено дослідження моделі FNN, яку отримано в результаті налаштування гіперпараметрів, але якість розпізнавання поліпшилась несуттєво. У даній роботі найкращий результат отримано для згорткової мережі, точність розпізнавання дорівнює 91.26%.

Роботу з вдосконалення результатів розпізнавання зображень даних Fashion MNIST доцільно продовжити, а розроблений програмний засіб можливо використовувати щодо розпізнавання інших наборів даних.

При творчому підході розпізнавання об'єктів зображень на Python з застосуванням бібліотек Keras Tensorflow і інших є дуже перспективним напрямком для практичного застосування.

### Список використаної літератури

1. Digit Recognizer [Електронний ресурс] – Режим доступу. — URL: <https://www.kaggle.com/c/digit-recognizer> (дата звернення 20.05.2021).
2. To Serious Machine Learning Researchers [Електронний ресурс] – Режим доступу. — URL: <https://github.com/zalandoresearch/fashion-mnist> (дата звернення 23.04.2021).  
[https://www.researchgate.net/publication/343173734\\_CNN\\_Model\\_for\\_Image\\_Classification\\_on\\_MNIST\\_and\\_Fashion-MNIST\\_Dataset](https://www.researchgate.net/publication/343173734_CNN_Model_for_Image_Classification_on_MNIST_and_Fashion-MNIST_Dataset)
3. Shivam S. Kadam, Amol C. Adamuthe, Ashwini B. Patil. CNN Model for Image Classification on MNIST and Fashion-MNIST Dataset. *Journal of Scientific Research* 64(02):374-384. DOI:10.37398/JSR.2020.640251– Режим доступу. — URL: <https://www.researchgate.net/publication/343173734>
4. Digit Recognizer [Електронний ресурс] – Режим доступу. — URL: <https://www.kaggle.com/zalando-research/fashionmnist>: (дата звернення 20.05.2021).
5. Гудфеллоу Я., Бенджио И., Курвилль А. Глубокое обучение/пер. с англ. Слинкина А.А. 2-е изд., испр. М.: ДМК Пресс, 2018. 652 с.
6. Николенко С., Кадурич А., Архангельская Е. Глубокое обучение. СПб.: Питер, 2018. 480 с.
7. Антонио Джулли, Суджит Пал. Библиотека Keras – инструмент глубокого обучения. Реализация нейронных сетей с помощью библиотек Theano и TensorFlow/Пер. с англ.Слинкин А. А. М.: ДМК Пресс, 2018. 294с.
8. Жерон, Орельен. Прикладное машинное обучение с помощью Scikit-Learn и TensorFlow: концепции, инструменты и техники для создания интеллектуальных систем./Пер. с англ. СПб.: ООО "Альфа-книга, 2018. 688 с.
9. Плас Дж. Вандер. Python для сложных задач: наука о данных и машинное обучение. СПб.: Питер, 2018. 576 с.

10. Лутц М. Программирование на Python, том I, 4-е издание. Пер. с англ. СПб.: Символ-Плюс, 2011. 992 с.

#### References

1. Digit Recognizer [Elektronnyi resurs] – Rezhym dostupu. — URL: <https://www.kaggle.com/c/digit-recognizer>
2. To Serious Machine Learning Researchers [Elektronnyi resurs] – Rezhym dostupu. — URL: <https://github.com/zalandoresearch/fashion-mnist>.  
[https://www.researchgate.net/publication/343173734\\_CNN\\_Model\\_for\\_Image\\_Classification\\_on\\_MNIST\\_and\\_Fashion-MNIST\\_Dataset](https://www.researchgate.net/publication/343173734_CNN_Model_for_Image_Classification_on_MNIST_and_Fashion-MNIST_Dataset)
3. Shivam, S. Kadam, Amol, C. Adamuthe & Ashwini, B. Patil. CNN Model for Image Classification on MNIST and Fashion-MNIST Dataset. *Journal of Scientific Research* 64(02):374-384. DOI:[10.37398/JSR.2020.640251](https://doi.org/10.37398/JSR.2020.640251)– Rezhym dostupu. — URL: <https://www.researchgate.net/publication/343173734>
4. Digit Recognizer [Elektronnyi resurs] – Rezhym dostupu. — URL: <https://www.kaggle.com/zalando-research/fashionmnist>
5. Gudfellou, Ya., Bendzhio, I. & Kurvill, A. (2018). Glubokoe obuchenie/per. s ang. Slinkina A. A. 2-e izd., ispr. M.: DMK Press.
6. Nikolenko, S., Kadurin, A. & Arhangelskaya, E. (2018). Glubokoe obuchenie. SPb.: Piter.
7. Antonio, Dzhulli & Sudzhit, Pal. (2018). Biblioteka Keras – instrument glubokogo obucheniya. Realizatsiya neyronnykh setey s pomoschyu bibliotek Theano i TensorFlow/Per. s angl.Slinkin A. A. M.: DMK Press.
8. Zheron, Orelen. (2018). Prikladnoe mashinnoe obuchenie s pomoschyu Scikit-Learn i TensorFlow: kontseptsii, instrumentyi i tehniki dlya sozdaniya intellektualnykh sistem./Per. s angl. SPb.: OOO "Alfa-kniga.
9. Plas, Dzh. Vander. (2018). Python dlya slozhnykh zadach: nauka o dannykh i mashinnoe obuchenie. SPb.: Piter.
10. Lutts, M. (2011). Programirovaniye na Python, tom I, 4-e izdaniye. / Per. s angl. SPb.: Simvol-Plyus.

Гнатушенко Вікторія Володимирівна – д.т.н., професор кафедри інформаційних технологій та систем Національної металургійної академії України. E-mail: [vvitagnat@gmail.com](mailto:vvitagnat@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0001-5304-4144>.

Дорош Наталія Леонідівна – к.т.н. доцент кафедри інформаційних технологій та систем Національної металургійної академії України, e-mail: [natalidorosh53@gmail.com](mailto:natalidorosh53@gmail.com) <https://orcid.org/0000-0003-4184-3648>

Фененко Тетяна Михайлівна – старший викладач кафедри інформаційних технологій та систем Національної металургійної академії України, e-mail: [fenenkot@gmail.com](mailto:fenenkot@gmail.com) <https://orcid.org/0000-0002-7631-3148>.

УДК 681.516.77: 621.313.12-883

В.В. ДАНИК, О.К. КОЛЕБАНОВ  
Херсонська державна морська академія  
Ю.О. ЛЕБЕДЕНКО  
Херсонський національний технічний університет

## ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ СУДНОВИМИ КОМБІНОВАНИМИ ПРОПУЛЬСИВНИМИ КОМПЛЕКСАМИ

*Стаття присвячена розв'язанню задачі оптимального керування судновими комбінованими пропульсивними комплексами з диференційними привод-генераторними агрегатами з метою підвищення їх ефективності.*

*У роботі виконано аналіз структури суднового пропульсивного комплексу як гідромеханічної системи, що включає корпус судна і пропульсивну установку, в якій енергія робочого тіла перетворюється в упор, що приводить в рух корпус судна, обґрунтовано перспективність впровадження комбінованих пропульсивних комплексів, в яких застосовуються кілька різнотипних двигунів, що працюють на один або кілька рушіїв.*

*Розглянуто математичну модель процесу керування судновим комбінованим пропульсивним комплексом, що дозволяє проводити аналіз роботи валогенераторної установки з диференційним привод-генераторним агрегатом, як при ходовому, так і при аварійному режимі функціонування.*

*Формалізовано завдання керування судновими комбінованими пропульсивними комплексами на основі критерія узагальненої оцінки якості їх функціонування, що враховує відхилення ходового навантаження пропульсивного комплексу при обмеженнях щодо відхилення потужності бортової мережі від бажаної та сформульовано задачу оптимального керування судновими комбінованими пропульсивними комплексами за мінімумом відхилень механічної потужності при обмеженнях щодо забезпечення живлення споживачів.*

*Запропоновано новий метод оптимального керування частотним перетворювачем генератора опори, що забезпечує мінімізацію визначеного критерію із дотриманням відповідних обмежень. Алгоритм оптимального керування комбінованого пропульсивного комплексу включає: етапи аналізу значень заданої та діючої механічної потужності на гвинті судна; визначення електричної потужності, що виробляється допоміжною енергетичною установкою судна та споживаної у відповідному режимі; обчислення керування перетворювачем частоти, що забезпечує за рахунок підтримання відповідної потужності генератора опори мінімум відхилення потужності на гвинті при забезпеченні необхідного енергетичного балансу електромережі судна.*

*Враховуючи випадковий характер навантажень, як з боку електричної енергосистеми, так і безпосередньо рухової установки, що ускладнює реалізацію представленого алгоритму оптимального управління в реальному часі, обґрунтовано доцільність застосування нечітких алгоритмів для підвищення ефективності процесів керування.*

*Отримані результати можуть бути використані при побудові вискоефективних систем керування судновими комбінованими пропульсивними комплексами для покращення якісних показників електричної енергії в судновій енергетичній системі та забезпечення працездатності суднової енергосистеми при аварійних ситуаціях.*

*Ключові слова: математична модель, судновий пропульсивний комплекс, диференціальний привод, валогенератор, оптимальне керування, регулятор.*

В.В. ДАНЫК, А.К. КОЛЕБАНОВ  
Херсонская государственная морская академия  
Ю.А. ЛЕБЕДЕНКО  
Херсонский национальный технический университет

## ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СУДОВЫМИ КОМБИНИРОВАННЫМИ ПРОПУЛЬСИВНЫМИ КОМПЛЕКСАМИ

*Статья посвящена решению задачи оптимального управления судовыми комбинированными пропульсивными комплексами с дифференциальными привод-генераторными агрегатами с целью повышения их эффективности.*

*В работе выполнен анализ структуры судового пропульсивного комплекса как гидромеханической системы, включающей корпус судна и пропульсивную установку, в которой энергия*

*рабочего тела превращается в упор, приводит в движение корпус судна, обосновано перспективность внедрения комбинированных пропульсивных комплексов, в которых применяются несколько разнотипных двигателей, работающих на один или несколько двигателей.*

*Рассмотрена математическая модель процесса управления судовым комбинированным пропульсивным комплексом, позволяющим проводить анализ работы валогенераторной установки с дифференциальным привод-генераторным агрегатом, как при ходовом, так и при аварийном режиме функционирования.*

*Формализована задача управления судовыми комбинированными пропульсивными комплексами на основе критерия обобщенной оценки качества их функционирования, учитывающего отклонения ходовой нагрузки пропульсивного комплекса при ограничениях по отклонению мощности бортовой сети от желаемой, сформулирована задача оптимального управления судовыми комбинированными пропульсивными комплексами по минимуму отклонений механической мощности при ограничениях по обеспечению питания потребителей.*

*Предложен новый метод оптимального управления частотным преобразователем генератора опоры, который обеспечивает минимизацию определенного критерия с соблюдением соответствующих ограничений. Алгоритм оптимального управления комбинированным пропульсивным комплексом включает: этапы анализа значений заданной и действующей механической мощности на винте судна; определение электрической мощности вспомогательной энергетической установкой судна и потребляемой в соответствующем режиме; вычисления управления преобразователем частоты, обеспечивает за счет поддержания соответствующей мощности генератора опоры минимум отклонения мощности на винте при обеспечении необходимого энергетического баланса электросети судна.*

*Учитывая случайный характер нагрузок, как со стороны электрической энергосистемы, так и непосредственно двигательной установки, что затрудняет реализацию представленного алгоритма оптимального управления в реальном времени, обоснована целесообразность применения нечетких алгоритмов для повышения эффективности процессов управления.*

*Полученные результаты могут быть использованы при построении высокоэффективных систем управления судовыми комбинированными пропульсивными комплексами, для улучшения качественных показателей электрической энергии в судовой энергетической системе и обеспечения работоспособности судовой энергосистемы при аварийных ситуациях.*

*Ключевые слова: математическая модель, судовой пропульсивный комплекс, дифференциальный привод, валогенератор, оптимальное управление, регулятор.*

V.V. DANYK, O.K. KOLEBANOV  
Kherson State Maritime Academy  
Yu.O. LEBEDENKO  
Kherson National Technical University

## **OPTIMAL CONTROL OF VESSEL COMBINED PROPULSIVE COMPLEXES**

*The article is devoted to solving the problem of optimal control of ship combined propulsion systems with differential drive-generator units in order to increase their efficiency.*

*The analysis of the structure of the ship propulsive complex as a hydromechanical system, including the ship's hull and propulsive installation, in which the energy of the working body is converted into an emphasis that drives the ship's hull, the substantiation of the prospects operating on one or more engines.*

*The mathematical model of the control process of the ship combined propulsive complex is considered, which allows to analyze the operation of the shaft generator set with the differential drive-generator unit both in running and in emergency mode.*

*The problem of control of ship combined propulsive complexes is formalized on the basis of the criterion of the generalized estimation of quality of their functioning that considers deviation of running load of a propulsive complex at restrictions concerning deviation of consumer's power supply.*

*A new method of optimal control of the frequency converter of the support generator is proposed, which ensures the minimization of a certain criterion with observance of the corresponding restrictions.*

*The algorithm of optimal control of the combined propulsive complex includes: stages of the analysis of values of the set and operating mechanical power on the vessel propeller; determination of electric power produced by the auxiliary power plant of the vessel and consumed in the appropriate mode; calculation of control of the frequency converter, which provides by maintaining the appropriate power of the support generator, the minimum deviation of power on the propeller while ensuring the required energy balance of the ship's power supply.*

*Given the random nature of loads from the electrical system and directly to the propulsion system, which complicates the implementation of the presented algorithm for optimal control in real time, the feasibility of using fuzzy algorithms to improve the efficiency of control processes.*

*The obtained results can be used in the construction of highly efficient control systems for marine combined propulsion systems, to improve the quality of electricity in the ship's energy system and to ensure the efficiency of the ship's power system in emergency situations.*

*Key words: mathematical model, ship propulsive complex, differential drive, shaft generator, optimal control, regulator.*

### **Постановка проблеми**

Сучасний етап розвитку і створення суден транспортного і промислового флотів різного призначення з широкою електрифікацією технічних засобів відзначається значним збільшенням потужностей суднових енергетичних установок при збереженні високих вимог до економічності, екологічності і надійності їх роботи, а також точності та швидкодії відповідних систем керування.

Одним з напрямків вирішення даної проблеми є розробка і впровадження комбінованих пропульсивних комплексів (КПК). З одного боку, КПК у режимі відбору потужності забезпечує використання головної енергетичної установки (ГЕУ) для виробництва електроенергії, що дозволяє відмовитися від експлуатації всіх або частини дизель-генераторів (ДГ) в ходових режимах функціонування судна. З іншого, застосування КПК дозволяють значно покращити динамічні властивості судна, забезпечити живлення споживачів у ходовому режимі та можуть забезпечувати аварійний хід судна у випадку відмови ГД [1].

Крім того, у цей час намітилися напрями в розвитку, удосконалюванні й застосуванні суднових енергетичних систем, що містять напівпровідникові перетворювачі частоти, зокрема відносно дослідження й впровадження їх в комбінованих електромеханічних пропульсивних комплексах. При цьому особлива увага приділяється питанням підвищення ефективності процесів керування, забезпечення надійності енергопостачання судна, створенню перспективного судового електроенергетичного обладнання за рахунок інтеграції його в єдину електроенергетичну систему [2].

У зв'язку з цим, вирішення проблеми підвищення ефективності процесів керування судновими комбінованими пропульсивними комплексами за рахунок впровадження методів оптимального керування є актуальною задачею.

### **Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Комбіновані пропульсивні комплекси з прямим відбором потужності включають валогенераторну установку, генератор якої під'єднано або безпосередньо, або через коробку передач до головної енергетичної установки. Одним з можливих рішень, що забезпечує задовільні масо-габаритні показники та дозволяє зменшити необхідну потужність силового перетворювача, є використання диференціального приводу [3], схематична діаграма якого наведена на рис. 1.

Схема містить диференційний механізм (ДМ) і дві електричні машини: синхронний генератор (СГ), генератор опори (ГО), що може працювати, як у генераторному, так і в двигуновому режимі в залежності від обраного режиму функціонування КПК. Узгодження ГО з енергосистемою судна здійснюється за рахунок обертового перетворювача частоти (ПЧ) та трансформатора з фільтром.



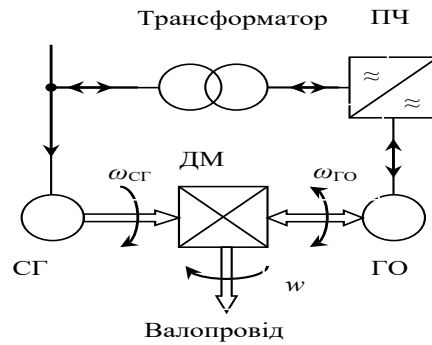


Рис. 1. Функціональна схема диференціального синхронного привід-генераторного агрегату

Розглянемо динамічну модель такого КПК [3, 4]. Рівняння руху, що описує процеси в диференціальному синхронному привід-генераторному агрегаті:

$$J_{\text{ПР1}} \cdot \frac{d\omega_{\text{СГ}}}{dt} - J_{\text{ПР2}} \cdot \frac{d\omega_{\text{ГД}}}{dt} = \frac{1}{2} \cdot M_{\text{ЕГО}} - M_{\text{ЕСГ}}, \quad (1)$$

де  $J_{\text{ПР1}} = J_{\text{СГ}} + \frac{1}{i_2^2} \cdot J_{\text{ГО}}$  – приведений момент інерції до вала основного синхронного генератора;  $J_{\text{ПР2}} = \frac{1}{i_2} \cdot J_{\text{ГО}}$  – приведений момент інерції до вала головного двигуна.

Рівняння напруг  $U$ , струмів  $I$  і електромагнітного моменту  $M_{\text{ЕМ}}$  в синхронній машині зазвичай подається у виді системи рівнянь в осях  $d, q$ :

$$\begin{cases} U = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (u_d^2 + u_q^2)}; \\ I = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (i_d^2 + i_q^2)}; \\ M_{\text{ЕМ}} = \frac{3}{2} \cdot p \cdot (\Psi_q \cdot i_d - \Psi_d \cdot i_q), \end{cases} \quad (3)$$

де  $u_d, u_q, i_d, i_q$ , – напруги і струми генератора по осях  $d, q$ ;  $\Psi_d, \Psi_q$  – потокозчеплення обмоток генератора.

Рівняння збудника синхронного генератора з активним опором  $r_{3B}$  і індуктивністю  $L_{3B}$ :

$$\begin{cases} u_{3B} = r_{3B} \cdot i_{3B} + L_{3B} \cdot \frac{di_{3B}}{dt}; \\ u_f = m_{uf} \cdot \frac{C_f}{k_u} \cdot i_{3B}. \end{cases} \quad (4)$$

Рівняння руху для випадку постійної частоти обертання вхідного вала:

$$\begin{cases} I_{\text{ПР}} \cdot \frac{d\Omega_1}{dt} = \frac{1}{i_2} \cdot M_{EM2} - M_{EM1}; \\ \Omega_1 = \frac{\omega_1}{P_1}. \end{cases} \quad (5)$$

Рівняння реактора:

$$U_{\text{ВЛХВ}} = U_{\text{ВХВ}} + r_p \cdot I_{\text{ВХВ}} + L_p \frac{dI_{\text{ВХВ}}}{dt}, \quad (6)$$

де  $U_{\text{ВЛХВ}}$ ,  $U_{\text{ВХВ}}$ ,  $I_{\text{ВХВ}}$  – напруга на виході випрямляча генератора опори, напруга і струм на виході залежного інвертора з боку постійного струму;  $r_p$ ,  $L_p$  – активний опір і індуктивність реактора.

В якості рівнянь зв'язку компонентів моделі використано залежності складових струмів синхронного генератора, навантаження і залежного інвертора:

$$\begin{cases} i_{dCG} = i_{dH} + i_{d3I}; \\ i_{qCG} = i_{qH} + i_{q3I}. \end{cases} \quad \begin{cases} i_{d33} = \sqrt{2} \cdot I_{3I} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{3I} - \theta\right); \\ i_{q33} = \sqrt{2} \cdot I_{3I} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{3I} - \theta\right). \end{cases} \quad (7)$$

Вираз для вихідного струму залежного інвертора:

$$\frac{di_{\text{ВХ3I}}}{dt} = \frac{3\sqrt{6}}{\pi} \cdot \frac{U_2 - U_1 \cdot \cos \beta}{L_p} - I_{\text{ВХ3I}} \cdot \frac{\frac{3}{\pi} \cdot (x_\gamma + x_{\text{ГО}}) + r_p}{L_p}. \quad (8)$$

Наведені рівняння, доповнені рівняннями навантаження, регуляторів частоти і напруги, є повною математичною моделлю диференціального синхронного привід-генераторного агрегату, що може бути використана як для аналізу суднової енергетичної системи при дії комплексу факторів, що збурюють, так і для подальшого синтезу ефективних алгоритмів управління для виключення негативного впливу збурень на функціонування комплексу і забезпечення гарантованого електропостачання, руху і маневрування судна.

### Мета дослідження

Метою даного дослідження є формалізація та розв'язання задачі оптимального керування судновим комбінованим пропульсивним комплексом для забезпечення мінімальних відхилень між заданою та поточною потужностями на гвинті судна при дії збурюючих факторів навколишнього середовища.

### Викладення основного матеріалу дослідження

Для побудови високоефективних алгоритмів керування ПЧ з метою забезпечення сталої частоти обертання ВГ ПЧ в експлуатаційних режимах при дії на КПК збурюючих факторів з боку гвинта та суднової електромережі, необхідно враховувати баланс потужностей в електромеханічній системі “Корпус судна – Рушій – Пропульсивна установка – Валогенератор – Суднова електромережа”.

Регулятор частоти обертання ВГ має визначати керуючі впливи, виходячи з поточної швидкості обертання, механічних та електричних потужностях СЕУ. Через те,

що така задача є багатофакторною, розглянемо методи визначення оптимального керування судовими комбінованими пропульсивними комплексами. Керування режимами роботи КПК з ДМ, електродвигуном змінного струму та обертовим перетворювачем частоти можливе за рахунок зміни частоти живлячої напруги генератора опори [5].

При цьому необхідно забезпечувати необхідну механічну та електричну потужності СЕУ. Тому що сумарна потужність енергоустановки судна обмежена, доцільно розглядати баланс механічної потужності в якості критерію оптимізації, а електричної – як обмеження.

Тоді задачу оптимального керування КПК з урахуванням вимог до забезпечення балансу потужностей КПК при роботі в експлуатаційних режимах можна сформулювати наступним чином: необхідно знайти керування, що доставляє мінімум функціонала

$$J = \int_0^t [N_{ВИХ}^*(t) - N_{ВИХ}(t)]^2 \cdot dt, \quad (9)$$

де  $N_{ВИХ}^*(t)$  та  $N_{ВИХ}(t)$  – задана та діюча механічні потужності на гвинті судна; при обмеженнях:

$$P_{ЕЛ} + P_{КПК} = P_{В.СП}, \quad (10)$$

де  $P_{ЕЛ}$  – електрична потужність, що виробляється допоміжною енергетичною установкою судна,

$P_{КПК}$  – електрична потужність, що відбирається від КПК (або відбирається у разі двигунового режиму генератора опори),

$P_{В.СП}$  – необхідна потужність споживачів у відповідному режимі.

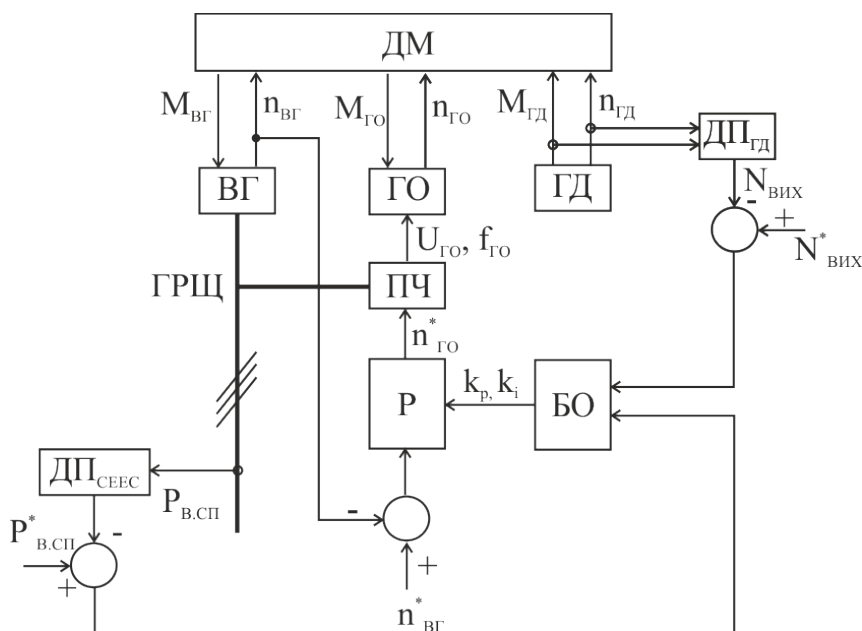
Фізичний сенс функціонала мети (9) полягає в тому, що середньоквадратичне відхилення поточної потужності на гвинті від заданої має бути мінімальним. Враховуючи, що потужності на гвинті, ВГ та ГО в КПК з диференціальним механізмом пов'язані співвідношеннями (1-8), зміна потужності, що додається або відбирається від генератора опори, зможе забезпечити виконання зазначеної умови.

При цьому необхідно враховувати запас потужності СЕЕС: у разі “слабкої мережі”, наприклад, режим підсилення КПК стає неможливим.

Таким чином, оптимізація визначеного функціоналу мети, при обмеженнях щодо запасу потужності в електромережі, є задачею слідкування, що зводиться до пошуку варіантів структур матричного перетворювача, при яких забезпечується мінімум спотворень вхідних струмів та виконуються умови щодо вихідних напруг [6].

Структуру автономної ЕС із МП, що може реалізовувати такий закон керування, наведено на рис. 2.

Стабілізація частоти обертання валогенератора ВГ здійснюється за рахунок керування частотою обертання генератора опори ГО. При цьому параметри налаштувань регулятора Р (у випадку ПІ-закону регулювання це, відповідно, пропорційна  $k_p$  та інтегральна  $k_i$  складові) визначаються блоком оптимізації БО на основі аналізу відхилень потужностей згідно (9) та (10).



**Рис. 2. Структура КПК з оптимальним регулятором:**  
 ГД – головний двигун, ВГ – валогенератор, ГО – генератор опори, ДМ – диференціальний механізм, ГРЩ – головний розподільний щит, ПЧ – перетворювач частоти, Р – регулятор, БО – блок оптимізації, ДП – датчик потужності

Регулятор формує сигнал керування перетворювачем частоти ПЧ, який забезпечує певний режим роботи генератора опори.

Таким чином, виконується стабілізація параметрів напруги бортової електромережі при зміні частоти обертання головного двигуна ГД. При цьому забезпечується необхідна потужність на рушійному гвинті КПК та контролюється стан суднової електромережі для уникнення перевантажень, на основі чого обирається та чи інша конфігурація КПК.

Через те, що кількість варіантів конфігурації КПК обмежена, для оптимізації доцільно застосувати безперервне динамічне програмування, як розв’язання задач кібернетики, що зводяться до проблеми оптимального перебору [7].

Функціонал мети (9) можна представити у вигляді:

$$J = \int_0^t [N_{ВИХ}^*(t) - \omega_{ВИХ}(t) \cdot M_{ВИХ}^*(t)]^2 \cdot dt. \quad (11)$$

У випадку КПК з ДМ, враховуючи вирази для моментів (2.3) та швидкостей (2.2), можна отримати вираз для функціоналу мети, що містить швидкості та моменти ВГ та ГО:

$$J = \int_0^t \left[ N_{ВИХ}^* - \frac{(\omega_{CG} + i_2 \cdot \omega_{GO})}{i_1} \cdot \frac{M_{GO}}{i_2} \right]^2 \cdot dt, \quad (12)$$

або

$$J = \int_0^t \left[ N_{ВИХ}^* - \left( \frac{\omega_{CG}}{i_1} + \omega_{GO} \right) \cdot M_{GO} \right]^2 \cdot dt. \quad (13)$$

В отриманому виразі швидкості ГО та ВГ та момент  $M_{ГО}$  пов'язані один з одним через співвідношення (1).

За методом Беллмана поверхні розв'язків формуються як [8]

$$S(a, c) = \min_u J, \quad (14)$$

де  $-\infty < a < c$ ;  $-\infty < c < \infty$ . У силу адитивності інтеграла можемо написати

$$S(a, c) = \min_{y[a, a+\Delta]} \left[ \int_a^{a+\Delta} F(\omega_{ГО}, \omega_{СГ}, M_{ГО}, t) dt + S(a + \Delta, c_1) \right], \quad (15)$$

де мінімізація проводиться по всім  $\omega_{ГО}$ , визначеним на проміжку зміни  $x \in [a, a+\Delta]$ , причому

$$y(a) = c, y(a+\Delta) = c_1. \quad (16)$$

Звідси отримуємо:

$$S(a, c) = \min_{\int (U_{aux}(t) - U_{aux}^*(t))^2 dt \leq \varepsilon} \left[ \int_a^{a+\Delta} \left[ N_{ВНХ}^* - \left( \frac{\omega_{СГ}}{i_1} + \omega_{ГО} \right) \cdot M_{ГО} \right]^2 dt + S(a + \Delta, c_1) \right]. \quad (17)$$

Розв'язання рівняння (17) має вигляд поверхонь розв'язків [7]. Оптимальний рух системи в просторі станів здійснюється по перетину цих поверхонь розв'язків, що відповідає ковзному режиму.

На основі вищезазначених міркувань можна сформулювати алгоритм оптимального керування КПК з вибором режиму та мінімізацією відхилень потужності на гвинті, суть якого полягає у наступному: за виразами (9) та (10) визначається відхилення механічної потужності, аналізується можливість реалізації режиму підсилення на основі інформації про поточний рівень споживання електроенергії та обирається відповідний режим роботи КПК з ДМ з параметрами налаштувань регулятора ГО згідно розробленої моделі нечіткого виводу.

Враховуючи випадковий характер навантажень, як з боку електричної енергосистеми, так і безпосередньо рухової установки, що ускладнює реалізацію представленого алгоритму оптимального управління в реальному часі, перспективним підходом є застосування техніки нечіткої логіки для побудови оптимального регулятора генератора опори суднового комбінованого пропульсивного комплексу [9].

### Висновки

1. Розглянуто методи визначення оптимального керування судновим КПК з ДМ, електродвигуном змінного струму та обертовим перетворювачем частоти за рахунок зміни частоти живлячої напруги генератора опори.

2. З урахуванням вимог до забезпечення балансу потужностей КПК при роботі в експлуатаційних режимах було сформульовано задачу оптимального керування за мінімумом відхилення між заданою та діючою механічними потужностями на гвинті судна; при обмеженнях щодо електричної потужності в судновій електромережі.

3. Для реалізації оптимального регулятора генератора опори доцільно застосовувати методи нечіткої логіки.

**Список використаної літератури**

1. Григорьев А.В., Петухов В.А. Современные и перспективные судовые валогенераторные установки. СПб.: Изд-во ГМА им. адм. С.О. Макарова, 2009. 176 с.
2. Будашко В.В. Розробка трирівневої багатокритеріальної стратегії управління гібридною судновою енергетичною установкою комбінованого пропульсивного комплексу. *Електротехніка і електромеханіка*. 2017. № 2. С. 62-72.
3. Ищенко И.М., Вороненко С.В., Данык В.В. Математическая модель дифференциального синхронного привод-генераторного агрегата. *Научный вестник Херсонской государственной морской академии: научный журнал*. 2015. № 2 (13). С. 209-215.
4. Lebedenko Yu.O., Danyk V.V., Krupitsa P.O. Adaptive Control of the Combined Propulsion System. *2016 IEEE 4th International Conference Methods and Systems of Navigation and Motion Control (MSNMC): Proceedings, Kyiv, October 18-20*. 2016. P. 214-217. DOI: 10.1109/MSNMC.2016.7783145.
5. Іщенко І.М., Даник В.В., Лебеденко Ю.О. Оптимізація процесів керування судновими комбінованими пропульсивними комплексами. *FS-2019: матеріали міжнар. наук.-практ. конф., присвяченої пам'яті професорів Фомина Ю.Я. і Семенова В.С., м. Одеса – м. Стамбул – м. Одеса, 24-28 квіт. 2019*. Одеса. 2019. С. 225-227.
6. Михайлов В.С. Теория управления. Киев: Выща Школа, 1988. 312 с.
7. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы: учеб. пособие. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 464с.
8. Беллман Р. Динамическое программирование. М., Изд. иностр. лит., 1960. 400 с.
9. Гостев В.И. Нечеткие регуляторы в системах автоматического управления. К.: Радиоаматор. 2008. 972 с.

**References**

1. Grigorev, A.V., & Petuhov, V.A. (2009). Sovremennyye i perspektivnyie sudovyye valogeneratornyie ustanovki. SPb.: Izd-vo GMA im. adm. S.O. Makarova.
2. Budashko, V.V. (2017). Rozrobka tryrivnevoi bahatokryterialnoi stratehii upravlinnia hibrydnoiu sudnoviu enerhetychnoiu ustanovkoiu kombinovanoho propul'syvnoho kompleksu. *Elektrotekhnika i elektromekhanika*. **2**, 62-72.
3. Ischenko, I.M., Voronenko, S.V., & Danyik, V.V. (2015). Matematicheskaya model differentsialnogo sinhronnogo privod-generatornogo agregata. *Naukoviy Visnik Hersonskoyi Derzhavnoyi Morskoyi Akademiyi: naukoviy zhurnal*. **13**, 209-215.
4. Lebedenko, Yu.O., Danyk, V.V., & Krupitsa, P.O. (2016). Adaptive Control of the Combined Propulsion System. *2016 IEEE 4th International Conference Methods and Systems of Navigation and Motion Control (MSNMC): Proceedings, Kyiv, October 18-20*. 214-217.
5. Ishchenko, I.M., Danyk, V.V., & Lebedenko, Yu.O. (2019). Optyimizatsiia protsesiv keruvannya sudnovymy kombinovanyu propul'syvnyu kompleksamy. *FS-2019: materialy mizhnar. nauk.-prakt. konf., prysviachenoj pamiaty profesoriv Fomina Yu.Ia. i Semenova V.S., m. Odesa – m. Stambul – m. Odesa*. 225-227.
6. Mihaylov, V.S. (1988). Teoriya upravleniya. Kiev: Vyischa Shkola.
7. Kim, D.P. (2004). Teoriya avtomaticheskogo upravleniya. T.2. Mnogomernyye, nelineynyye, optimalnyie i adaptivnyie sistemy: ucheb. posobie. Moskva: FIZMATLIT.
8. Bellman, R. (1960). Dinamicheskoe programmirovaniye. M., Izd. inostr. lit.
9. Gostev, V.I. (2008). Nechetkie regulatoryi v sistemah avtomaticheskogo upravleniya. K.: Radioamator.

Даник Вадим Вікторович – старший викладач кафедри управління судном, Херсонська державна морська академія, e-mail: [vadymdanyk@gmail.com](mailto:vadymdanyk@gmail.com), ORCID: 0000-0002-4439-0309.

Колебанов Олександр Костянтинович – к.т.н., доцент, доцент кафедри експлуатації суднового електрообладнання та засобів автоматики, Херсонська державна морська академія, e-mail: [kolebanovkak@gmail.com](mailto:kolebanovkak@gmail.com), ORCID: 0000-0002-9618-9105.

Лебеденко Юрій Олександрович – к.т.н., доцент, доцент кафедри автоматизації, робототехніки та мехатроніки, Херсонський національний технічний університет, e-mail: [lebedenko@kntu.net.ua](mailto:lebedenko@kntu.net.ua), ORCID: 0000-0002-1352-9240.

УДК 621.3

Г.Г. ДОЩЕНКО

Херсонская государственная морская академия

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ЭФФЕКТИВНОСТИ СТАБИЛИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ГДГА

*Основными источниками энергии в судовых электроэнергетических системах на большинстве морских судов и буровых платформах являются дизель-генераторные агрегаты с электронными системами стабилизации оборотов дизелей и цифровыми системами распределения нагрузки между генераторами. Перспективной альтернативой дизелям являются газодизели, (ГД) использующие газовое топливо с различным химическим составом.*

*К настоящему времени газодизель генераторные агрегаты (ГДГА) активно внедряются в состав электростанций, где достаточна их одиночная работа, то есть они нашли применение в качестве одиночных систем автономного электроснабжения. Однако ввиду значительных колебаний частоты вращения ГД при изменении нагрузки на газодизель генераторный агрегат и параллельной работе, в системе возникают колебательные процессы, существенно влияющие на рабочие характеристики агрегатов. Использование для стабилизации частоты вращения газодизель генераторных агрегатов микропроцессорных систем и ПИД-регуляторов не позволяет полностью решить проблему повышения качества стабилизации частоты вращения в широком диапазоне изменения динамических нагрузок.*

*Для устранения этого недостатка требуется изучение рабочих режимов газодизель генераторных агрегатов, выполненных с использованием различных сортов газового топлива и их смесей. Если есть нелинейная нагрузка на генератор, то получение активной составляющей мощности становится проблематично. С этой целью необходимо разработать модель газодизель генераторного агрегата, позволяющую решать задачи распределения активной мощности между генераторными агрегатами и проверять эффективность систем ее распределения путем моделирования процесса. Это позволит повысить экономичность применения газодизель генераторных агрегатов на конкретных объектах и комплексах газодизель генераторных агрегатов с питанием попутных газов, получаемых в период выполнения буровых работ.*

*В данной статье автором решается актуальная задача обеспечения устойчивой параллельной работы двух и более газодизель генераторов в составе автономной электроэнергетической системы морских буровых платформ и объектов водного транспорта.*

*Ключевые слова: электроэнергетическая система, газодизель генераторные агрегаты (ГДГА), активная мощность, система регулирования.*

Г.Г. ДОЩЕНКО

Херсонська державна морська академія

## МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ЕФЕКТИВНОСТІ СТАБІЛІЗАЦІЇ ПАРАМЕТРІВ ГДГА

*Основними джерелами енергії в судових електроенергетичних системах на більшості морських суднах і бурових платформах є дизель-генераторні агрегати з електронними системами стабілізації оборотів дизелів і цифровими системами розподілу навантаження між генераторами. Перспективною альтернативою дизелів є газодизель, (ГД), які використовують газове паливо з різним хімічним складом.*

*До теперішнього часу газодизель генераторні агрегати (ГДГА) активно впроваджуються в склад електростанцій, де достатня їх одиночна робота, тобто вони знайшли застосування в якості одиночних систем автономного електропостачання. Однак з огляду на значні коливання частоти обертання ГД при зміні навантаження на газодизель генераторному агрегаті і паралельну роботу, в системі виникають коливальні процеси, які суттєво впливають на робочі характеристики агрегатів. Використання для стабілізації частоти обертання газодизель генераторних агрегатів мікропроцесорних систем і ПИД-регуляторів не дозволяє повністю вирішити проблему підвищення якості стабілізації частоти обертання в широкому діапазоні зміни динамічних навантажень.*

*Для усунення цього недоліку потрібно вивчення робочих режимів газодизель генераторних агрегатів, виконаних з використанням різних сортів газового палива і їх сумішей. Якщо є нелінійне навантаження на генератор, то отримання активної складової потужності стає проблематичним. З цією метою необхідно розробити модель газодизель генераторного агрегату, яка дозволяє вирішувати*



завдання розподілу активної потужності між генераторними агрегатами і перевіряти ефективність систем її розподілу шляхом моделювання процесу. Це дозволить підвищити економічність застосування газодизель генераторних агрегатів на конкретних об'єктах і комплексах газодизель генераторних агрегатів з живленням супутніх газів, які одержали в період виконання бурових робіт.

У даній статті автором вирішується актуальне завдання забезпечення стійкої паралельної роботи двох і більше газодизель генераторів у складі автономної електроенергетичної системи морських бурових платформ і об'єктів водного транспорту.

Ключові слова: електроенергетична система, газодизель генераторні агрегати (ГДГА), активна потужність, система регулювання.

H.G. DOSHCENKO  
Kherson State Maritime Academy

## SIMULATION OF EFFICIENCY PROCESSES STABILIZATION OF PARAMETERS GDGS

*The main sources of energy in ship power systems on most ships and drilling platforms are diesel generator sets with electronic diesel speed stabilization systems and digital load sharing systems between generators. A promising alternative to diesels are gas diesels (GD) using gas fuel with different chemical composition.*

*To date, gas-diesel generator sets (GDGS) are being actively introduced into power plants, where their single operation is sufficient, that is, they have found application as single autonomous power supply systems. However, due to significant fluctuations in the rotation frequency of the main engine when the load on the main engine generator is changed and in parallel operation, oscillatory processes appear in the system, which significantly affect the performance of the units. The use of microprocessor systems and PID controllers to stabilize the rotation frequency of gas-diesel generator sets does not completely solve the problem of improving the quality of stabilization of the rotation frequency in a wide range of dynamic loads.*

*To eliminate this drawback, it is necessary to study the operating modes of the gas-diesel generator sets, performed using various types of gas fuel and their mixtures. If there is a non-linear load on the generator, then obtaining the active component of the power becomes problematic. For this purpose, it is necessary to develop a model of the gas-diesel generator sets that allows solving the problems of distributing active power between generating sets and checking the efficiency of its distribution systems by modeling the process. This will make it possible to increase the efficiency of using gas-diesel generator sets at specific facilities and complexes of gas-diesel generator sets powered by associated gases produced during the period of drilling operations.*

*This article solves the urgent problem of ensuring stable parallel operation of two or more gas-diesel generators as part of an autonomous electric power system of offshore drilling platforms and water transport facilities.*

*Keywords: electric power system, gas-diesel generator sets (GDGS), active power, control system.*

### Анализ исследований

Использование в судовых электроэнергетических системах (СЭЭС) морских буровых платформ (БП) и объектов водного транспорта газодизельных двигателей в качестве приводных двигателей синхронных генераторов вызывает всё больший интерес, который вызван следующими преимуществами газодизель генераторных агрегатов (ГДГА):

– использование ГДГА на БП позволяет в качестве их топлива использовать добываемый попутно с нефтью нефтяной газ, что снижает себестоимость эксплуатации БП;

– они обеспечивают возможность работы главных источников энергии СЭЭС на дизельном и на газодизельном топливе, что увеличивает надежность СЭЭС БП;

– дают улучшение экологических показателей, т. к. продукты сгорания газодизельного топлива до 80% менее токсичны по сравнению с выхлопами эксплуатируемых в настоящее время дизель-генераторных агрегатов. В выхлопных газах ГДГА нет твердых составляющих – частиц двуокиси серы и сажи;

– позволяют снизить износ деталей двигателя ГДГА. В связи с отсутствием в продуктах сгорания окиси серы и сажи на деталях не образуется нагар, масло не

загрязняется и срок службы двигателя возрастает в 1,5 – 2 раза [1].

Недостатком ГДГА является ограниченная мощность для одной машины. При необходимости могут быть установлены несколько параллельно работающих агрегатов. Однако есть ряд проблем их параллельной работы, которые обусловлены значительными колебаниями оборотов ГД, приводящие к появлению значительных обменных колебаний мощности между генераторными агрегатами. Для решения таких проблем используются новые методы.

Исследования показали [2], что оптимизация параметров регулятора ГДГА при его одиночной работе позволяет повысить стабильность оборотов газодизеля до стабильности оборотов дизельного двигателя, что открывает возможности обеспечения параллельной работы ГДГА. При этом необходимо обеспечивать эффективный контроль активной мощности каждого из генераторов.

### **Постановка проблемы**

Успешное решение проблем комплексной автоматизации СЭЭС, связанных с необходимостью учитывать влияние большого количества разнообразно действующих факторов, которые удовлетворяют требованиям повышения надежности, улучшения технико-экономических показателей.

В данной статье решается актуальная задача обеспечения устойчивой параллельной работы двух и более газодизель генераторов в составе автономной электроэнергетической системы морских буровых платформ и объектов водного транспорта.

### **Изложение основного материала исследования**

Первоначально вопрос использования природного газа в качестве моторного топлива на флоте встал для судов-газовозов. Накопление опыта их эксплуатации позволило расширить область применения ГТ в двигателях судов других типов. Сегодня использование сжиженного природного газа рассматривается как перспективное направление для судов – морских буровых платформ, контейнеровозов, пассажирских, автомобилевозов, паромов и т.д. [3, 4].

Для построения высокоэффективных систем распределения активной мощности при наличии постоянных возмущающих воздействий (случайные подключения – отключения нагрузки), а также через собственные колебания частоты вращения валов приводных двигателей (ПД), необходимо с достаточной для практики точностью определить вид и параметры динамической модели ГДГА.

Общая динамическая модель ГДГА содержит в себе как механические, так и электрические параметры. Так как электрические процессы в генераторе при отсутствии управления по возбуждению протекают во много раз быстрее, чем механические, то их общее влияние на динамику системы можно не учитывать [5].

Реально функционирующий ГДГА может рассматриваться как идеальная машина, на которую влияет аддитивная помеха. Поскольку в реальной системе ПИД-регулятор настраивается только на одну точку рабочего диапазона, но есть все основания полагать, что предложенный алгоритм управления позволит существенно повысить стабильность оборотов ГД во всем диапазоне мощностей нагрузки. На структурной схеме ГДГА в соответствии с принятой методикой измерения аддитивная помеха в виде дестабилизирующей функции  $f_{\omega}$  прикладывается к выходу (см. рис. 1).

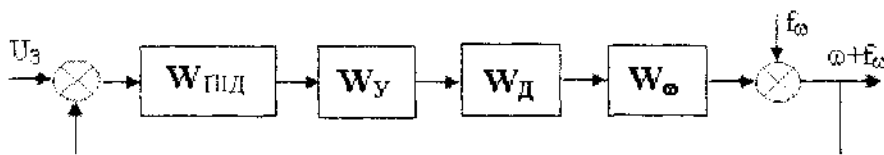


Рис. 1. Структурная схема ГДГА

$$\left. \begin{aligned} W_{\text{ПНД}} &= \frac{T_n T_g p^2 + K_n T_u p + 1}{T_u p}; W_y = \frac{K_y}{T_y p + 1}; \\ W_D &= \frac{(T_{\text{ТН}} p + 1)}{\frac{T_{\text{ТН}}}{1 - K_D K_{\text{ТН}}} p + 1} \cdot \frac{K_D}{1 - K_D K_{\text{ТН}}}; W_\omega = \frac{1/D}{\frac{T_\omega}{D} p + 1} \end{aligned} \right\}$$

Принимая  $W_K = W_{\text{ПНД}} W_y W_D W_\omega$ , определяем уровень препятствия на выходе замкнутой системы  $f_{\omega 3}$ :

$$f_{\omega 3} = \frac{f_\omega}{1 + W_K} = f_\omega \frac{1}{1 + W_K} = f_\omega W_3.$$

Спектральную плотность помехи на выходе замкнутой системы запишем в следующем виде:

$$S_{\omega 3}(\omega) = S_\omega |W_3(j\omega)|^2 = S_\omega \left| \frac{1}{1 + W_K(j\omega)} \right|^2.$$

Из приведенной формулы, учитывая характер устойчивой системы для области эффективного подавления помехи, где  $W_K \gg 1$ , имеем:

$$S_{\omega 3}(\omega) \approx S_\omega \frac{1}{|1 + W_K(j\omega)|^2}.$$

В современных судовых электроэнергетических системах широко применяются автоматизированные системы управления, в частности, автоматические устройства управления генераторными агрегатами, включающие устройства синхронизации и распределения мощности и др. Современные системы используют микропроцессорное управление.

Для более детального рассмотрения и изучения распределения активной мощности между параллельно работающими генераторами предлагается структурная схема микропроцессорной системы, представленная на рисунке 2.

Как видно из рисунка 2, на маховике обоих газодизель генераторов (ГДГ1 и ГДГ2) расположены по два индукционных датчика Д1, Д2. Импульсный сигнал с выхода этих датчиков поступает на усилители ОУ1, ОУ2, где он усиливается до необходимого уровня и подается на микроконтроллер CPU. Таким образом, микроконтроллер имеет полную информацию о положении и частоте вращения

роторов двух генераторов, а также информацию о величине моментов на валах обоих дизелей от датчиков моментов ДМ1 и ДМ2, или датчиков активной мощности, получаемого на выходе синхронных генераторов. В случае значительной нелинейности нагрузки, например, при наличии сопоставимых по мощности полупроводниковых преобразователей, выделения активной составляющей мощности в сети переменного тока становится проблематичным, так регистрация информации о величине момента на валу может происходить либо с помощью датчиков момента, устанавливаемых на валах дизелей, или косвенным путем по избыточности давления турбонагнетателя.

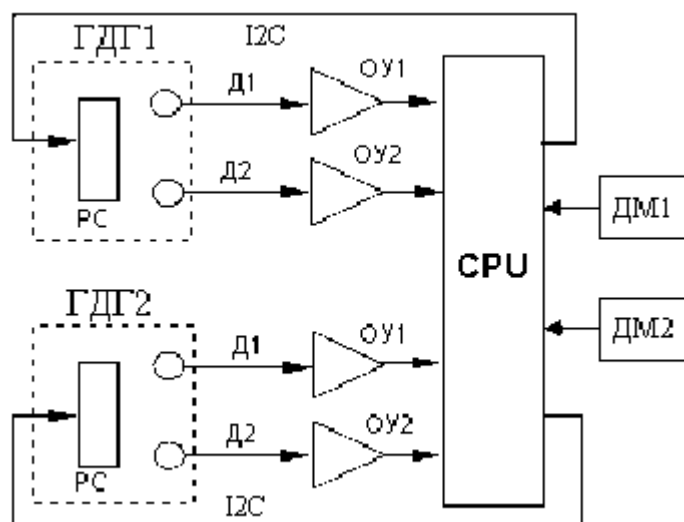


Рис. 2. Структурная схема микропроцессорной системы распределения активной мощности

Если есть нелинейная нагрузка, то получение активной составляющей мощности становится проблематично. В этом случае момент на валу можно измерить с помощью датчика момента на дизеле вала или через избыточное давление турбонагнетателя. Если данные были получены, микроконтроллер вычисляет угловые несоответствия между положениями ротора ГДГ1 и ГДГ2. Несогласованность углов пропорциональна активной мощности. CPU делает управляющий сигнал отрицательной обратной связи. От ЦП поступает сигнал отрицательной обратной связи на входы регулятора скорости. Регулятор меняет подачу топлива в зависимости от уровня сигнала с базовой частотой вращения и фазовым углом.

Итак, необходимо ввести в цепь управления регулятор приводного двигателя ГДГ, то есть компенсирующее устройство для уменьшения амплитуды колебаний частоты и неравномерности распределения ГДГ активной мощности между параллельно работающими агрегатами. Такое компенсирующее устройство будет управлять подачей топлива в цилиндры через топливную рамку.

Такая система может быть построена как на основе взаимосвязи генераторов, как ведомый и ведущий, так и на основе перекрестных связей.

Модель автономной электростанции состоит из двух газодизель генераторных агрегатов, работающих на активно-индуктивную нагрузку. В модели каждый ГДГА имеет в своем составе следующие блоки: модель газодизеля, системы возбуждения генератора, коммутаторы, блоки измерения сигналов, блоки для работы с СОМ-портом для связи с моделями в других средах.

Детальная мультимодель с параллельно работающими газодизельными

двигателями приведена на рисунке 3.

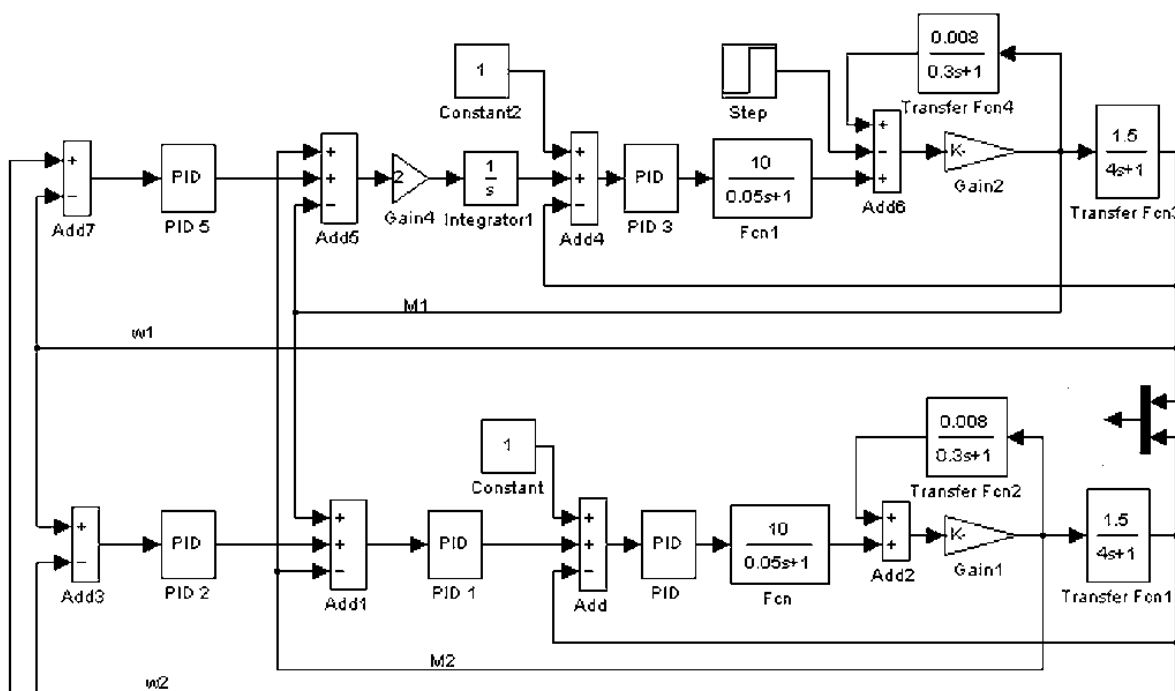


Рис. 3. Мультимодель с двумя газодизельными двигателями с ПИД-регуляторами

Мультимодель, представленная на рисунке 3, состоит из двух газодизелей с ПИД-регуляторами (блоки PID). Система выполняет распределение активной мощности с использованием двухконтурной системы регулирования по отклонению угловых положений роторов и моментов на валах газодизелей [6].

Мультимодельная СЭЭС объединила в себе как силовую электроэнергетику, так и микропроцессорные системы управления, что наряду с моделированием энергетических процессов даёт возможность моделировать и управлять ими посредством цифровых систем. Такая методология предоставляет возможность создавать не только системы мониторинга, но и удаленного управления оборудованием.

### Выводы

Таким образом, разработанная модель ГДГА позволяет решать задачи распределения активной мощности между генераторными агрегатами и проверять эффективность систем ее распределения путем моделирования процесса.

С помощью разработанной детальной модели СЭЭС с двумя ГДГА были определены наилучшие условия обеспечения параллельной работы агрегатов с распределением активной мощности и стабилизацией оборотов газодизельных двигателей, то есть решена задача компенсации обменных колебаний мощности между ГДГА с заданной точностью.

### Список использованной литературы

1. Chernyi S., Zhilenkov A. Analysis of complex structures of marine systems with attraction methods of neural systems. *Metallurgical and Mining Industry*. 2015. № 1. P. 37– 44.

2. Zhilenkov A., Chernyi S. Investigation performance of marine equipment with specialized information technology. *Energy Procedia*. 2015. Vol. 100. P. 1247–1252. DOI: 10.1016/j.proeng.2015.01.490
3. ME-GI – Dual Fuel Done Right [Текст]. MAN Diesel, ME-GI, SNAME NY, 2013. 73 p.
4. ME-GI Dual Fuel MAN B&W Engines A Technical, Operational and Costeffective Solution for Ships Fuelled by Gas [Текст]. Denmark, Copenhagen: MAN Diesel & Turbo. 2012. 36 p.
5. Жиленков А.А., Черный С.Г. Повышение эффективности систем автоматического управления автономными буровыми установками за счет разработки методов обеспечения их совместимости и интеграции. *Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности*. 2015. № 4. С. 9 –18.
6. Yang T. Present situation and development of power system simulation technologies. *Automation of Electric Power Systems*. China, 2002. №17. P. 23–47.

### References

1. Chernyi, S. & Zhilenkov, A. (2015). Analysis of complex structures of marine systems with attraction methods of neural systems. *Metallurgical and Mining Industry*. **1**, 37– 44.
2. Zhilenkov, A. & Chernyi, S. (2015). Investigation performance of marine equipment with specialized information technology. *Energy Procedia*. **100**, 1247–1252. DOI: 10.1016/j.proeng.2015.01.490
3. ME-GI – Dual Fuel Done Right. (2013). MAN Diesel, ME-GI, SNAME NY.
4. ME-GI Dual Fuel MAN B&W Engines A Technical, Operational and Costeffective Solution for Ships Fuelled by Gas (2012). Denmark, Copenhagen: MAN Diesel & Turbo.
5. Zhilenkov, A.A. & Cherniy, S.G. (2015). Povyishenie effektivnosti sistem avtomaticheskogo upravleniya avtonomnyimi burovyimi ustanovkami za schet razrabotki metodov obespecheniya ih sovmestimosti i integratsii. *Avtomatizatsiya, telemehanizatsiya i svyaz v neftyanoy promyishlennosti*. **4**, 9 –18.
6. Yang T. (2002). Present situation and development of power system simulation technologies. *Automation of Electric Power Systems*. China. **17**, 23–47.

Дощенко Галина Геннадиевна – к.т.н., доцент кафедры эксплуатации судового электрооборудования и средств автоматики Херсонской государственной морской академии. E-mail: hersongala@gmail.com, ORCID: 0000-0002-1004-4934.

УДК 539.3

Т.С. КАГАДІЙ, А.Г. ШПОРТА  
Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»  
О.В. БІЛОВА  
Український державний університет науки і технологій (НМетАУ)  
І.В. ЩЕРБИНА  
Дніпровський державний аграрно-економічний університет

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ЗАДАЧАХ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

*Розв'язки багатьох важливих для практики задач, що виникають в сучасній техніці, не завжди можуть бути отримані традиційними методами теорії аналітичних функцій або за допомогою інтегральних перетворень. Це відноситься, наприклад, до контактних задач, в яких враховуються скінченні розміри області хоча б в одному напрямку, або досліджуються середовища з криволінійною анізотропією тощо. Засоби математичної теорії пружності виявляються не надто ефективними для дослідження таких задач. У цьому випадку доцільно використовувати досягнення теорії потенціалу. Застосування ж асимптотичних методів при цьому, навіть в складних випадках, дозволяє отримувати обґрунтовані наближені рівняння, уточнювати якісні закономірності і отримувати аналітичні розв'язки задач.*

*У даній роботі представлено узагальнення методу збурень, яке дозволяє звести дослідження складних задач геометрично нелінійної теорії пружності (в плоскій та просторовій постановці) до послідовного розв'язання більш простих крайових задач теорії потенціалу. Геометрично нелінійна теорія пружності містить в собі деякі особливості, завдяки яким вона відрізняється від класичної (лінійної) теорії. Головна відмінність полягає в урахуванні різниці між геометрією недеформованого та деформованого станів досліджуваного тіла, коли мають місце переміщення, які викликають значні зміни геометрії тіла. При цьому рівняння рівноваги необхідно складати з урахуванням зміни форми і розмірів конструкцій. Врахування кінцевих деформацій, які при створенні математичних моделей веде до значних труднощів при розв'язуванні задач, але в той же час наближає модель до реальної проблеми.*

*Метод збурень, що використовується для розв'язання нелінійних рівнянь у частинних похідних, має теоретичне і практичне значення. Він універсальний і може використовуватися для аналізу різних завдань математичної фізики. Розроблений підхід може бути застосований для вирішення завдань, в яких істотну роль грають залишкові деформації. Наприклад, згин тонких пластин і оболонок. У розглянутій модельній задачі вдалося виділити вплив геометричної нелінійності на напружено-деформований стан досліджуваного тіла.*

*Саме тому результати представленої роботи мають як теоретичне, так і прикладне значення, а дослідження є актуальним.*

*Ключові слова: асимптотичний метод, анізотропія, геометрична нелінійність.*

Т.С. КАГАДІЙ, А.Г. ШПОРТА  
Национальный технический университет «Днепропетровская политехника»  
О.В. БЕЛОВА  
Украинский государственный университет науки и технологий (НМетАУ)  
И.В.ЩЕРБИНА  
Днепропетровский государственный аграрно-экономический университет

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

*Решения многих важных для практики задач, возникающих в современной технике, не всегда могут быть получены традиционными методами теории аналитических функций или с помощью интегральных преобразований. Это относится, например, к контактнм задачам, в которых учитываются конечные размеры области хотя бы в одном из направлений, или исследуются среды с криволинейной анизотропией и т. д. Средства математической теории упругости оказываются не слишком эффективными для исследования таких задач. В этом случае целесообразно использовать достижения теории потенциала. Применение же асимптотических методов при этом, даже в*

сложных случаях, позволяет получать обоснованные приближенные уравнения, уточнять качественные закономерности и получать аналитические решения задач.

В данной работе представлено обобщение метода возмущений, которое позволяет свести исследование сложных задач геометрически нелинейной теории упругости (в плоской и пространственной постановке) к последовательному решению более простых краевых задач теории потенциала. Геометрически нелинейная теория упругости содержит в себе некоторые особенности, благодаря которым она отличается от классической (линейной) теории. Главное отличие заключается в учете разницы между геометрией недеформированного и деформированного состояний исследуемого тела, когда имеют место перемещения, которые вызывают значительные изменения геометрии тела. При этом уравнения равновесия необходимо составлять с учетом изменения формы и размеров конструкций. Учет конечных деформаций, при создании математических моделей ведет к значительным трудностям при решении задач, но в то же время приближает модель к реальной проблеме.

Метод возмущений, который используется для решения нелинейных уравнений в частных производных, имеет теоретическое и практическое значение. Он универсален и может использоваться для анализа различных задач математической физики. Разработанный подход может быть применен для решения задач, в которых существенную роль играют остаточные деформации. Например, изгиб тонких пластин и оболочек. В рассматриваемой модельной задаче удалось выделить влияние геометрической нелинейности на напряженно-деформированное состояние исследуемого тела.

Именно поэтому результаты представленной работы имеют как теоретическое, так и прикладное значение, а исследования являются актуальными.

Ключевые слова: асимптотический метод, анизотропия, геометрическая нелинейность.

T.S. KAGADIY, A.H. SHPORTA

Dnipro University of Technology

O.V. BILOVA,

National Metallurgical Academy of Ukraine (NMetAU)

I.V. SCHERBINA

Dnipro State Agrarian and Economic University

## **MATHEMATICAL MODELING IN GEOMETRICALLY NONLINEAR ELASTICITY THEORY PROBLEMS**

*The resolve of many important problems in practice that arise in modern technology cannot always be obtained by traditional methods of analytic function theory or by means of integral transformations. This applies, for example, to contact problems, which take into account the finite size of the region in at least one direction, or investigate environments with curvilinear anisotropy and the like. The means of mathematical theory of elasticity are not very effective for the study of such problems. In this case, it is advisable to use the achievements of the theory of potential. The use of asymptotic methods, even in complex cases, allows to obtain reasonable approximate equations, to clarify the qualitative patterns and to obtain analytical solutions.*

*This paper presents a generalization of the perturbation method, which allows us to reduce the study of complex problems of geometrically nonlinear elasticity theory (in plane and spatial formulation) to the sequential solution of simpler boundary value problems of potential theory. Geometrically nonlinear theory of elasticity contains some features that make it different from classical (linear) theory. The main difference is to take into account the difference between the geometry of the undeformed and deformed states of the studied body, when there are displacements that cause significant changes in the geometry of the body. The equilibrium equation must be made taking into account changes in the shape and size of structures. Taking into account the final deformations, which in the creation of mathematical models leads to significant difficulties in solving problems, but at the same time brings the model closer to the real problem.*

*The perturbation method, which is used to solve nonlinear equations in partial derivatives, has theoretical and practical significance. It is universal and can be used to analyze various problems of mathematical physics. The developed approach can be applied to solve problems in which residual deformations play a significant role. For example, the bending of thin plates and shells. In the considered model problem it was possible to allocate influence of geometrical nonlinearity on a stress-strain state of the investigated body.*

*That is why the results of the presented work have both theoretical and applied significance, and the study is relevant.*

*Keywords: asymptotic method, anisotropy, geometric nonlinearity.*



### Постановка проблеми

Врахування нелінійності, геометричної або фізичної, часто приводить до значних проблем при розв'язуванні задач. Особливо багато питань виникає в просторових задачах для анізотропних матеріалів. Асимптотичні методи [1] майже у будь-яких складних випадках дозволяють отримати обґрунтовані наближені рівняння, з'ясувати якісні закономірності та отримати аналітичні розв'язки задач [2]. Методи малого параметра не втрачають своєї ваги на тлі розвитку чисельних методів і часто є основою для розробки останніх. Створення будь-яких нових підходів до розв'язування задач геометрично нелінійної теорії пружності є актуальним і цікавим питанням сучасного математичного моделювання.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Однією з найважливіших цілей досліджень останніх років є врахування складних властивостей матеріалів (нелінійність, анізотропія, електропружність, в'язкопружність, тощо), що наближає математичну модель до реальних задач. Наприклад в [3] запропоновано метод розв'язання задачі електро-в'язкопружності для багатозв'язних пластин. Методом малого параметра задача зведена до рекурентної послідовності задач електров'язкопружності, що розв'язуються з використанням комплексних потенціалів.

### Мета дослідження

Створення нового підходу до розв'язання рівнянь геометрично нелінійної теорії пружності (врахування кінцевих деформацій), що дозволяє звести складну вихідну крайову задачу теорії пружності до послідовного розв'язування крайових задач теорії потенціалу. Узагальнення методу на випадок просторової то осесиметричної постановок. Дослідження ефективності методу на прикладі модельної задачі.

### Викладення основного матеріалу дослідження

Нехай система координат матеріальна і при деформуванні деформується. Цей метод описання деформованого стану відомий як метод Лагранжа, коли координати поточних точок недеформованої системи (чисельно) співпадають з координатами деформованої системи.

В тривимірній задачі теорії пружності з урахуванням кінцевих деформацій роль характеристик деформації грають компоненти тензора деформацій, що в декартовій системі координат  $x, y, z$  мають вигляд:

$$\begin{aligned} e_{11} &= u_x + \frac{1}{2}(u_x^2 + v_x^2 + w_x^2), \quad e_{22} = v_y + \frac{1}{2}(u_y^2 + v_y^2 + w_y^2), \\ e_{33} &= w_z + \frac{1}{2}(u_z^2 + v_z^2 + w_z^2), \quad e_{13} = u_z + w_x + u_x u_z + v_x v_z + w_x w_z, \\ e_{23} &= v_z + w_y + u_y u_z + v_y v_z + w_y w_z, \\ e_{12} &= u_y + v_x + u_x u_y + v_x v_y + w_x w_y. \end{aligned} \quad (1)$$

де  $u, v, w$  - компоненти вектора зміщення.

Введені наступні перетворення координат та шуканих функцій, що залежать від малого параметру  $\varepsilon$ , що характеризує анізотропію матеріалу [2, 4]

$$\begin{aligned} \xi_i &= \gamma_1^{(i)} \varepsilon^{\alpha_1^{(i)}} x, \quad \eta_i = \gamma_2^{(i)} \varepsilon^{\alpha_2^{(i)}} y, \quad \zeta_i = \gamma_3^{(i)} \varepsilon^{\alpha_3^{(i)}} z, \\ u^{(i)} &= \varepsilon^{\beta_1^{(i)}} U^{(i)}, \quad v^{(i)} = \varepsilon^{\beta_2^{(i)}} V^{(i)}, \quad w^{(i)} = \varepsilon^{\beta_3^{(i)}} W^{(i)}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2)$$

Таким чином, як і в лінійній постановці [5], в нелінійній теорії пружності можуть бути отримані три види деформованих станів з різними властивостями, що виявляються в відмінності порядків компонент вектора зміщень та їх різній відмінності за координатами. Показано, що можна отримати три відповідних напружених стани.

Питання про напружено-деформований стан тривимірного геометрично нелінійного тіла зведено до інтегрування рівнянь рівноваги в декартовій системі координат  $x, y, z$ :

$$\begin{aligned} & \left[ (1+u_x)\sigma_{11} + u_y\sigma_{12} + u_z\sigma_{13} \right]_x + \left[ (1+u_x)\sigma_{12} + u_y\sigma_{22} + u_z\sigma_{23} \right]_y + \\ & + \left[ (1+u_x)\sigma_{13} + u_y\sigma_{23} + u_z\sigma_{33} \right]_z = 0, \\ & \left[ v_x\sigma_{11} + (1+v_y)\sigma_{12} + v_z\sigma_{13} \right]_x + \left[ v_x\sigma_{12} + (1+v_y)\sigma_{22} + v_z\sigma_{23} \right]_y + \\ & + \left[ v_x\sigma_{13} + (1+v_y)\sigma_{23} + v_z\sigma_{33} \right]_z = 0, \\ & \left[ w_x\sigma_{11} + w_y\sigma_{12} + (1+w_z)\sigma_{13} \right]_x + \left[ w_x\sigma_{12} + w_y\sigma_{22} + (1+w_z)\sigma_{23} \right]_y + \\ & + \left[ w_x\sigma_{13} + w_y\sigma_{23} + (1+w_z)\sigma_{33} \right]_z = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

при відповідних крайових умовах.

Шукані функції розкладаються в ряди за степенями  $\varepsilon$ . Показано, що коефіцієнти в цих розвиненнях можуть бути підібрані таким чином, що основні функції в перших двох наближеннях знаходяться з рівнянь Лапласа

$$\begin{aligned} U_{\xi_1\xi_1}^{1,j} + U_{\eta_1\eta_1}^{1,j} + U_{\zeta_1\zeta_1}^{1,j} &= 0, \\ V_{\xi_2\xi_2}^{2,j} + V_{\eta_2\eta_2}^{2,j} + V_{\zeta_2\zeta_2}^{2,j} &= 0, \\ W_{\xi_3\xi_3}^{3,j} + W_{\eta_3\eta_3}^{3,j} + W_{\zeta_3\zeta_3}^{3,j} &= 0, \end{aligned}$$

В більш високих наближеннях розв'язуються рівняння Пуассона, праві частини яких визначаються з попередніх наближень. Допоміжні функції знаходяться інтегруванням.

Доведено можливість постановки крайових задач для основних функцій.

Проведено аналіз співвідношень між деформаціями та переміщеннями ортотропного тіла в межах плоскої постановки задачі теорії пружності з урахуванням скінченних деформацій.

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right], \\ e_{22} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right], \\ e_{12} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned} \tag{4}$$

Показано, що після введення перетворень

$$\begin{aligned} \xi_i &= \varphi_i \varepsilon^{\alpha_i} x, \quad \eta_i = \omega_i \varepsilon^{\beta_i} y, \\ u &= \varepsilon^{\gamma_i} U^{(i)}, \quad v = \varepsilon^{\delta_i} V^{(i)}, \quad (i=1,2) \end{aligned} \quad (5)$$

може бути виділено два види деформованого стану з різними властивостями. Зв'язок між цими станами здійснюється через зсувну компоненту деформації, яка містить рівноцінні складові обох типів.

Виділяються два види напруженого стану, які відповідають вказаним типам деформованого, при чому дотичні напруження містять однакові складові обох типів.

Проведено асимптотичне інтегрування рівнянь рівноваги

$$\begin{aligned} \left[ (1 + \underline{u}_x) \sigma_{11} + \underline{u}_y \sigma_{12} \right]_x + \left[ (1 + u_x) \sigma_{12} + u_y \sigma_{22} \right]_y &= 0, \\ \left[ v_x \sigma_{11} + (1 + v_y) \sigma_{12} \right]_x + \left[ v_x \sigma_{12} + (1 + v_y) \sigma_{22} \right]_y &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Розглядаючи рівняння без підкреслених членів та вважаючи величину  $\frac{G}{E}$  (як і для лінійної постановки) за малий параметр, після застосування перетворень вдається розщепити напружено-деформований стан на дві складові з різними властивостями.

Функції  $U^{(i)}, V^{(i)}$  ( $i=1,2$ ) та коефіцієнти  $\varphi_i, \omega_i$ , розшуковуються у вигляді рядів за параметром  $\varepsilon$  ( $\varphi_2 = \omega_1 = 1$ ). Коефіцієнти  $\varphi_{1j}, \omega_{2j}$  при однакових ступенях  $\varepsilon$  вдається підібрати таким чином, що основні функції  $U^{1,j}, V^{1,j}$  у кожному наближенні розшуковуються з рівнянь Лапласа. Допоміжні функції знаходяться через основні інтегруванням.

Якщо розглядаються повні рівняння (6), тоді, як і для тривимірної задачі, у нульовому та першому наближеннях основні функції розшуковуються з рівнянь Лапласа, для більш високих наближень необхідно розв'язувати рівняння Пуассона, у правих частинах яких містяться відомі функції з попередніх наближень. Однак і в цьому випадку маємо безсумнівну перевагу, тому що є добре розроблені загальні методи розв'язування крайових задач для таких рівнянь.

Проведено аналіз граничних умов, показано можливість їх формулювання для основних функцій.

Розв'язано модельну задачу про дію нормального навантаження

$$\sigma_{11} = -\frac{P_0}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + y^2}$$

на межу ( $x=0$ ) пружної ортотропної півплощини ( $x \geq 0, |y| < \infty$ ) при відсутності дотичних напружень на межі. Одержані значення переміщень та напружень, наприклад для нормального напруження  $\sigma_1^*$  на лінії  $y=0$ , маємо

$$\begin{aligned} \sigma_1^* &= \frac{1}{1 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} t_1} + C \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}} t_1}{(1 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} t_1)^2} + \varepsilon \left( \frac{1}{1 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} t_1} - \frac{1}{1 + \varepsilon^{-\frac{1}{2}} t} \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{1}{1 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} t_1} - \frac{1}{1 + \varepsilon^{-\frac{1}{2}} t_1} \right) + \dots, \\ \sigma_1^* &= -\sigma_{11} \pi \alpha / P_0, C = P_0 / 4\pi E_1 \alpha, t_1 = \frac{x}{\alpha}. \end{aligned}$$

Доданок, який містить  $C$  характеризує внесок геометричної нелінійності.

На рис. 1 показано нормальне напруження при  $y = 0$ , якщо  $\varepsilon = 0,1$  (суцільна лінія),  $\varepsilon = 0,35$  (пунктирна лінія). Криві 1 відповідають лінійній постановці задач, криві 2 враховують кінцеві деформації.

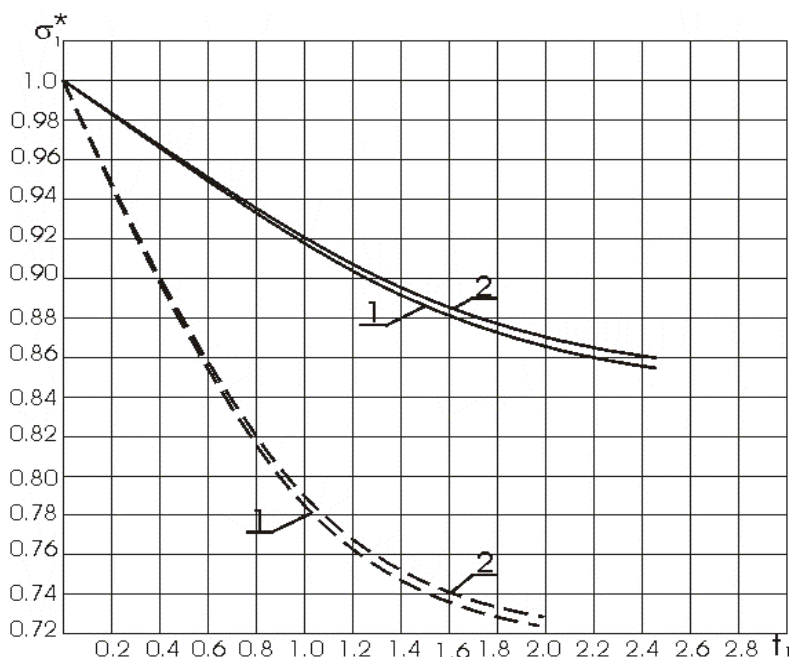


Рис.1. Зміна нормального напруження.

Розглянуто також геометрично нелінійні осесиметричні задачі. Як і в лінійному випадку задача розділяється на дві незалежні: задачу про деформацію, в якій відсутня компонента переміщення  $v$  (але, звісно, існує нормальне напруження  $\sigma_{22}$ ) та задачу кручення. Зупинимося на першій з них.

У випадку врахування геометричної нелінійності компоненти тензора деформації в циліндричній системі координат мають вигляд

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2, \\
 e_{22} &= \frac{u}{r} + \frac{1}{2} \left( \frac{u}{r} \right)^2, \\
 e_{33} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2, \\
 e_{13} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial z}, \\
 e_{12} &= e_{23} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Вводяться перетворення координат та шуканих функцій

$$r_1 = r, \quad \zeta_1 = \lambda_1 \varepsilon^{\lambda_1} z; \quad u = \varepsilon^{\delta_1} U^{(1)}, \quad w = \varepsilon^{\mu_1} W^{(1)},
 \tag{8}$$

$$r_2 = r, \quad \zeta_2 = \chi_2 \varepsilon^{\gamma_2} z; \quad u = \varepsilon^{\delta_2} U^{(2)}, \quad w = \varepsilon^{\mu_2} W^{(2)}. \quad (9)$$

Для осесиметричної задачі також виділяють два типи деформованого стану. В стані першого типу переміщення  $W^{(1)}$  значно перебільшує  $U^{(1)}$ . Основну роль відіграє деформація  $e_{33}$  і складова  $e_{13}^{(1)}$ , що може бути виражена через  $W^{(1)}$ , а в деформованому стані другого типу компонента переміщення  $U^{(2)}$  перебільшує  $W^{(2)}$  і відповідно головний внесок надають  $e_{22}$  та компонента  $e_{13}^{(2)}$ , що обчислюється через  $U^{(2)}$ . Як і в плоскому випадку, зв'язок між двома типами деформованого стану здійснюється через компоненту  $e_{13}$ , що містить складові обох типів  $e_{13}^{(1)}$  і  $e_{13}^{(2)}$ .

Виходячи із співвідношень між напруженнями та деформаціями

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= E_1 e_{11}, & \sigma_{22} &= E_2 e_{22}, & \sigma_{33} &= E_3 e_{33}, \\ \sigma_{13} &= G e_{13}, & \sigma_{23} &= \sigma_{12} = 0 \end{aligned}$$

отримують також два типи напруженого стану, що відповідають вказаним типам деформованого.

Інтегрування рівнянь рівноваги з урахуванням запропонованих перетворень і розвинень функцій та коефіцієнтів у ряди зводиться до розв'язання рівнянь відносно основних функцій.

Наприклад, в нульовому наближенні основна функція для напружено-деформованого стану першого типу визначається з рівняння

$$\frac{\partial^2 W^{(1)}}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial W^{(1)}}{\partial r_1} + \chi_1^2 \frac{\partial^2 W^{(1)}}{\partial \zeta_1^2} = 0, \quad (10)$$

а основна функція для другого типу з наступного рівняння:

$$\frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial r} + \chi_2^2 \frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial \zeta_2^2} - \frac{U^{(2)}}{r^2} = 0. \quad (11)$$

З рівнянь (10), (11) видно, що як і в лінійній постановці, для визначення основних функцій треба розв'язувати крайову задачу для знаходження однієї функції (при сформульованих крайових умовах). Допоміжні функції знаходяться через основні інтегрування.

### Висновки

Метод збурення, запропонований для розв'язування нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних, має теоретичне і практичне значення, є універсальним і може бути застосований для аналізу різноманітних задач математичної фізики. Він дозволяє звести розв'язання складних задач геометрично нелінійної теорії пружності (в плоскій та просторовій постановках) до послідовного інтегрування крайових задач теорії потенціалу.

Потрібно вказати, що розроблений підхід може бути застосований до розв'язання задач, в яких залишкові деформації відіграють значну роль (згин тонких пластин та оболонок). В розглянутій модельній задачі вдалось відокремити внесок геометричної нелінійності, але вказаний вище клас задач продемонструє ефективність методу більш наочно.

### Список використаної літератури

1. Александров В.М., Чебаков М.И. Аналитические методы в контактных задачах теории упругости. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 302 с.
2. Маневич Л.И., Павленко А.В. Асимптотический метод в микромеханике композиционных материалов: монография. Киев: Вища школа, 1991. 131 с.
3. Кагадий Т.С. Метод возмущений в механике упругих (вязкоупругих) анизотропных и композиционных материалов: монография. Днепропетровск: РИК НГА України, 1998. 260 с.
4. Калоеров С. А., Самодуров А. А. Задача электровязкоупругости для многосвязных пластинок. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2014. Т. 57. № 3. С. 62–77.
5. Кагадій Т.С., Шпорта А.Г., Білова О.В., Щербина І.В. Напружено-деформований стан шаруватої основи з підкріплюючим елементом. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2020. Т.3. № 2.1. С. 107–116.

### References

1. Aleksandrov, V.M., & Chebakov, M.I. (2004). Analiticheskie metody v kontaknykh zadachakh teorii uprugosti. Moskva: FIZMATLIT.
2. Manevych, & L.I., Pavlenko, A.V. (1991). Asimptoticheskiy metod v mikromekhanike kompozitsionnykh materialov. Kyiv: Vyscha shkola
3. Kagadiy, T.S. (1998). Metod vozmuscheniy v mehanike uprugih (vyazkouprugih) anizotropnykh i kompozitsionnykh materialov. Dnipropetrovsk: RYK NGA Ukrainy.
4. Kaloerov, S. A., & Samodurov, A. A. (2014). Zadacha elektrovязkouprugosti dlya mnogosvyaznykh plastinok. *Matematichni metodi ta fiziko-mehanichni polya*. 57, 3, 62–77.
5. Kahadii, T.S., Shporta, A.G., Bilova, O.V., & Shcherbyna, I.V. (2020). Napruzhenodeformovanyi stan sharuvatoi osnovy z pidkripliuuchym elementom. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuвання*. 3, 2.1, 107–116.

Кагадій Тетяна Станіславівна, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри вищої математики Національного технічного університету «Дніпровська політехніка». E-mail: tkagadiy@gmail.com, ORCID: 0000-0001-6116-4971.

Білова Оксана Вікторівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики Українського державного університету науки і технологій (Національної металургійної академії України). E-mail: okbelova00@gmail.com, ORCID: 0000-0001-6258-6164.

Щербина Ірина Володимирівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики та фізики Дніпровського державного аграрно-економічного університету. E-mail: sherbinaiv@ukr.net, ORCID: 0000-0003-3968-4326.

Шпорта Анна Григорівна, асистент кафедри вищої математики Національного технічного університету «Дніпровська політехніка». E-mail: , ORCID: 0000-0002-1260-7358.

УДК 621.314

О.К. КОЛЕБАНОВ, С.Р. СЕЛІВЕРСТОВА

Херсонська державна морська академія

## МОДЕЛЮВАННЯ СХЕМИ СУДНОВОЇ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЧНОЇ СИСТЕМИ НА СУДАХ З ЕЛЕКТРОРУХОМ

*На морських судах з системами електроруху, для зниження втрат потужності в суднових електроенергетичних системах при передачі електроенергії від суднової електростанції до гребного електродвигуна можна виключити трансформатори. Застосування трансформаторів в ланцюзі живлення гребного електродвигуна можливо уникнути в разі застосування багаторівневих інверторів. Безтрансформаторні електроенергетичні системи мають один суттєвий недолік. Якщо навантаження на гальванічно не зв'язані трифазні обмотки одного і того ж генератора будуть різними, то напруги на виході обмоток будуть відрізнятися, і система стабілізації не зможе забезпечити стабільність напруги на всіх обмотках генератора. Метою даної роботи є моделювання схеми електроенергетичної системи, в якій використовують головні генератори з однією багатофазною обмоткою на статорі. Дані генератори не створюють взаємні спотворення напруги і забезпечують стабільну напругу на лініях головного розподільного щита. Застосування в судновій електроенергетичній установці кожного головного генератора з однією багатофазною обмоткою на статорі з числом фаз більше трьох, фази якої з'єднані зіркою або трикутником, а також, використання лінії головного розподільного щита з тим же числом фаз, що і обмоток головних синхронних генераторів, дозволяє отримувати дві та більше системи гальванічно розв'язаних багатофазних напруг живлення, необхідних для роботи перетворювача частоти з багаторівневими інверторами. На основі схеми, в якій гребний електродвигун підключений безпосередньо від генераторних агрегатів, розроблена модель безтрансформаторної електроенергетичної системи та проведено комп'ютерне моделювання. В процесі моделювання оцінювалися якість напруги у невідповідальних споживачів і якість струму в обмотках гребних електродвигунів, живлення яких забезпечувалося від перетворювачів частоти на базі дво- та трирівневого автономного інвертора напруги. Показано, що схеми суднових електроенергетичних систем без трансформаторів відрізняються стабільними показниками.*

*Ключові слова: суднові електроенергетичні системи, трансформатор, синхронний генератор, інвертор, гребний електродвигун, обмотки статора, перетворювач частоти, багатофазна обмотка.*

O. K. KOLEBANOV, S. R. SELIVERSTOVA

Kherson State Marine Academy

## MODELING OF A SHIP POWER SYSTEM SCHEME ON ELECTRIC PROPULSION

*On ships with electric propulsion systems, transformers can be eliminated to reduce power losses in the ship's electric power systems when transmitting electricity from the ship's power plant to the propeller motor. The use of transformers in the propulsion motor power supply circuit can be avoided in the case of using multilevel inverters. Transformerless power systems have one major drawback. If the loads on the galvanically unconnected three-phase windings of the same generator are different, then the voltages at the output of the windings will differ, and the stabilization system will not be able to ensure the stability of the voltage on all windings of the generator. The purpose of this work is to simulate a circuit of an electric power system in which main generators are used with one polyphase winding on the stator. These generators do not create mutual voltage distortion and provide a stable voltage on the lines of the main switchboard. The use in a ship power plant of each main generator with one polyphase winding on the stator with more than three phases, the phases of which are connected by a star or delta, as well as the use of a line of the main switchboard with the same number of phases as the windings of the main synchronous generators, makes it possible to obtain two and more systems of galvanically isolated polyphase supply voltages necessary for the operation of the frequency converter with multilevel inverters. On the basis of the scheme, in which the propeller motor is connected directly from the generating sets, a model of a transformerless electric power system has been developed and computer simulation has been carried out. In the process of modeling, the quality of the voltage of irresponsible consumers and the quality of the current in the windings of propulsion electric motors, the power supply of which was provided from frequency converters based on a two- and three-level autonomous voltage inverter, were evaluated. It is shown that the diagrams of ship power systems without transformers are characterized by stable performance.*

*Key words: ship power systems, transformer, synchronous generator, inverter, propeller motor, stator windings, frequency converter, multiphase winding.*

А.К.КОЛЕБАНОВ, С.Р.СЕЛИВЕРСТОВА  
Херсонская государственная морская академия

## МОДЕЛИРОВАНИЕ СХЕМЫ СУДОВОЙ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА СУДАХ С ЭЛЕКТРОДВИЖЕНИЕМ

*На морских судах с системами электродвижения, для снижения потерь мощности в судовых электроэнергетических системах при передаче электроэнергии от судовой электростанции до гребного электродвигателя можно исключить трансформаторы. Применение трансформаторов в цепи питания гребного электродвигателя возможно избежать в случае применения многоуровневых инверторов. Безтрансформаторные электроэнергетические системы имеют один существенный недостаток. Если нагрузки на гальванически не связанные трёхфазные обмотки одного и того же генератора будут разными, то напряжения на выходе обмоток будут отличаться, и система стабилизации не сможет обеспечить стабильность напряжения на всех обмотках генератора. Целью данной работы является моделирование схемы электроэнергетической системы, в которой используют главные генераторы с одной многофазной обмоткой на статоре. Данные генераторы не создают взаимные искажения напряжения и обеспечивают стабильное напряжение на линиях главного распределительного щита. Применение в судовой электроэнергетической установке каждого главного генератора с одной многофазной обмоткой на статоре с числом фаз более трех, фазы которой соединены звездой или треугольником, а также использование линии главного распределительного щита с таким же числом фаз, что и обмоток главных синхронных генераторов, позволяет получать две и более системы гальванически развязанных многофазных напряжений питания, необходимых для работы преобразователя частоты с многоуровневыми инверторами. На основе схемы, в которой гребной электродвигатель подключен непосредственно от генераторных агрегатов, разработана модель безтрансформаторной электроэнергетической системы и проведено компьютерное моделирование. В процессе моделирования оценивались качество напряжения у неотвественных потребителей и качество тока в обмотках гребных электродвигателей, питание которых обеспечивалось от преобразователей частоты на базе двух- и трёхуровневого автономного инвертора напряжения. Показано, что схемы судовых электроэнергетических систем без трансформаторов отличаются стабильными показателями.*

*Ключевые слова: судовые электроэнергетические системы, трансформатор, синхронный генератор, инвертор, гребной электродвигатель, обмотки статора, преобразователь частоты, многофазная обмотка.*

### Постановка проблемы

В даний час системи електроруху знаходять широке застосування в суднобудуванні в провідних зарубіжних суднобудівельних фірмах. Це пов'язано з рядом переваг в порівнянні з традиційними пропульсивними комплексами, серед яких слід відзначити:

- підвищення надійності судової електроенергетичної установки і пропульсивного комплексу;
- поліпшення маневреності судна;
- підвищення коефіцієнта корисної дії електроенергетичної установки в різних режимах;
- зниження експлуатаційних витрат;
- зменшення термінів ремонтних робіт;
- зниження шкідливих викидів в атмосферу;
- можливість раціонального розміщення устаткування на судні.

Проблемою є зниження втрат потужності в електроенергетичній системі при передачі електроенергії від судової електростанції до гребних електродвигунів і стабільність напруги на обмотках генератора.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

На судах, що мають системи електроруху, основними споживачами електроенергії є гребні електричні установки. Решта судових споживачів



електроенергії може мати сумарну потужність значно меншу потужності гребної електричної установки. Для таких суден доцільно будувати електроенергетичну систему (ЕЕС) так, щоб скоротити число перетворень електроенергії при її передачі від генераторів до гребних електродвигунів. Забезпечити електроенергією решту суднових споживачів технічно простіше.

Для зниження втрат потужності в електроенергетичній системі при передачі електроенергії від суднової електростанції до гребних електродвигунів можна виключити трансформатори з ланцюга передачі електроенергії від генераторів до гребного двигуна. Один з варіантів безтрансформаторної суднової ЕЕС розглянутий в [1]. Автори вказують, що параметри ЕЕС можуть бути істотно підвищені за рахунок виключення із структури ЕЕС трансформаторів. В приведеній схемі електроенергія з виходу головного розподільного щита через фільтр поступає на вхід активного випрямляча, з виходу активного випрямляча через другий фільтр поступає на вхід інвертора, і з виходу інвертора подається на гребний електродвигун. Силовий трансформатор в цій схемі ЕЕС виключений. З роботи [1] – безтрансформаторна ЕЕС з головною енергетичною установкою (ГЕУ) володіє наступними перевагами: високий коефіцієнт корисної дії; високий коефіцієнт потужності; зниження маси; економія простору; зменшення вартості ГЕУ. Виключити трансформатори з ланцюга живлення гребного електродвигуна (ГЕД) без зниження якості напруги живлення ГЕД можна також за рахунок вживання у складі суднової електростанції багатofазних генераторів [2].

Обмотки статора розташовані на статорі так, щоб їх однойменні лінійні напруги були зміщені на 30 електричних градусів. Трифазні обмотки не зв'язані гальванічно, і кожна з них підключається до розподільних шин (ГРЩ). Синхронізація генераторів може проводитися по напругах однієї пари трифазних обмоток, оскільки напруги на іншій парі обмоток будуть також синхронізовані, так як їх зсув щодо напруги на обмотках дорівнює 30 електричних градусів і забезпечується конструкцією статорів. З шин ГРЩ трифазні напруги, зміщені на 30 електричних градусів, поступають на вхід випрямлячів, і на виході випрямлячів виробляється 12-пульсна випрямлена напруга. Випрямлена напруга поступає на входи інвертора, які виробляють змінну напругу для управління гребними асинхронними двигунами. В порівнянні з ЕЕС в цій схемі виключений трансформатор в ланцюзі передачі головного потоку електроенергії - від синхронних генераторів до гребних електродвигунів. В той же час на виході випрямляча забезпечується висока якість постійної напруги, завдяки розміщенню на статорах генераторів по дві трифазні обмотки і вживанню 12-пульсного випрямляча.

Останніми роками для живлення потужних гребних електродвигунів змінного струму на судах у складі перетворювачів частоти застосовуються багаторівневі інвертори, які забезпечують високу якість напруги живлення електродвигунів. Для живлення багаторівневих інверторів необхідно мати від двох до п'яти гальванічно незв'язаних джерел постійної напруги [4]. Для цього в перетворювачі частоти встановлюють випрямлячі, число яких дорівнює числу необхідних джерел постійної напруги, і для живлення кожного з цих випрямлячів потрібно мати гальванічно незв'язані джерела змінного струму. Доводиться з трифазної лінії ГРЩ подавати живлення на первинну обмотку трифазних трансформаторів, і з вторинних обмоток трансформаторів, число яких повинне дорівнювати числу випрямлячів, подавати живлення на кожен з випрямлячів перетворювачів частоти. Таким чином, при використанні багаторівневих інверторів в ланцюг передачі електроенергії від генераторів до гребних електродвигунів вводиться трансформатор великої потужності.

Тим часом, у разі використання багаторівневих інверторів застосування потужних трансформаторів в ланцюзі живлення ГЕД можна уникнути.

Безтрансформаторні ЕЕС мають один істотний недолік. Якщо навантаження на гальванічно не зв'язані трифазні обмотки одного і того ж генератора буде різним, то напруги на виході обмоток будуть відрізнятися, і система стабілізації напруги не зможе забезпечити стабільність напруги на всіх обмотках генератора.

Ідея застосування багатофазних синхронних генераторів реалізована також в [3]. В єдиній ЕЕС високовольтний синхронний генератор містить 45 ізольованих один від одного трифазних обмоток. Однофазні лінійні напруги, які мають аналогічні значення співпадають по фазі. Живлення гребельного електродвигуна здійснюється від перетворювача частоти, що складається з п'яти, сполучених послідовно, осередків для кожної фази.

В [5] приведена схема ЕЕС, в якій стабільність напруги на обмотках генераторів при різних навантаженнях на них забезпечується. В цій ЕЕС вал кожного первинного теплового двигуна сполучений одночасно з валами трьох синхронних генераторів. На статорі кожного генератора розташовується трифазна обмотка, напруга на якій стабілізується автономною системою стабілізації. Обмотки статорів генераторів, приєднаних до одного і того ж первинного двигуна, гальванічно не зв'язані, і обмотка статора кожного генератора підключається до однієї з трьох трифазних ліній головного розподільчого щита.

Вали трьох генераторів в кожній групі можуть бути сполучені так, щоб фази вихідної напруги генераторів співпадали або відрізнялися на певний кут. Нову структуру суднової ЕЕС запропонувала суднобудівельна фірма «Вяртсиля» [6], яку назвали LLC – Low Loss Concept. Відповідно до цієї концепції у складі електростанції використовуються низьковольтні генератори (690 В), а головний розподільчий щит має не одну лінію шин, до якої підключаються генераторні агрегати, а дві. Генераторні агрегати синхронізуються так, щоб напруги на двох лініях шин були зсунуті на 30°. На перетворювачі частоти, що живлять основних споживачів електроенергії, живлення поступає напряму від ліній головного розподільчого щита.

### **Мета дослідження**

Метою даного дослідження є розробка схеми ЕЕС, в якій використовуються головні генератори з однією багатофазною обмоткою на статорі, які не створюють взаємних спотворень вихідної напруги і, тим самим, забезпечують стабільну напругу на лініях головного розподільчого щита.

### **Викладення основного матеріалу дослідження**

У даній роботі запропонована схема ЕЕС, в якій використовуються головні генератори з однією багатофазною обмоткою на статорі. Виконання в судновій електроенергетичній установці кожного головного генератора з однією багатофазною обмоткою на статорі з числом фаз більше трьох, фази якої сполучені зіркою або трикутником, а також лінії головного розподільчого щита з таким же числом фаз, що і обмотки головних синхронних генераторів, дозволяє одержати дві і більш системи гальванічно розв'язаних багатофазних напруг живлення, необхідних для роботи перетворювача частоти з багаторівневими інверторами. При цьому, кожний синхронний генератор має власну автономну систему стабілізації напруги, тому на виході всіх багатофазних обмоток і на лініях головного розподільчого щита буде забезпечено однакову напругу, що дозволяє виключити зрівняльні струми у вторинних обмотках трансформаторів, підключених до однієї лінії живлення розподільчого щита решти судових споживачів. Крім того, обмотки різних синхронних генераторів практично не мають магнітного зв'язку і не створюють взаємних спотворень вихідної напруги.

Таким чином, в даній судновій електроенергетичній установці забезпечується стабільна напруга на лініях головного розподільного щита і виключаються зрівняльні струми у вторинних обмотках трансформаторів, а також виключається взаємне спотворення напруги через індуктивний зв'язок між обмотками унаслідок чого підвищується к.к.д. електроенергетичної установки. В типовій структурі, ГЕУ змінного струму одержує живлення від суднової електростанції судна змінного струму через погоджувальні трансформатори. Погоджувальні трансформатори необхідні для: узгодження рівня напруги суднової електростанції і ГЕУ; отримання двох систем ізольованих трифазних напруг, зсунутих один щодо одного на 30 електричних градусів; забезпечення електромагнітної сумісності ГЕУ із споживачами власних потреб. На рис. 1 представлена схема живлення одного ГЕД за типовою структурою.

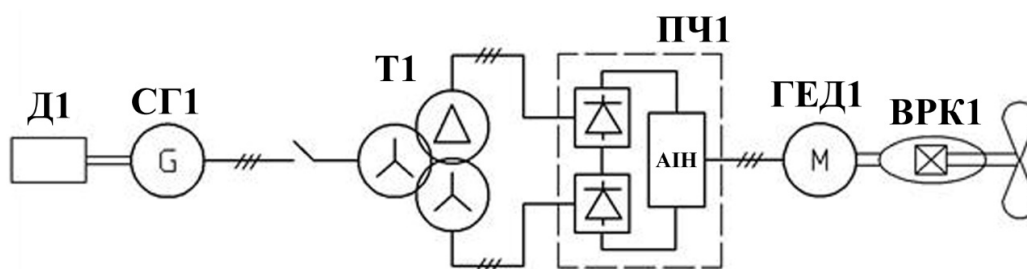


Рис. 1 – Схема живлення гребного трифазного асинхронного електродвигуна (ГЕД1)

Трифазний асинхронний електродвигун ГЕД1 (рис.1) одержує живлення від перетворювача частоти ПЧ1, що складається з дворівневого автономного інвертора напруги і двох трифазних некерованих випрямлячів. Живлення на ПЧ1 поступає від двох вторинних обмоток погоджувального трансформатора Т1. Первинна обмотка трансформатора Т1 через автоматичний вимикач підключається до дизель-генератора, що складається з дизельного двигуна Д1 і трифазного синхронного генератора СГ1. Одним з найважливіших показників ЕЕС є її к.к.д., від якого залежать, наприклад, об'єми споживаного палива і відповідно його витрати. Підвищення к.к.д. ЕЕС можливе як за рахунок виключення деяких вузлів, наприклад, погоджувального трансформатора, так і за рахунок підвищення к.к.д. складових частин ЕЕС, наприклад, гребного електродвигуна.

Гребний електродвигун, що входить в ЕЕС, живиться від перетворювача частоти ПЧ1, який формує напругу, відмінну від синусоїдальної форми, що створює в обмотках ГЕД1 високочастотні гармоніки струму. Наявність вищих гармонік струму в обмотках ГЕД1 створює додаткові втрати: на вихрові струми в магнітопроводі ГЕД; в обмотках ГЕД, викликані ефектом витіснення струму.

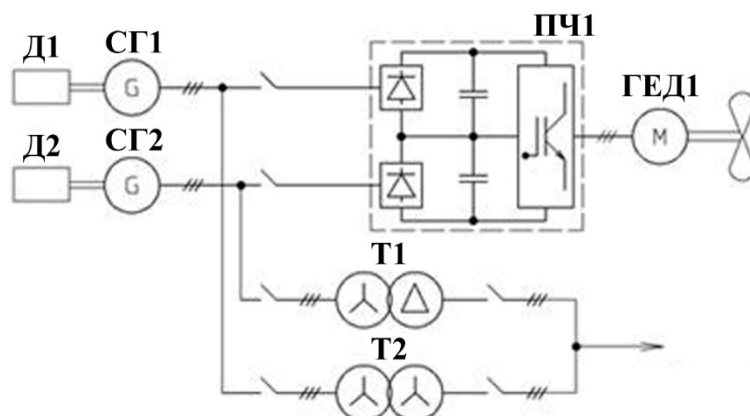


Рис. 2 – Схема безтрансформаторної електроенергетичної системи (ЕЕС)

На рис. 2 представлена схема ЕЕС, в якій гребний електродвигун живиться безпосередньо від генераторних агрегатів. Гребний електродвигун одержує живлення від перетворювача частоти на базі трирівневого автономного інвертора напруги (АІН). Два ізольовані джерела постійного струму, одержані шляхом вживання двох трифазних генераторних агрегатів. В даній СЕЕС споживачі власних потреб підключаються до вторинних обмоток трансформаторів Т1 і Т2. Первинні обмотки трансформаторів Т1 і Т2 підключаються до трифазних обмоток генераторів СГ1 і СГ2. Первинні обмотки обох трансформаторів сполучені зіркою, а вторинні – зіркою і трикутником. Таке з'єднання вторинних обмоток Т1 і Т2 забезпечує синхронізацію генераторів СГ1 і СГ2 з кутом в 30 електричних градусів. На основі схеми, в якій гребний електродвигун живиться безпосередньо від генераторних агрегатів (рис. 2), розроблена модель безтрансформаторної ЕЕС, яка представлена на рис. 3.

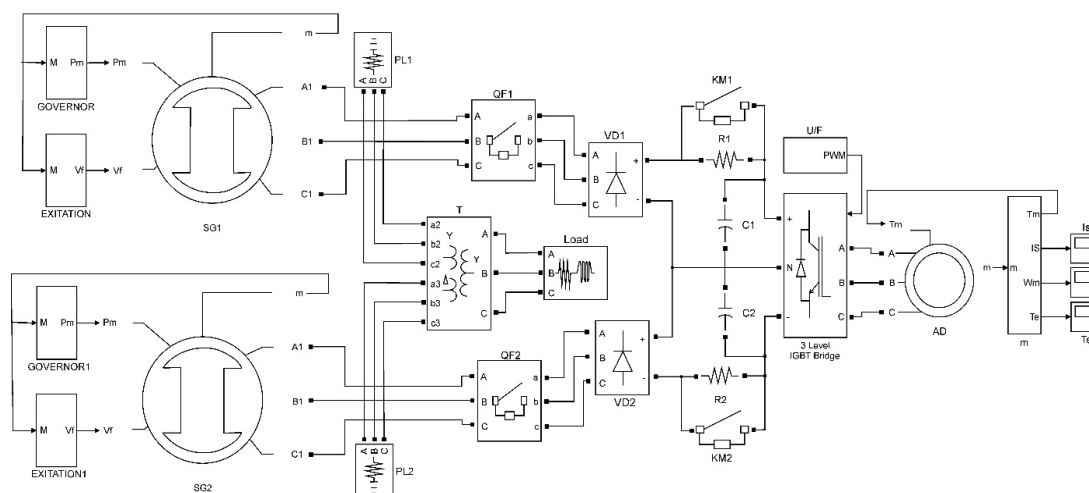


Рис. 3 – Модель безтрансформаторної електроенергетичної системи

### Результати моделювання

На рис. 4 представлений графік лінійної напруги на обмотці SG1. При цьому гребний електродвигун працює на номінальну потужність, і помітні значні спотворення напруги, що вносяться в суднову мережу трифазними випрямлячами, що входять до складу перетворювача частоти. Графік лінійної напруги на обмотці SG2 подібний.

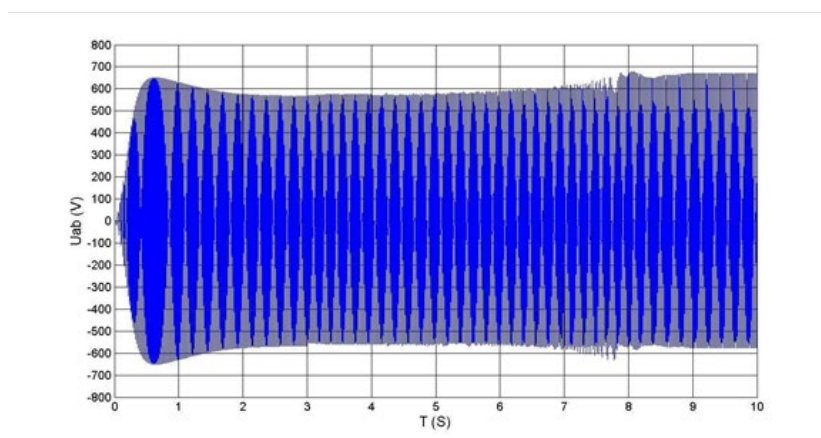


Рис. 4 – Графік лінійної напруги на генераторі SG1

На рис.5 представлений графік лінійного струму на обмотках статора генератора SG1.

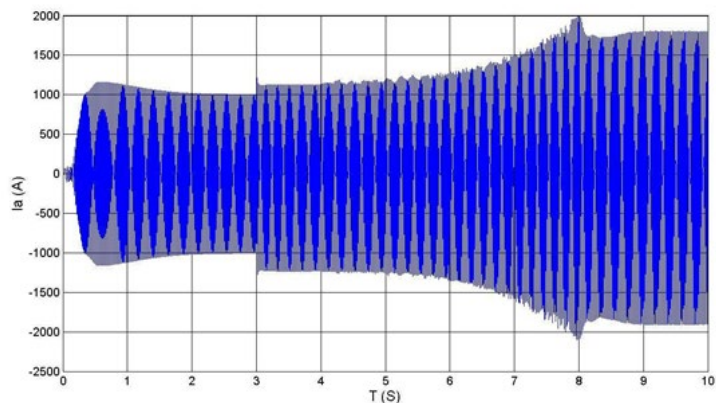


Рис. 5 – Графік лінійного струму на генераторі SG1

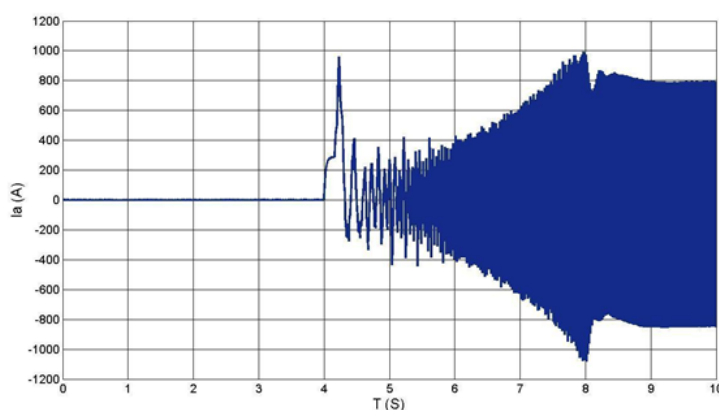


Рис. 6 – Струм фази гребного електродвигуна

На рис. 6 представлений графік фазного струму гребного електродвигуна. Видно, що коефіцієнт гармонік напруги складає ( $K_T = 3,30\%$ ), що менше ніж при роботі гребного електродвигуна від перетворювача частоти на базі дворівневого АІН. Таким чином, безтрансформаторна схема БЕС рис. 3 забезпечує високу якість струму ( $K_T = 3,30\%$ ), що протікає через обмотки гребного електродвигуна. А також, хорошу ( $K_T = 4,13\%$ ) якість напруги, що поступає до споживачів власних потреб. На рис. 7 зображений графік лінійної вихідної напруги трирівневого АІН, що входить до складу перетворювача частоти.

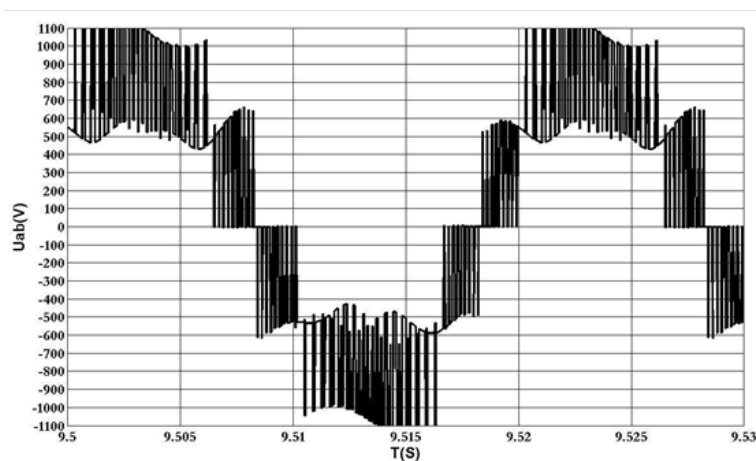


Рис. 7 – Лінійна напруга на виході трирівневого АІН

### Висновки

На основі розроблених моделей виконано комп'ютерне моделювання. В процесі моделювання оцінювалися якість напруги у споживачів власних потреб і якість струму в обмотках гребних електродвигунів, живлення яких проводилося від перетворювачів частоти на базі двох- і трирівневого автономного інвертора напруги. Показано, що безтрансформаторні схеми суднових електроенергетичних систем володіють хорошими показниками, в порівнянні з існуючими схемами суднових електроенергетичних систем.

### Список використаної літератури

1. L. Leclere, C. Galmiche Converteam. A Transformerless Full Redundant Electrical Propulsion Solution to Enhance Power Density, A Availability and Low Noise Signature. *IEEE ESTS 2011*. (Virginia April, 10 – 13, 2011). 2011. P. 296–299.
2. Рукавишников С.Б. Автоматизированные гребные электрические установки. Ленинград: Судостроение, 1983. 240 с.
3. Сержантов В.В., Спешилов В.С. Гребные электрические установки. Ленинград: Судостроение, 1970. 204 с.
4. Сергиенко Л.И., Устинов А.П., Драгомарецкий Г.Г. Электрооборудование морских судов. Москва: Транспорт, 1980. 328 с.
5. Акулов Ю.И. Гребные электрические установки. Москва: Транспорт, 1982. 264 с.
6. Wartsila LLC System Explained : веб-сайт. Wartsila: <https://cdn.wartsila.com/docs/default-source/product-files/ea/systems/presentation-o-ea-2015-low-loss-concept.pdf> (дата звернення: 12.05.2021).

### References

1. L. Leclere, & C. Galmiche Converteam. (2011) A Transformerless Full Redundant Electrical Propulsion Solution to Enhance Power Density, A Availability and Low Noise Signature. *IEEE ESTS 2011*, (April, 10 – 13, 2011, Virginia). pp. 296–299.
2. Rukavishnikov, S.B. (1983) *Avtomatizirovannyye grebnyie elektricheskyye ustanovki*. Leningrad: Sudostroenie.
3. Serzhantov, V.V., & Speshilov, V.S. (1970). *Grebnyie elektricheskyye ustanovki*. Leningrad: Sudostroenie.
4. Sergienko, L.I., Ustinov, A.P., & Dragomaretskiy, G.G. (1980). *Elektrooborudovanie morskikh sudov*. Moskva: Transport.
5. Akulov, Yu.I. (1982). *Grebnyie elektricheskyye ustanovki*. Moskva: Transport.
6. Wartsila LLC System Explained : veb-sajt. Wartsila: <https://cdn.wartsila.com/docs/default-source/product-files/ea/systems/presentation-o-ea-2015-low-loss-concept.pdf> (data zvernennyya: 12.05.2021).

Колебанов Олександр Костянтинович - к.т.н., доцент, доцент кафедри експлуатації суднового електрообладнання і засобів автоматики Херсонської державної морської академії, e-mail: kolebanovkak@gmail.com, ORCID: 0000-0002-9618-9105.

Селіверстова Світлана Ростиславівна - к.т.н., доцент, доцент кафедри експлуатації суднового електрообладнання і засобів автоматики Херсонської державної морської академії, e-mail: ussr28031972@gmail.com, ORCID: 0000-0003-1015-1593.

УДК 519.85

В.М. КОМЯК

Національний університет цивільного захисту України

К.Т. КЯЗИМОВ

Академія Міністерства по Надзвичайним ситуаціям Азербайджану

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ ГРУП ЛЮДЕЙ ПРИ ЕВАКУАЦІЇ З БУДІВЕЛЬ

*Задачі розкриття та упакування (C&P Problems) активно досліджуються науковою спільнотою протягом останніх років. Такий інтерес пояснюється як великою їх складністю з теоретичної точки зору, так і широким спектром їх застосування при розв'язанні актуальних практичних задач, наприклад, в інформатиці, логістиці, моделюванні виробничих процесів, забезпеченні безпечної життєдіяльності населення та ін.*

*Одним із найважливіших питань в забезпеченні безпечної життєдіяльності населення є своєчасна евакуація людей, що опинилися в небезпечній для життя ситуації. Для проведення оперативно-тактичних дій по евакуації і порятунку людей з будівель створюються пожежно-рятувальні підрозділи, які, як правило, формуються згідно типу надзвичайної ситуації, яка виникає в будівлі, тобто згідно їх професійної спрямованості. На допомогу пожежно-рятувальним підрозділам в даний час приходять програмні комплекси по керуваній евакуації з будівель, головним компонентом яких є програми моделювання руху людського потоку, які в кожний фіксований момент часу являють конфігурацію розміщення людей.*

*На практиці часто виникає задача моделювання руху людей групами, прикладами яких можуть слугувати члени сім'ї або рятувальники одного підрозділу, які рухаються з вантажем. Тому актуальною задачею є моделювання руху груп людей з урахуванням максимально-допустимих відстаней між членами груп, і типи, які евакуюються з вантажем.*

*У роботі запропонована модель тіла людини з вантажем, яка представляє собою двокомпонентний складний об'єкт, як об'єднання еліпса та прямокутника, між компонентами якого задані максимально-допустимі відстані. Врахування максимально-допустимих відстаней між об'єктами дозволяє об'єднувати їх в підгрупи, а задані максимальні відстані між підгрупами дозволяють об'єднувати їх в групи. Формалізовані перелічені обмеження на взаємодію об'єктів, побудована математична модель актуальної задачі моделювання руху людей з розбиттям їх на групи. Для аналітичного опису умов неперетинання об'єктів модифіковано квазі- $\rho$ -функції складених об'єктів, які є основою алгоритмів моделювання індивідуально-поточного руху людей.*

**Ключові слова:** моделювання руху, потік людей, модель горизонтальної проекції тіла людини, квазі- $\rho$ -функція, составні об'єкти.

В.М. КОМЯК

Національний університет гражданской защиты Украины

К.Т. КЯЗИМОВ

Академия Министерства по Чрезвычайным ситуациям Азербайджана

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГРУПП ЛЮДЕЙ ПРИ ЭВАКУАЦИИ ИЗ ЗДАНИЙ

*Задачи раскрития и упаковки (C & P Problems) активно исследуются научным сообществом на протяжении последних лет. Такой интерес объясняется как большой их сложностью с теоретической точки зрения, так и широким спектром их применения при решении актуальных практических задач, например, в информатике, логистике, моделировании производственных процессов, обеспечении безопасной жизнедеятельности населения и др.*

*Одним из важнейших вопросов в обеспечении безопасной жизнедеятельности населения является своевременная эвакуация людей, которые оказались в опасной для жизни ситуации. Для проведения оперативно-тактических действий по эвакуации и спасению людей из зданий создаются пожарно-спасательные подразделения, которые, как правило, формируются по типу чрезвычайных ситуаций, которая возникает в здании, то есть согласно их профессиональной направленности. На помощь пожарно-спасательным подразделениям в настоящее время приходят программные комплексы*

по управляемой эвакуации из зданий, главным компонентом которых являются программы моделирования движения людского потока, которые в каждый фиксированный момент времени представляют конфигурацию размещения людей.

На практике часто возникает задача моделирования движения людей группами, примерами которых могут служить члены семьи или спасатели одного подразделения, которые перемещаются с грузом. Поэтому актуальной задачей является моделирование движения групп людей с учетом максимально допустимых расстояний между членами групп и теми, которые эвакуируются с грузом.

В работе предложена модель тела человека с грузом, которая представляет собой двухкомпонентный сложный объект в виде объединения эллипса и прямоугольника, между компонентами которого заданы максимально допустимые расстояния. Учет максимально допустимых расстояний между объектами позволяет объединять их в подгруппы, а заданные максимальные расстояния между подгруппами позволяют объединять их в группы. Формализованы перечисленные ограничения на взаимодействие объектов, построена математическая модель актуальной задачи моделирования движения людей с разбивкой их на группы. Для аналитического описания условий непересечения объектов модифицированы квази- $\phi$ -функции составных объектов, которые являются основой алгоритмов моделирования индивидуально-поточного движения людей.

Ключевые слова: моделирование, движение, поток людей, модель горизонтальной проекции тела человек, квази- $\phi$ -функция, составные объекты.

V.M. KOMYAK

National University of Civil Protection of Ukraine

KT KYAZIMOV

Academy of the Ministry of Emergency Situations of Azerbaijan

## MATHEMATICAL MODELING OF THE MOTION OF GROUPS OF PEOPLE DURING EVACUATION FROM BUILDINGS

*The problems of cutting and packing (C & P Problems) have been actively studied by the scientific community over the past years. This interest is explained both by their great complexity from a theoretical point of view, and by a wide range of their application in solving urgent practical problems, for example, in informatics, logistics, modeling of production processes, ensuring the safe life of the population, etc.*

*One of the most important issues in ensuring the safe life of the population is the timely evacuation of people who find themselves in a life-threatening situation. To carry out operational and tactical actions to evacuate and rescue people from buildings, fire and rescue units are created, which, as a rule, are formed according to the type of emergency that has arisen in the building, that is, according to their professional orientation. At present, fire and rescue units are being helped by software systems for controlled evacuation from buildings, the main component of which are programs for simulating the movement of the human flow, which at each fixed moment of time represents the configuration of the placement of people.*

*In practice, the problem often arises of modeling the movement of people in groups, examples of which are family members or rescuers of one unit who move with a load. Therefore, an urgent task is to model the movement of groups of people, taking into account the maximum permissible distances between members of groups and who are evacuated with a load.*

*The paper proposes a model of a human body with a load, which is a two-component complex object in the form of a union of an ellipse and a rectangle, between which the maximum allowable distances are set. Taking into account the maximum allowable distances between objects allows you to combine them into subgroups, and the specified maximum distances between subgroups allows you to combine them into groups. The listed restrictions on the interaction of objects are formalized, a mathematical model of the actual problem of modeling the movement of people with their division into groups is built. For the analytical description of the conditions of non-intersection of objects, the apparatus of quasi- $\phi$ -functions of composite objects is modified, which are the basis of algorithms for modeling individual flow movement of people.*

*Keywords: simulation, movement, flow of people, human body plano model, quasi- $\phi$ -function, composite objects.*

### Постановка проблеми

Задачі розкрою та упакування (C&P Problems) активно досліджуються науковою спільнотою протягом останніх років. Такий інтерес пояснюється як великою їх



складністю з теоретичної точки зору, так і широким спектром їх застосування при розв'язанні актуальних практичних задач, наприклад, в інформатиці, логістиці, моделюванні виробничих процесів, забезпеченні безпечної життєдіяльності населення та ін. Кількість надзвичайних ситуацій (НС), яка, за статистикою, збільшується, призводить до великої кількості як матеріальних збитків, так і до людських жертв. Евакуація – часто єдиний спосіб порятунку людини, що опинилася в небезпечній для життя ситуації. Для проведення оперативно-тактичних дій по евакуації і порятунку людей з будівель створюються пожежно-рятувальні підрозділи, які, як правило, формуються згідно типу НС, яка виникає в будівлі, тобто згідно їх професійної спрямованості. На допомогу пожежно-рятувальним підрозділам в даний час приходять програмні комплекси по керуваній евакуації з будівель, головним компонентом яких є програми моделювання людського потоку, які адекватно відображають реальні процеси його руху. На практиці часто виникає задача моделювання руху людей групами, прикладами яких можуть слугувати члени сім'ї або рятувальники одного підрозділу, які рухаються з вантажем. Тому невирішеною частиною проблеми є актуальна задача моделювання руху груп людей з урахуванням максимально-допустимих відстаней між членами груп, і тими, які евакуюються з вантажем.

### **Аналіз останніх досягнень та публікацій**

Задача моделювання руху людей в кожний дискретний момент часу являє собою конфігурацію розміщення об'єктів [1]. Ці задачі можна охарактеризувати множиною обмежень розміщення та додатковими обмеженнями, серед яких можна визначити орієнтацію об'єктів, обмеження маневреності та комфортності руху тощо.

Як відомо, задачі розкרוу та упакування, в тому числі оптимізаційні задачі моделювання руху людей є NP-складними. Тому в переважній більшості досліджень, присвячених цим задачам, використовуються евристичні та статистичні методи, які дозволяють отримати наближені розв'язки [2]. На сьогодні відсутні моделі індивідуально-поточного руху людей, що адекватні реальному потоку [3]. Інтерес до моделі мотивується також, як необхідністю уваги до руху гетерогенних груп людей в потоці, так і неможливістю на теперішній час побудови адекватних математичних моделей на базі аналітичного опису умов неперетинання між людьми або їх групами.

У розглянутій в даній статті прикладній проблемі об'єктом розміщення (переміщення) є людина. У роботах [2, 4] показано, що при вільній категорії руху найбільш адекватною моделлю проекції людського тіла на горизонтальну площину є еліпс. У статті [5] наводиться досить повний огляд зарубіжної літератури, присвячений задачам розміщення еліпсів. Задача оптимального розміщення еліпсів, що допускають неперервні обертання, розглянута в [6, 7]. Для аналітичного опису основних обмежень розміщення використовуються псевдонормалізовані квазі- $\phi$ -функції [8, 9]. У роботі [4] пропонується аналітичний опис відносин між еліпсами (неперетинання і розташування на мінімально допустимій відстані) з використанням запропонованої в цій роботі квазі- $\phi$ -функції. Для моделювання руху груп людей необхідно враховувати ще максимально-допустимі відстані між членами кожної з груп. Основи для аналітичного опису умов неперетинання об'єктів з урахуванням максимально-допустимих відстаней заложені в теорії геометричного проектування [10].

При моделюванні руху гетерогенних потоків людей, які евакуюються з вантажем, їх горизонтальна проекція ("просторова" форма) має більш складну форму, ніж еліпс. Тому для розв'язання задач моделювання руху груп людей з вантажем (їх розміщення в кожний дискретний момент часу) необхідна побудова моделей та методів моделювання гетерогенних потоків на базі математичного апарату опису умов

неперетинання об'єктів довільної просторової форми з урахуванням максимально-допустимих відстаней між членами груп.

У роботі модифіковано квазі- $\phi$ -функції та отримано аналітичний опис умов неперетинання для складних об'єктів (що є об'єднанням еліпсів та прямокутників) з урахуванням максимально-допустимих відстаней між ними. Застосування математичного апарату квазі- $\phi$ -функцій дозволило формалізувати взаємодію об'єктів (торкання, неперетинання, перетинання) для більш широкого класу просторових форм, що дало можливість побудувати математичну модель моделювання руху людей, що рухаються групами з вантажем.

### Мета дослідження

Метою роботи є розробка математичної моделі моделювання груп людей з вантажем. Для досягнення мети були поставлені такі завдання:

– побудувати адекватну для задач евакуації математичну модель тіла людини з вантажем, отримати аналітичні вирази умов їх неперетинання з урахуванням максимально-допустимих відстаней між ними;

– побудувати математичну модель переміщення людей з вантажем (об'єктів складної просторової форми) згідно заданим обмеженням на ділянці горизонтального шляху.

### Викладення основного матеріалу дослідження

#### 4. Постановка задачі і її розв'язування.

**4.1. Побудова адекватної для задач евакуації математичної моделі тіла людини з вантажем (рятувальника з людиною), аналітичні вирази умов їх неперетинання.**

Математичний апарат взаємодії геометричних об'єктів є основою методів моделювання розміщення за заданими обмеженнями, моделювання руху потоку людей.

У зв'язку з вищесказаним, виникає необхідність в побудові квазі- $\phi$ -функцій для більш широкого класу об'єктів, зокрема:

- прямокутників;
- прямокутника та еліпса;
- об'єкта, складеного із еліпса та прямокутника, з прямокутником;
- об'єкта, складеного із еліпса та прямокутника, з еліпсом.

Представимо проекцію тіла людини в задачі моделювання руху людини у вигляді об'єкта  $S_i$ . Кожному об'єкту  $S_i$  зіставлені параметри розміщення  $u_i = (v_i, \theta_i)$ , де –  $v_i = (x_i, y_i)$  - вектор трансляції об'єкта  $S_i$  відносно нерухомої системи координат, а  $\theta_i$  - кут його повороту. Позначимо через  $S_i(u_i)$  об'єкт  $S_i = S_i(0)$ , який повернений на кут  $\theta_i$  і трансльований на вектор  $v_i$ . При цьому довільна точка  $p = p(0)$  об'єкта відображається в точку  $p(v) = v + M(\theta_i)p^T(0)$ , де  $M(\theta_i)$  – матриця оператора повороту простору на кут  $\theta_i$ .

Розглянемо наступні відношення між об'єктами  $S_i(u_i)$  та  $S_j(u_j)$ :

- перетинання:  $\text{int } S_i(u_i) \cap \text{int } S_j(u_j) \neq \emptyset$ ,
  - торкання:  $\text{int } S_i(u_i) \cap \text{int } S_j(u_j) = \emptyset$  та  $\text{fr } S_i(u_i) \cap \text{fr } S_j(u_j) \neq \emptyset$ ,
  - неперетинання  $S_i(u_i) \cap S_j(u_j) = \emptyset$ ,
- де  $\text{int}(\bullet)$  - топологічна внутрішність,  $\text{fr}(\bullet)$  - границя множини  $(\bullet)$ .

Умови неперетинання двох об'єктів  $S_i(u_i)$  та  $S_j(u_j)$ , де у якості цих об'єктів будемо розглядати перелічені вище класи об'єктів, побудуємо, використовуючи поняття їх квазі-phi-функції [11].

**Визначення1.** Квазі-phi-функцією  $\Phi^{S_i S_j}(u_i, u_j, u')$  для об'єктів  $S_i(u_i)$  та  $S_j(u_j)$  називається всюди визначена неперервна по усім змінним функція, для якої функція  $\max_{u' \in U \subset R^m} \Phi^{S_i S_j}(u_i, u_j, u')$  є phi-функцією об'єктів  $S_i(u_i)$  та  $S_j(u_j)$  [11]. Тут  $u'$  - вектор допоміжних змінних, які належать деякій підмножині  $U$  простору  $R^m$  [11].

Важлива характеристика квазі-phi-функції: якщо для деякого  $u'$  виконується  $\Phi^{S_i S_j}(u_i, u_j, u') \geq 0$ , то  $\text{int } S_i(u_i) \cap \text{int } S_j(u_j) = \emptyset$  [11].

**Квазі-phi-функція для двох прямокутників.**

Нехай  $T_i(u_i)$  та  $T_j(u_j)$  – два прямокутники, які задані вершинами  $p_{ij}^i (ij = 1, 2, 3, 4)$  та  $p_{ij}^j (i = 1, 2, 3, 4)$  відповідно з параметрами розміщення  $u_i(x_i, y_i, \theta_i)$ ,  $u_j(x_j, y_j, \theta_j)$ . Нехай  $P(u') = \{(x, y) : f(x', y') = \cos \phi' x + \sin \phi' y + \gamma' \geq 0 - \text{півплощина.}$

Нехай  $\Phi^{T_i P}(u_i, u') = \min_{ij=1,2,3,4} f(p_{ij}^{i(\prime)})$  – нормалізована phi-функція для об'єктів  $T_i(u_i)$  та  $P$ , а  $\Phi^{T_j P^*}(u_j, u') = \min_{ij=1,2,3,4} (-f(p_{ij}^{j(\prime)}))$  – нормалізована phi-функція для об'єктів  $T_j(u_j)$  та  $P^*(u') = R^2 \setminus P(u')$ , тоді функція

$$\Phi^{T_i T_j}(u_i, u_j, u') = \min \{ \Phi^{T_i P}(u_i, u'), \Phi^{T_j P^*}(u_j, u') \} \tag{1}$$

є квазі-phi-функцією для прямокутників  $T_i(u_i)$  та  $T_j(u_j)$  [12],  $u' = (\phi', \gamma')$ .

**Квазі-phi-функція для двох еліпсів.**

Нехай  $E_i(u_i)$  та  $E_j(u_j)$  – еліпси з піввісями  $a_i, b_i$  та  $a_j, b_j$  відповідно. Позначимо через  $E_i(u_i)$  об'єкт  $E_i = E_i(0)$ , який повернений на кут  $\theta_i$  і трансльований на вектор  $v_i$ . При цьому довільна точка  $p = p(0)$  об'єкта відображається в точку  $p(v) = v + M(j)p^T(0)$ , де  $M(j)$  – матриця оператора повороту простору на кут  $\theta_i$ . Параметр  $t_i$  визначає точку  $v_i = (x_i, y_i) = (\lambda a_i \cos t_i + \lambda b_i \sin t_i)$  на границі  $E_i$ ,  $0 \leq t_i \leq 2\pi, i = 1, 2$ .

Прийmemo  $u' = (\phi', \gamma', t_1, t_2)$ , тоді квазі-phi-функцією для еліпсів  $E_i(u_i)$  та  $E_j(u_j)$  буде мати вигляд:

$$\Phi^{E_i E_j}(u_i, u_j, u') = \min \{ \Phi^{E_i P}(u_i, u'_1), \Phi^{E_j P^*}(u_j, u'_2) \}, \tag{2}$$

де  $\Phi^{E_i P}(u_i, u'_1)$  є **нормалізованою** квазі-phi-функцією для еліпса  $E_i(u_i)$  та півплощини  $P$  [12],  $u'_1 = (t_1, \phi', \gamma')$ ,  $u'_2 = (t_2, \phi', \gamma')$ .

**Квазі-phi-функція для еліпса та прямокутника.**

Нехай  $E_i(u_i)$  - еліпс з піввісями  $a_i$  та  $b_i$ ,  $T_j(u_j)$  – прямокутник, який задано вершинами  $p_{ij}^j$  ( $ij = 1, 2, 3, 4$ ) відповідно з параметрами розміщення  $u_i, u_j$ . Згідно (1) та (2) квазі-phi-функція для еліпса  $E_i(u_i)$  та прямокутника  $T_j(u_j)$  буде мати вигляд:

$$\Phi^{E_i T_j}(u_i, u_j, u') = \min\{\Phi^{E_i P}(u_i, u'_1), \Phi^{T_j P^*}(u_j, u'_2)\}, \tag{3}$$

де  $u'_1 = (t_1, \phi', \gamma')$ ,  $u'_2 = (\phi', \gamma')$ .

**Квазі-phi-функція для складених об'єктів.**

Нехай  $P(u_{ij}) = \{(x, y) : \mu_{ij}(x, y) = \cos \phi_{ij} x + \sin \phi_{ij} y + \gamma_{ij} \geq 0\}$  – напівплощина зі змінними параметрами розміщення  $(\phi_{ij}, \gamma_{ij})$ . Як відомо [13], для двох складених

об'єктів  $H_i(u_i) = \bigcup_{r=1}^{n_i} H_r(u_i)$  і  $H_j(u_j) = \bigcup_{m=1}^{n_j} H_m(u_j)$  квазі-phi-функція  $\Phi^{H_i H_j}(u_i, u_j, u'_{ij})$  може бути виписана в вигляді

$$\Phi^{H_i H_j}(u_i, u_j, \phi_{ij}, \gamma_{ij}) = \min\{\Phi^{H_i P_{ij}}(u_i, \phi_{ij}, \gamma_{ij}), \Phi^{H_j P_{ij}^*}(u_j, \phi_{ij}, \gamma_{ij})\}, \tag{4}$$

де  $\Phi^{H_i P_{ij}}(u_i, \phi_{ij}, \gamma_{ij})$  – phi-функція для  $H_i(u_i) = \bigcup_{r=1}^{n_i} H_r(u_i)$  і напівплощини  $P(u_{ij})$ ,

$\Phi^{H_j P_{ij}^*}(u_j, \phi_{ij}, \gamma_{ij})$  – phi-функція для  $H_j(u_j) = \bigcup_{m=1}^{n_j} H_m(u_j)$  і напівплощини  $P^*(u_{ij})$ ,

$u'_{ij} = (\phi_{ij}, \gamma_{ij})$  – вектор допоміжних змінних.

Слід відмітити, що квазі-phi-функція  $\Phi^{H_i H_j}(u_i, u_j, \phi_{ij}, \gamma_{ij}) - 0,5\rho_{ij}$  є псевдонормалізованою квазі-phi-функцією для  $H_i(u_i) = \bigcup_{r=1}^{n_i} H_r(u_i)$  і

$H_j(u_j) = \bigcup_{m=1}^{n_j} H_m(u_j)$ . Це означає, що якщо  $\rho_{ij} > 0$  і є відстанню між  $H_i(u_i)$  і  $H_j(u_j)$

та визначається, як мінімальна евклідова відстань, тоді нерівність  $\Phi_+^{H_i H_j}(u_i, u_j, \phi_{ij}, \gamma_{ij}) = \Phi^{H_i H_j}(u_i, u_j, \phi_{ij}, \gamma_{ij}) - 0,5\rho_{ij} \geq 0$  означає, що  $dist(H_i(u_i), H_j(u_j)) \leq \rho_{ij}$ .

Таким чином, розширення просторих форм об'єктів в аналітичному описі умов взаємодії об'єктів дозволяє розширити коло практичних задач, що розв'язується. Зокрема, при моделюванні руху людей з'явилася можливість моделювати переміщення людини (еліпса) з вантажем (прямокутником), людини з допоміжними засобами переміщення тощо.

**4. 2. Математична модель переміщення людей з вантажем (об'єктів складної просторової форми) згідно заданим обмеженням на ділянці горизонтального шляху.**

Нехай в області евакуації  $\Omega_m$  на  $k$ -ій ітерації знаходиться  $N_k$  людей з параметрами розміщення  $u_i = (x_i, y_i, \theta_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_k$ , де  $(x_i, y_i)$  – координати розміщення початку локальної системи координат (поточної точки), а  $\theta_i$  – кут повороту  $i$ -го складного об'єкта  $H_i$ , який є моделлю  $i$ -ої людини. У якості такої моделі розглядається або еліпс, або еліпс з прямокутником. Для кожної поточної точки з координатами  $g_i(x_i, y_i)$  визначається вектор швидкості  $\vec{v}_i(x_i, y_i)$ . Розглянемо також випадок, коли в моделі враховується маневреність кожної людини, тобто можливість відхилитися від основного напрямку руху. Таким чином, об'єкту  $H_i$  приписані характеристики швидкості  $\left| \vec{v}_i \right|$  (в метрах в секунду) і маневреності  $m_i, |m_i| < 1$  (в метрах). При моделюванні індивідуально-потокового руху розглядається переміщення двох основних видів об'єктів: підгруп людей  $S_g, g = 1, 2, \dots, n_S$  (прикладом підгрупи може служити сім'я або працівники одного підрозділу); груп  $G_l, l = 1, 2, \dots, n_G$ , що складаються з підгруп (наприклад, кілька знайомих сімейних пар або декілька підрозділів рятівників). Нехай задана максимальна відстань, на яку можуть віддалятися члени підгруп один від одного та підгрупи одна від одної.

Нехай кількість людей в  $g$ -тій підгрупі  $S_g$  складає  $n_g$  (можливий випадок, коли  $n_g = 1$ ), позначимо  $\sum_{g=1}^{n_S} n_g = N_S$ , максимальна відстань між людьми  $g$ -тої підгрупи складає  $\rho_g$ . Кожна підгрупа утворює складений об'єкт  $S_g = \bigcup_{r=1}^{n_g} H_r$ , умови неперетинання між об'єктами цієї підгрупи можна записати за допомогою нормалізованих квазі- $\phi$ -функцій:

$$\Phi_+^{H_i, H_j}(u_i, u_j, \phi_{ij}, \gamma_{ij}) = \Phi^{H_i, H_j}(u_i, u_j, \phi_{ij}, \gamma_{ij}) - 0,5\rho_g \geq 0, \quad i > j, (i, j) \in \sum_g \times \sum_g, g \in I_{n_S}. \quad (5)$$

Розглянемо групи  $G_l, l = 1, 2, \dots, n_G$ . Нехай кількість підгруп в  $G_l$  групі складає  $n_l$  (можливо випадок  $n_l = 1$ ). Позначимо через  $\sum_{l=1}^{n_G} n_l = n_S$  кількість підгруп,  $N_G$  – загальну кількість людей в  $n_G$  групах, а максимальну відстань між підгрупами позначимо через  $\rho_l$ . Кожна група – складений об'єкт  $G_l = \bigcup_{g=1}^{n_l} S_g = \bigcup_{g=1}^{n_l} \left( \bigcup_{i=1}^{n_g} H_i \right)$ , умову неперетинання між об'єктами (підгрупами) з дотриманням максимально допустимих відстаней можна записати за допомогою нормалізованих квазі- $\phi$ -функцій:

$$\begin{aligned} \Phi'_+{}^{S_g S_q}(u_g, u_q, \phi_{gq}, \gamma_{gq}) &= \Phi'_+{}^{S_g S_q}(u_g, u_q, \phi_{gq}, \gamma_{gq}) - 0,5\rho_l \geq 0, \\ g > q \in I_{n_S}, \quad u_g &= (u_1, \dots, u_i, \dots, u_{n_g}), \quad u_q = (u_1, \dots, u_j, \dots, u_{n_q}). \end{aligned} \quad (6)$$

Підгрупи  $S_g, g > q \in I_{n_S}$  (об'єкти  $H_i, i = 1, 2, \dots, N_k$ ) повинні належати області  $\Omega_m$ , тобто повинні виконуватись умови

$$\Phi^{S_g \Omega_m^*}(u_i) \geq 0_i, \quad g > q \in I_{n_S}, \quad \Omega_m^* = R^2 \setminus \Omega_m. \quad (7)$$

Ступінь зв'язності людей в підгрупах і підгруп між собою визначається попарно заданими коефіцієнтами. При цьому рівність відповідного коефіцієнта 1 означає практично нерозривний зв'язок (наприклад, мати і дитина), рівність 0 означає відсутність зв'язку.

Тоді математична модель підзадачі на  $k$ -ій ітерації може бути сформульована у вигляді пошуку максимуму сукупного переміщення людей, які знаходяться в області евакуації [4], для яких зберігаються максимально-допустимі відстані між ними та підгрупами людей, технологічні обмеження маневреності руху, тобто:

$$F(u^*) = \max_{u \in W_k \subset R^n} F(u), \quad (8)$$

$$W_k = \{u \in R^n : \gamma_{ij} \geq 0; \gamma_{gq} \geq 0; \gamma_i \geq 0; T_i \geq 0; i > j, (i, j) \in \Sigma_g \times \Sigma_g, g > q \in I_{n_S}\}, \quad (9)$$

де

$$u = (\Delta t_1, z_1, x_1, y_1, \theta_1, \dots, \Delta t_i, z_i, x_i, y_i, \theta_i, \dots, \Delta t_{N_k}, z_{N_k}, x_{N_k}, y_{N_k}, \theta_{N_k}, \phi_{12}, \gamma_{12}, \dots,$$

$$\phi_{(N_k-1)N_k}, \gamma_{(N_k-1)N_k}), \quad I_{n_S} \subset I_{N_k},$$

$$n = 5N_k + (N_k - 1)N_k, \quad F(u) = \Delta t \sum_{i=1}^{N_k} \Delta t_i \left| \begin{matrix} \rightarrow \\ v \ i \end{matrix} \right|,$$

$\gamma_{ij} \geq 0$  – умови неперетинання об'єктів в підгрупах:

$$B_i B_j \Phi'_+{}^{H_i H_j}(u_i, u_j, \phi_{ij}, \gamma_{ij}) \geq 0, \quad i > j, (i, j) \in \Sigma_g \times \Sigma_g, \quad g \in I_{n_S},$$

$\gamma_{gq} \geq 0$  – умови неперетинання підгруп:

$$B_g B_q \Phi'_+{}^{S_g S_q}(u_g, u_q, \phi_{gq}, \gamma_{gq}) \geq 0, \quad g > q \in I_{n_S},$$

$T_i \geq 0$  – технологічні обмеження:

$$\begin{cases} 0 \leq \Delta t_i \leq 1, \\ -m_i \leq z_i \leq m_i, i \in I_{N_k}, \end{cases}$$

$\Omega_m^* = R^2 \setminus \Omega_m$ ,  $B'_i \in \{0,1\}$ ,  $\Delta t_i$  – відносний крок в часі руху  $i$ -ої людини на  $k$ -тій ітерації, коефіцієнт  $B'_i = 1$ , якщо об'єкт  $H_i$  належить області  $\Omega_m$ ,  $B_i = 1$ ,  $B_j = 1$ ,  $i > j$ ,  $(i, j) \in \sum_g \times \sum_g$ ,  $g \in I_{n_S}$ ,  $(B_g = 1, B_q = 1, g > q \in I_{n_S})$ , якщо відповідні об'єкти належать підгрупам (групам). Коефіцієнти дорівнюють нулю в протилежному випадку.

Задача умовної оптимізації (8)–(9) є  $NP$ -складною задачею нелінійного програмування. Область допустимих розв'язків  $W_k$  має складну структуру: це, взагалі кажучи, незв'язна множина, кожна компонента зв'язності якої є багатозв'язною.

### Висновки

У роботі отримані аналітичні вирази умов неперетинання складених об'єктів з урахуванням максимально-допустимих відстаней між ними, що є основою для побудови математичної моделі моделювання руху людей з вантажем.

Побудована математична модель переміщення груп людей з вантажем згідно заданим обмеженням: неперетинання людей та їх розміщення в зоні евакуації, умовам маневреності руху. Властивості моделі є основою для побудови методів, алгоритмів та програм моделювання руху груп людей на горизонтальному шляху за переліченими обмеженнями.

### Список використаної літератури

1. Stoyan Y.G., Yakovlev S.V. Configuration space of geometric objects. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. V. 54, No 5. P. 716–726.
2. Холщевников В.В., Самошин Д.А. Эвакуация и поведение людей на пожарах. М.: Академия ГПС МЧС России, 2009. 210с.
3. Холщевников В.В. Сопоставление различных моделей движения людских потоков и результатов программно-вычислительных комплексов. *Пожаровзрывобезопасность*. 2015. Т. 24, №5. С. 68–74.
4. Komyak Va., Komyak Vl., Danilin A.A. Study of ellipse packing in the high-dimensionality problems. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2017. V. 1/4 (85). P. 17–23.
5. Kallrath J., Rebennack S. Cutting Ellipses from Area-Minimizing Rectangles. *Journal of Global Optimization*. 2013. V.59 (2–3). P. 405–437. Doi: 10.1007 / s10898-013-0125-3.
6. Pankratov A.V., Romanova T.E., Subota I.A. Optimal packing of ellipses with allowance for allowable distances. *Journal of calculus mathematics*. 2014. V.1. P. 27–42.
7. Stoyan Yu., Pankratov A., Romanova T. Quasi-phi-functions and optimal packing of ellipses. *Journal of Global Optimization*. 2016, № 65. С. 283-307. Doi: 10.1007/s10898-015-0331-2.
8. Stoyan Y., Romanova T., Pankratov A., Chugay A. Optimized object packings using quasi-phi-functions. *Springer Optimization and Its Applications*. 2015. V. 105. P. 265–293.
9. Pankratov A. V., Romanova T. E., Chugay A. M. Optimal packing of convex polytopes using quasi-phi-functions. *Проблемы машиностроения*. Харків, 2015. Т. 18, № 2. С. 55–65.
10. Яковлев С.В., Гиль Н.И., Комяк В.М. и др. Элементы теории геометрического проектирования / Под ред. В.Л. Рвачева. К.: Наук. думка, 1995. 241с.
11. Панкратов А.В. Информационная система решения оптимизационной задачи размещения произвольных неориентированных 2D объектов. *Системы обробки інформації*. Харків: ХУПС, 2013. Т. 1(108). С.82–86.

12. Гиль Н.И., Суббота И.А. Квази- $\phi$ -функция для сегментов эллипсов. *Системы обработки информации*. 2014, Т. 8 (124). С. 79–82.
13. Стоян Ю.Г., Романова Т.Е., Чернов Н.И., Панкратов А.В. Полный класс  $F$ -функций для базовых объектов. *Доповіди НАН України*. 2010. № 12. С. 25–30.

#### References

1. Stoyan, Y.G. & Yakovlev, S.V. (2018). Configuration space of geometric objects. *Cybernetics and Systems Analysis*. **54**, 5, 716–726.
2. Holschevnikov, V.V. & Samoshin, D.A. (2009). Evakuatsiya i povedenie lyudey na pozharah. M.: Akademiya GPS MChS Rossii.
3. Holschevnikov, V.V. (2015). Sopostavlenie razlichnykh modeley dvizheniya lyudskikh potokov i rezultatov programmno-vyichislitelnykh kompleksov. *Pozharovzryivo-bezopasnost*. **24**, 5, 68–74.
4. Komyak, Va., Komyak, Vl. & Danilin, A.A. (2017). Study of ellipse packing in the high-dimensionality problems. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. **1 / 4**, (85), 17–23.
5. Kallrath, J. & Rebennack, S. (2013). Cutting Ellipses from Area-Minimizing Rectangles. *Journal of Global Optimization*. **59** (2–3), 405–437. Doi: 10.1007 / s10898-013-0125-3.
6. Pankratov, A.V., Romanova, T.E. & Subota, I.A. (2014). Optimal packing of ellipses with allowance for allowable distances. *Journal of calculus mathematics*. **1**, 27–42.
7. Stoyan, Yu., Pankratov, A. & Romanova, T. (2016). Quasi- $\phi$ -functions and optimal packing of ellipses. *Journal of Global Optimization*. **65**, 283–307. Doi: 10.1007/s10898-015-0331
8. Stoyan, Y., Romanova, T., Pankratov, A. & Chugay, A. (2015). Optimized object packings using quasi- $\phi$ -functions. *Springer Optimization and Its Applications*. **105**, 265–293.
9. Pankratov, A. V., Romanova, T. E. & Chugay, A. M. (2015). Optimal packing of convex polytopes using quasi- $\phi$ -functions. *Problemy mashinostroeniya*. **18**, 2, 55–65.
10. Yakovlev, S.V., Gil, N.I., Komyak, V.M. & dr. (1995). Elementyi teorii geometricheskogo proektirovaniya / Pod red. V.L. Rvacheva. K.: Nauk. dumka.
11. Pankratov, A.V. (2013). Informatsionnaya sistema resheniya optimizatsionnoy zadachi razmescheniya proizvolnykh neorientirovannykh 2D ob'ektov. *Systemy obrobky informatsii*. **1** (108), 82–86.
12. Gil, N.I. & Subbota, I.A. (2014). Kvazi- $\phi$ -funktsiya dlya segmentov ellipsov. *Systemy obrobky informatsii*. **8** (124), 79–82.
13. Stoyan, Yu.G, Romanova, T.E., Chernov, N.I. & Pankratov, A.V. (2010) Polnyi klass  $F$ -funktsiy dlya bazovyykh ob'ektov. *Dopovidi NAN Ukrainy*. **12**, 25–30.

Кязімов Кязім Тахірогли – к.т.н., начальник кафедры Академії Міністерства по Надзвичайним ситуаціям Азербайджана. E-mail: kazim.kazimov@fhn.gov.az..ORSID: 0000-0003-0790-9770

Комяк Валентина Михайлівна – д.т.н., професор кафедри фізико-математичних дисциплін Національного університету цивільного захисту України. E-mail: vkomyak@ukr.net. ORSID: 0000-0002-9840-2635



УДК 621.384.6

А.С. МАЗМАНИШВИЛІ, Н.Г. РЕШЕТНЯК  
 Национальный Научный Центр “Харьковский физико-технический институт”

## МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ И ПОВОРОТНЫХ ТРАЕКТОРИЙ ЭЛЕКТРОНОВ В ГРАДИЕНТНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ МАГНЕТРОННОЙ ПУШКИ

*Рассмотрено движение электронов в цилиндрическом магнитном поле с переменной напряженностью вдоль оси поля. Используются математические и численные модели преобразования опытных данных аналитическими функциями. С целью получения прецизионных характеристик изучено формирование пучка с энергией 55 кэВ в продольном и радиальном направлениях при его транспортировке в магнитном поле соленоида. Показано, что движению электронов можно сопоставить оптическую модель прохождения световых лучей в среде с градиентным коэффициентом, зависящим от радиуса. Построено программное средство, использование которого дало возможность промоделировать основные зависимости движения электронного пучка в заданном соленоидальном магнитном поле. Представлены результаты численного моделирования траекторий электронов в градиентном магнитном поле магнетронной пушки с вторичноэмиссионным катодом. Рассмотрено формирование пучка с энергией 55 кэВ в радиальном и продольном направлениях при его транспортировке в соленоидальном магнитном поле с большим градиентом. Получены режимы работы пушки, при которых частица испытывает эффект "бутылочного горлышка" и завершает свое движение возвращением в прикатодную область. Таким образом, получены бифуркационные режимы динамики частиц при их движении вдоль оси транспортировки как вперед на мишень, так и назад в прикатодную область. Изучено влияние начальных условий при эмиссии на возникновение возвратного эффекта. Показано, что при заданной энергии электрона и фиксированном магнитном поле параметром, определяющим отражение частицы, является полярный угол влета относительно оси цилиндрического магнитного поля. Исследована зависимость формирования итогового распределения частиц от амплитуды и градиента магнитного поля вдоль оси системы. Приводятся результаты численного моделирования по движению трубчатого электронного потока. Изучена возможность управления продольной координатой точки возврата электрона. На основе модели движения электронного потока рассмотрены характеристики результирующего электронного пучка.*

*Ключевые слова:* электронный пучок, магнетронная пушка, бифуркация, динамика электронов, градиентное магнитное поле, математическое моделирование, опытные данные.

О.С. МАЗМАНИШВИЛІ, М.Г. РЕШЕТНЯК  
 Національний Науковий Центр “Харківський фізико-технічний інститут”

## МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАЛЬНИХ І ПОВОРОТНИХ ТРАЄКТОРІЙ ЕЛЕКТРОНІВ В ГРАДІЄНТНОМУ МАГНІТНОМУ ПОЛІ МАГНЕТРОННОЇ ГАРМАТИ

*Розглянуто рух електронів в циліндричному магнітному полі зі змінною напруженістю вздовж осі поля. Використано математичні та чисельні моделі перетворення експериментальних даних аналітичними функціями. З метою отримання прецизійних характеристик вивчено формування пучка з енергією 55 кеВ в поздовжньому і радіальному напрямках при його транспортуванні в магнітному полі соленоїда. Показано, що руху електронів можна зіставити оптичну модель проходження світлових променів в середовищі з градієнтним коефіцієнтом, що залежить від радіуса. Побудовано програмний засіб, використання якого дало можливість промодельовати основні залежності руху електронного пучка в заданому соленоїдальному магнітному полі. Представлено результати чисельного моделювання траєкторій електронів в градієнтному магнітному полі магнетронної гармати з вторинноемісійним катодом. Розглянуто формування пучка з енергією 55 кеВ в радіальному і поздовжньому напрямках при його транспортуванні в соленоїдальному магнітному полі з великим градієнтом. Отримано режими роботи гармати, при яких частка відчуває ефект "пляшкового горлечка" і завершує свій рух поверненням в прикатодну область. Таким чином, отримані біфуркаційні режими динаміки часток при їх русі вздовж осі транспортування як вперед на мішень, так і назад в прикатодну область. Вивчено вплив початкових умов при емісії на виникнення зворотного ефекту. Показано, що при заданій енергії електрона і фіксованому магнітному полі параметром, що визначає відображення частки, є полярний кут вльоту щодо осі циліндричного магнітного поля. Досліджено залежність формування підсумкового розподілу від*

амплітуди і градієнта магнітного поля вздовж осі системи. Наводяться результати чисельного моделювання по руху трубчастого електронного потоку. Вивчено можливість управління позовжньою координатою точки повернення електрона. На основі моделі руху електронного потоку розглянуті характеристики результуючого електронного пучка.

Ключові слова: електронний пучок, магнетронна гармата, біфуркація, динаміка електронів, градієнтне магнітне поле, математичне моделювання, експериментальні дані.

A.S. MAZMANISHVILI, N.G. RESHETNYAK  
National Science Center “Kharkov Institute of Physics & Technology”

## MODELING OF OSCILLATORY AND RETURN TRAJECTORIES OF ELECTRONS IN A GRADIENT MAGNETIC FIELD MAGNETRON GUN

*The motion of electrons in a cylindrical magnetic field with variable strength along the field axis is considered. Mathematical and numerical models of transformation of experimental data by analytical functions are used. In order to obtain precision characteristics, we studied the formation of a 55 keV beam in the longitudinal and radial directions during its transportation in the magnetic field of a solenoid. It is shown that the motion of electrons can be compared with an optical model of the transmission of light rays in a medium with a gradient coefficient depending on the radius. A software tool was developed, the use of which made it possible to simulate the main dependences of the motion of an electron beam in a given solenoidal magnetic field. The results of numerical simulation of electron trajectories in a gradient magnetic field of a magnetron gun with a secondary emission cathode are presented. The formation of a beam with energy of 55 keV in the radial and longitudinal directions during its transportation in a solenoidal magnetic field with a large gradient is considered. The operating modes of the gun are obtained in which the particle experiences the "bottleneck" effect and completes its movement by returning to the cathode region.. The influence of the initial conditions during emission on the occurrence of the return effect has been studied. It is shown that for a given electron energy and a fixed magnetic field, the parameter determining the particle reflection is the polar angle of entry relative to the axis of the cylindrical magnetic field. The dependence of the formation of the final distribution of particles on the amplitude and gradient of the magnetic field along the axis of the system is investigated. The results of numerical simulation on the motion of a tubular electron flow are presented. The possibility of controlling the longitudinal coordinate of the electron return point has been studied. The characteristics of the resulting electron beam are considered on the basis of a model of electron flow motion.*

*Key words: electron beam, magnetron gun, bifurcation, electron dynamics, gradient magnetic field, mathematical modeling, experimental data.*

### Постановка проблеми

Магнетронні пушки с холодними вторичноemisсионними катодами перспективны для использования их при создании мощных СВЧ-приборов, в ускорительной технике в связи с высокой плотностью тока, конструктивной простотой, стабильностью эмиссии катодов и т.д. [1, 2]. На основе магнетронной пушки с вторичноemisсионным катодом был создан ускоритель электронов, который использует осевой электронный пучок для облучения металлических мишеней [3]. Как объект исследования, магнетронная пушка имеет то преимущество, что, с одной стороны, она может быть модифицирована для проведения экспериментов различного типа, с другой стороны, несмотря на сложность выполнения аналитического исследования, для получения количественных зависимостей вполне возможно применение вычислительных методов и сравнения числовых результатов с данными эксперимента.

Объектом данной работы является изучение параметров трубчатого электронного пучка при его транспортировке в интенсивном градиентном магнитном поле соленоида и построение вычислительной модели движения электронного потока в области роста поля. Целью исследований явилось создание математической модели движения электронного пучка с энергией в десятки кэВ в градиентном магнитном поле, исследование зависимости формирования траекторий электронов пучка от начальных условий и распределения магнитного поля вдоль оси системы. В работе на основе

гамильтонова формализма движения электронов в магнитном поле синтезировано программное средство, позволяющее провести численное моделирование динамики трубчатых электронных потоков в спадающем магнитном поле соленоида. Приводятся результаты численного моделирования по движению трубчатого электронного потока. Полученные результаты моделирования показывают на возможность в условиях эксперимента установить явление возвратного движения.

### Анализ последних результатов и публикаций

Электронные пучки различной конфигурации и интенсивности широко применяются в электронно-лучевых технологиях, высоковольтной импульсной СВЧ-электронике, ускорительной технике и др. [1-4], при этом круг задач, для решения которых применяются электронные пучки, постоянно расширяется. Проводятся исследования с электронными пучками с различными энергиями и пространственной конфигурацией. В НИЦ ХФТИ используются источники электронов с холодными катодами, работающими в режиме вторичной эмиссии, помещенные в скрещенные электрические и магнитные поля, при этом в качестве источника электронов используется магнетронная пушка. Вторичноэмиссионный механизм генерации пучка такой пушке, вследствие его слабо разрушающего действия на материал катода, обуславливает сохранение эмиссионных свойств электронного источника в течение длительного времени. Усовершенствование магнетронной пушки, заключающееся в применении интенсивных магнитных полей с повышенным градиентом их напряженности, дает возможность рассмотреть новые явления в пространственной картине эволюции электронных пучков.

На основе магнетронной пушки с вторичноэмиссионным катодом создан электронный ускоритель, в котором используется осевой электронный пучок для облучения металлических мишеней [3-5], с перспективой облучения внутренней цилиндрической поверхности с помощью радиального пучка. Построено программное средство, использование которого дает возможность промоделировать основные зависимости движения электронного пучка в заданном соленоидальном магнитном поле [6-8].

### Цель исследования

В настоящей работе приводятся результаты исследования динамики электронного пучка в канале транспортировки и результаты численного моделирования по движению трубчатого электронного потока. Исследуется возможность управления параметрами и типа движения электронного пучка в градиентном магнитном поле режимами путем целенаправленной регулировки начальных условий при эмиссии. Целью исследования является обнаружение таких режимов работы магнетронной пушки, в которых возможна реализация новых типов траекторий движения электронных пучков.

### Основной материал исследования

#### 1. Математическая модель.

Для построения математической модели решения воспользуемся аксиальной симметрией задачи. Поэтому будем работать в полярной системе координат  $(r, z, \vartheta)$ . Гамильтониан рассматриваемой задачи в ней имеет вид

$$H = \frac{p_r^2 + p_z^2}{2m} + \frac{1}{2m} \left( \frac{p_\vartheta}{r} - e_0 A \right)^2, \quad (1)$$

где  $e_0$ ,  $m$  – заряд и масса покоя электрона,  $p_r$ ,  $p_z$ ,  $p_\vartheta$  – канонические импульсы,  $A$  – магнитный потенциал. Его, с учетом азимутальной симметрии, пока запишем в виде  $A(r, z) = Brf(z)$ , где  $f(z)$  – функция продольной координаты, которой распорядимся ниже,  $B$  – напряженность магнитного поля в рассматриваемой точке. В гамильтоновой форме уравнения движения для координат и импульсов имеют общий вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = \frac{p_r}{m}, \\ \dot{z} = \frac{p_z}{m}, \\ \dot{\vartheta} = \frac{1}{m} \left( \frac{p_\vartheta}{r} - e_0 Brf(z) \right) \frac{1}{r}, \\ \dot{p}_r = \frac{1}{m} \left( \frac{p_\vartheta}{r} - e_0 Brf(z) \right) \left( \frac{p_\vartheta}{r^2} + e_0 Bf(z) \right), \\ \dot{p}_z = \frac{1}{m} \left( \frac{p_\vartheta}{r} - e_0 Brf(z) \right) \left( e_0 Br \frac{\partial}{\partial z} f(z) \right), \\ \dot{p}_\vartheta = 0. \end{array} \right. \quad (2)$$

В результате нахождения частных производных получим систему из 6 уравнений. В ней перейдем, используя скорость света  $c$ , от текущего времени  $t$  к переменной  $S = ct$  (она пропорциональна пути, который прошла частица вдоль траектории), производную по ней будем обозначать штрихом. Для канонических импульсов осуществим замену  $p_r = e_0 Bq_r$ ,  $p_z = e_0 Bq_z$ ,  $p_\vartheta = e_0 Bq_\vartheta$ . После преобразований приходим к системе уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} r' = \mu q_r, \quad z' = \mu q_z, \quad \vartheta' = \mu \left( q_\vartheta / r^2 - f(z) \right), \\ q_r' = \mu r \left( q_\vartheta / r^2 - f(z) \right) \left( q_\vartheta / r^2 + f(z) \right), \quad q_z' = \mu r^2 \left( q_\vartheta / r^2 - f(z) \right) df(z) / dz, \quad q_\vartheta' = 0, \end{array} \right. \quad (3)$$

в которой  $f(z)$  – полевая функция продольной координаты,  $df(z)/dz$  – производная функции  $f(z)$ .

В уравнениях (3)  $\mu = e_0 B / mc$ ,  $Bf(z)$  – функция, описывающая напряженность магнитного поля вдоль оси  $z$ . Амплитуду  $B$  выбираем так, чтобы можно было пользоваться функцией  $Bf(z)$  на всем интервале возможных значений  $z$ . К уравнениям (3) необходимо присоединить начальные условия для  $r_0$ ,  $z_0$ ,  $\vartheta_0$ , а также для  $q_{r0}$ ,  $q_{z0}$ ,  $q_{\vartheta0}$ . Устойчивость алгоритма решения связана с шагом  $\Delta s$  решения и параметром  $\mu$ . Тогда условие  $\mu \Delta s \ll 1$  будет выполняться, если  $\Delta s \ll 0.0001$  м. Итак, с вычислительной точки зрения задача может быть сформулирована как задача нахождения решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями. Сформулированная задача Коши может быть решена, при условии, что обеспечена возможность на каждом шаге интегрирования уравнений (3) использовать функции  $f(z)$  и  $df(z)/dz$  как аналитические функции.

## 2. Магнитное поле.

В [8] была ранее описана работа магнетронной пушки. Существенным фактором, влияющим на её работу, является вид используемого соленоидального магнитного поля (рис. 1 и рис. 2), обладающего цилиндрической симметрией. Это

позволяет использовать систему уравнений (3) для анализа и численного моделирования.

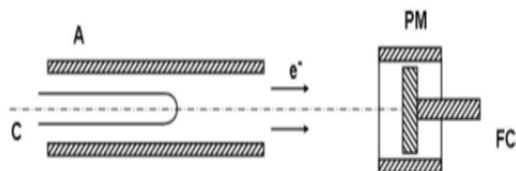


Рис. 1. Схема движения пучка электронов (А – анод, С – катод, РМ – постоянный магнит, FC – мишень)

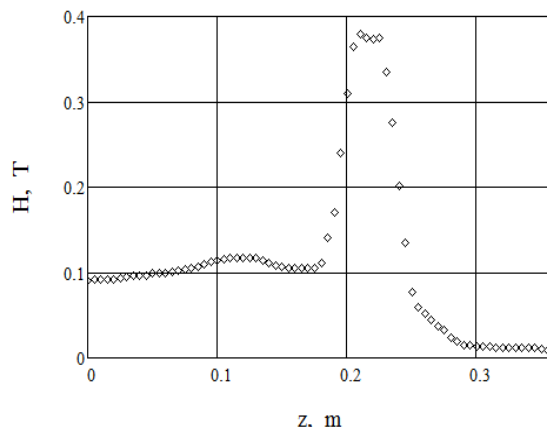


Рис. 2. Опытные данные магнитного поля  $H$  в пушке

Применение разработанного программного средства, основанного на аналитической модели распределения магнитного поля вдоль оси идеального соленоида, позволило, опираясь на массив из опытных данных на оси транспортировки электронов, восстановить амплитуду  $f(z)$  магнитного поля и её производную  $df(z)/dz$  как аналитические функции продольной координаты  $z$  (рис. 3 и рис. 4). Это обеспечило возможность получения решений системы (3) в виде 6-мерных массивов, описывающих траектории частиц и численно изучить динамику движения электронов в магнитном поле соленоида.

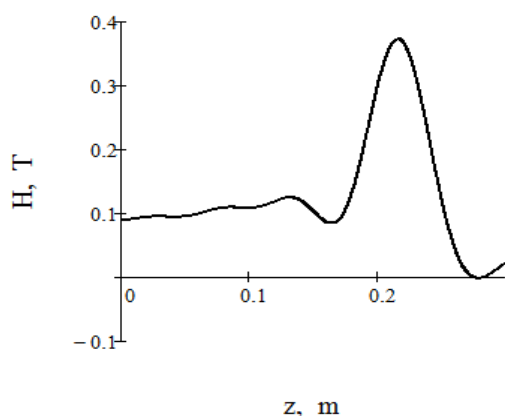


Рис. 3. Аппроксимация амплитуды  $H$  магнитного поля  $H$

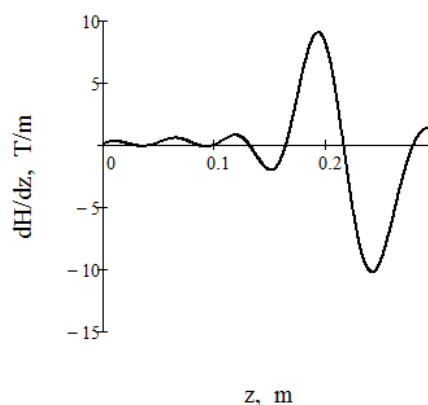


Рис. 4. Аппроксимация производной  $dH/dz$  магнитного поля

### 3. Результаты численного моделирования.

Ниже приведены результаты численного моделирования траекторий электронов с энергией  $E=55$  кэВ в градиентном магнитном поле, выполненные при начальном условии  $z_0 = 0$  мм для различных полярных углов влета  $\psi_0 = q'_r$  в систему транспортировки. В качестве начальных условий были выбраны следующие:  $r_0 = 21$  мм,  $\vartheta_0 = 0$  рад. Далее

$$q'_z|_0 = \frac{1}{\mu} \sqrt{2 \frac{E}{E_0}}, \quad q'_\theta|_0 = r_0^2 f(z_0), \quad (4)$$

( $E_0=511$  кэВ – энергия покоя электрона). Результаты расчетов приводятся для случаев  $\psi_0=0.0, -0.01$  и  $-0.02$  радиана (здесь знак "минус" означает, что частица на старте влетает, приближаясь по радиусу к оси системы).

На рис. 5 приведены примеры траекторий электрона для трех выбранных углов влета  $\psi_0$ . Видно, что увеличение (по модулю) угла влета приводит к существенной перестройке типа траектории.

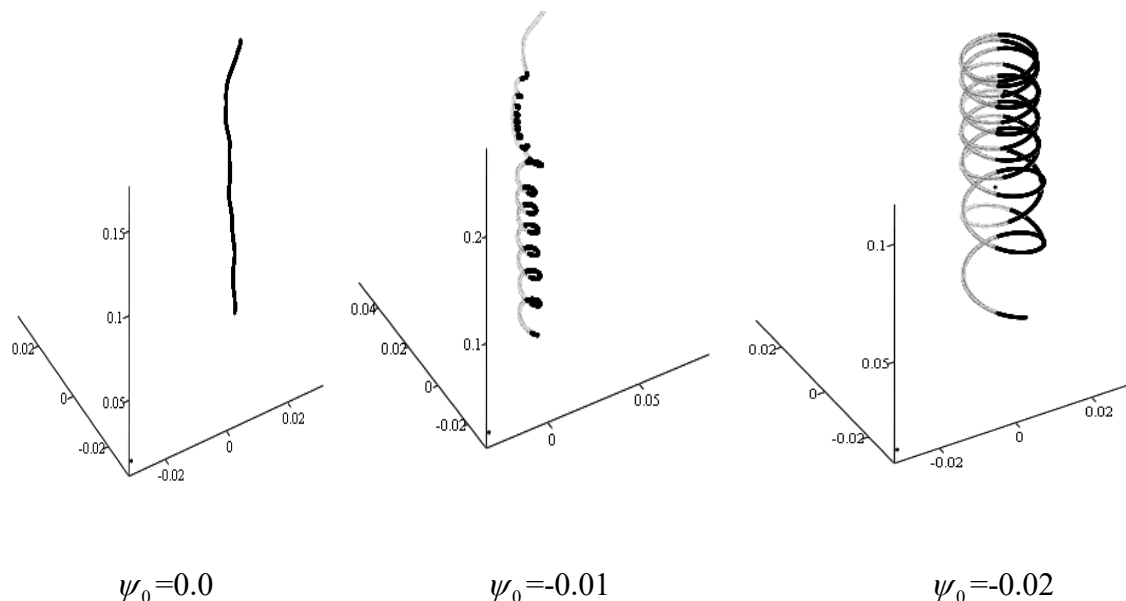


Рис. 5. Траектория электрона в градиентном магнитном поле (ось  $z$  системы направлена вверх)

На рис. 6 для трех случаев угла влета показаны зависимости текущей продольной координаты  $z$  от пройденного электроном пути  $S$  вдоль его траектории. Видно, что начиная с  $\psi_0=-0.01$  траектория отклоняется от прямолинейной, а при  $\psi_0=-0.02$  уже имеет место разворот с последующим движением назад в прикатодную область.

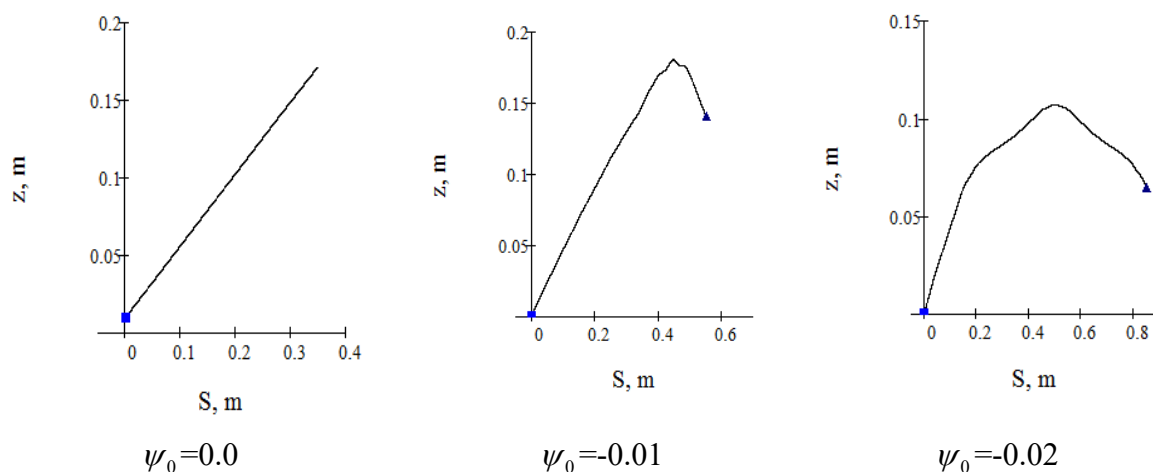


Рис. 6. Зависимость продольной координаты  $z$  от пройденного электроном пути  $S$  (квадратиком указан старт, треугольником показан финиш)

Фазовые  $(z,r)$ -карты траекторий приведены на рис. 7. В случае  $\psi_0 = -0.02$  видно, что у траектории по мере приближения к градиентной области магнитного поля уменьшается продольный шаг поперечных осцилляций. Далее частица испытывает колебания в предельной возвратной точке, в которой производная  $dz/dS$  продольной координаты  $z$  обращается в ноль. Затем электрон, испытывая, как и ранее, поперечные колебания, движется назад. Такому движению электронов можно сопоставить оптическую модель прохождения световых лучей в среде с градиентным коэффициентом преломления, зависящим от радиуса, то есть имеют место режимы работы пушки, при которых частица испытывает "бутылочный" эффект и завершает свое движение возвращением в прикатодную область.

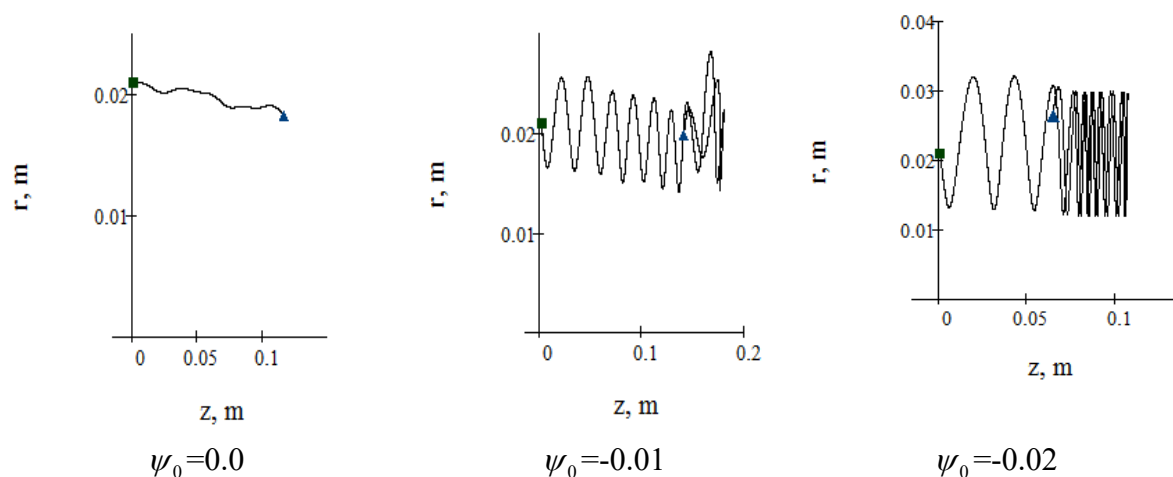


Рис. 7. Фазовые карты  $(z,r)$  (квадратиком указан старт, треугольником показан финиш)

Таким образом, получены бифуркационные режимы динамики части при их движении вдоль оси транспортировки как вперед на мишень, так и назад в прикатодную область.

### Выводы

При движении в канале транспортировки пучка поток электронов испытывает преобразование плотности распределения в фазовом пространстве, которое определяется видом градиентного магнитного поля в канале. Взаимодействие электронов с интенсивным магнитным полем может привести к эффекту "бутылочного горлышка" отражения частицы – движению назад. При заданной энергии электрона и фиксированном магнитном поле параметром, определяющим отражение частицы, является полярный угол влета относительно оси цилиндрического магнитного поля. Приводятся результаты численного моделирования по движению электронного потока. Показаны примеры численных расчетов, иллюстрирующие бифуркационные режимы динамики части при их движении вдоль оси транспортировки как вперед на мишень, так и назад в прикатодную область.

### Список использованной литературы

1. Dovbnya A.N., Lavrinenko S.D., Zakutin V.V. Surface modification of zirconium and Zr1%Nb alloy by the electron beam of the magnetron gun-based accelerator. *Problems of Atomic Science and Technology. Series "Physics of Radiation Effects and Radiation Materials Science"*. 2011, № 2. P. 39-45.
2. Ayzatsky M.I., Dovbnya A.N., Mazmanishvili A.S., Reshetnyak N.G., Romas'ko V.P., Chertishchev I.A. Studies on formation of the radially-directed electron beam generated

- by the magnetron gun with a secondary emission cathode. *Problems of Atomic Science and Technology. Series "Nuclear Physics Investigations"*. 2016. Issue 66. № 3(103). P. 11-16.
3. Dovbnya A.N., Dovbnya N.A., Mazmanishvili A.S., Reshetnyak N.G., Chertishchev I.A. Transport simulation of a high-current electron beam formed by the magnetron gun with a secondary-emission cathode in a decreasing solenoid field. *Problems of Atomic Science and Technology. Series "Nuclear Physics Investigations"*. 2015. № 6. P. 77-82.
  4. Айзацкий Н.И., Довбня А.Н, Мазманишвили А.С., Решетняк Н.Г., Ромасько В.П., Чертищев И.А. Исследование формирования электронного пучка в радиальном направлении, генерируемого магнетронной пушкой с вторично-эмиссионным катодом. *Вопросы Атомной Науки и Техники, Серия "Ядерно-Физические Исследования"*. 2016. Вып. № 3(1-3). С. 11-16.
  5. Мазманишвили А.С., Решетняк Н.Г. Динамика электронного пучка на выходе магнетронной пушки в градиентном магнитном поле. *Вопросы Атомной Науки и Техники, Серия "Ядерно-физические исследования"*. 2019. Вып. 72, № 6(124). С. 106-113.
  6. Мазманишвили А.С., Решетняк Н.Г., Шовкопляс О.А. Пучковый и секторный режимы электронных потоков в цилиндрической магнитном поле магнетронной пушки. *Журнал Нано- и Электронной Физики*. 2020. Том 12, № 3, 03001(5с).
  7. Dovbnya A.N., Dovbnya N.A., Mazmanishvili A.S., Reshetnyak N.G. Longitudinal-radial motion of an electron beam in the solenoidal field of the secondary-emission magnetron gun. *Problems of Atomic Science and Technology, series "Nuclear Physics Investigations"*. 2017. Issue № 6(112). P. 96-100.
  8. Мазманишвили А.С., Решетняк Н.Г. Преобразование массива данных цилиндрического магнитного поля магнетронной пушки и задача радиального движения электронов. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2020. Т.3, № 1. С. 108-116.

### References

1. Dovbnya, A.N., Lavrinenko, S.D. & Zakutin, V.V. (2011). Surface modification of zirconium and Zr1%Nb alloy by the electron beam of the magnetron gun-based accelerator. *Problems of Atomic Science and Technology. Series "Physics of Radiation Effects and Radiation Materials Science"*. 2, 39-45.
2. Ayzatsky, M.I., Dovbnya, A.N., Mazmanishvili, A.S., Reshetnyak, N.G., Romas'ko, V.P. & Chertishchev I.A. (2016). Studies on formation of the radially-directed electron beam generated by the magnetron gun with a secondary emission cathode. *Problems of Atomic Science and Technology. Series "Nuclear Physics Investigations"*. 66, 3(103), 11-16.
3. Dovbnya, A.N., Dovbnya, N.A., Mazmanishvili, A.S., Reshetnyak, N.G. & Chertishchev, I.A. (2015). Transport simulation of a high-current electron beam formed by the magnetron gun with a secondary-emission cathode in a decreasing solenoid field. *Problems of Atomic Science and Technology. Series "Nuclear Physics Investigations"*. 6, 77-82.
4. Ayzatskiy, N.I., Dovbnya, A.N, Mazmanishvili, A.S., Reshetnyak, N.G., Romasko, V.P. & Chertischev, I.A. (2016). Issledovanie formirovaniya elektronnoy puchki v radialnom napravlenii, generiruemogo magnetronnoy pushkoy s vtorichno-emissionnyim katodom. *Voprosyi Atomnoy Nauki i Tehniki, Seriya "Yaderno-Fizicheskie Issledovaniya"*. 3(1-3), 11-16.



5. Mazmanishvili, A.S. & Reshetnyak, N.G. (2019). Dinamika elektronnoho puchka na vyihode magnetronnoy pushki v gradientnom magnitnom pole. *Voprosyi Atomnoy Nauki i Tehniki, Seriya "Yaderno-fizicheskie issledovaniya"*. **72**, 6(124), 106-113.
6. Mazmanishvili, A.S., Reshetnyak, N.G. & Shovkoplyas, O.A. (2020). Puchkoviy i sektornyiy rezhimy elektronnykh potokov v tsilindricheskoj magnitnom pole magnetronnoy pushki. *Zhurnal Nano- i Elektronnoy Fiziki*. **12**, 3, 03001(5pp).
7. Dovbnya, A.N., Dovbnya, N.A., Mazmanishvili, A.S. & Reshetnyak, N.G. (2017). Longitudinal-radial motion of an electron beam in the solenoidal field of the secondary-emission magnetron gun. *Problems of Atomic Science and Technology, series "Nuclear Physics Investigations"*. **69**, 6(112), 96-100.
8. Mazmanishvili, A.S. & Reshetnyak N.G. (2020). Preobrazovanie massiva dannykh tsilindricheskogo magnitnogo polya magnetronnoy pushki i zadacha radialnogo dvizheniya elektronov. *Prikladni pitannya matematichnogo modelyuvannya*. **3**, 1, 108-116.

МАЗМАНИШВИЛИ Александр Сергеевич – доктор физико-математических наук, профессор, старший научный сотрудник НИЦ ХФТИ, e-mail: mazmanishvili@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0373-0626.

РЕШЕТНЯК Николай Григорьевич – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник НИЦ ХФТИ, e-mail: nreshetnyak@kipt.kharkov.ua, ORCID: 0000-0002-2345-6789.

УДК 519.2

А.С. МАЗМАНИШВИЛІ

Национальный Научный Центр “Харьковский физико-технический институт”

### РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ФУНКЦИОНАЛА–СВЕРТКИ РЕГУЛЯРНОГО СИГНАЛА И НОРМАЛЬНОГО МАРКОВСКОГО ШУМА

*Рассмотрена суперпозиция регулярной функции  $s(t)$  и случайного процесса  $x(t)$ , обладающего свойствами нормальности и марковости. Для заданного временного интервала на базе указанной функции изучен функционал сверточного типа. Предложен и использован подход, основанный на применении реверсных функций, что дало возможность получения аналитического выражения для производящей функции распределения случайных значений функционала-свертки. Проанализированы статистические свойства функционала-свертки. Плотность и интегральный закон распределения находятся численно с помощью обратного преобразования Лапласа для выбранной регулярной функции  $s(t)$  и выбранных значений времени наблюдения  $T$ , декремента случайного процесса  $V$  и его интенсивности  $\sigma_x^2$ . Показано, что увеличение параметра  $T\sigma_x^2$  приводит к расширению значений функционала-свертки в периферийные области больших уклонений. Уменьшение параметра  $V T$  приводит к локализации значений функционала-свертки во флуктуационной области  $z \approx 0$ . Плотность распределения вероятностей функционала-свертки имеет единственный максимум, две точки перегиба и экспоненциальную асимптотику на перифериях.*

*Ключевые слова: регулярная функция, случайность, нормальность, марковость, интегральные квадратичные функционалы, функционал сверточного типа, производящая функция распределения вероятностей, статистические свойства.*

О.С. МАЗМАНИШВИЛІ

Національний Науковий Центр “Харківський фізико-технічний інститут”

### РОЗПОДІЛ ЙМОВІРНОСТЕЙ ФУНКЦІОНАЛУ-ЗГОРТКИ РЕГУЛЯРНОГО СИГНАЛУ І НОРМАЛЬНОГО МАРКІВСЬКОГО ШУМУ

*Розглянуто суперпозиція регулярної функції  $s(t)$  і випадкового процесу  $x(t)$ , що володіє властивостями нормальності і марковости. Для заданого часового інтервалу на базі зазначеної функції вивчений функціонал згорткового типу. Запропоновано і використаний підхід, заснований на застосуванні реверсних функцій, що дало можливість отримання аналітичного виразу для твірної функції розподілу випадкових значень функціоналу-згортки. Проаналізовано статистичні властивості функціоналу-згортки. Щільність і інтегральний закон розподілу знаходяться чисельно за допомогою зворотного перетворення Лапласа для обраної регулярної функції  $s(t)$  і обраних значень часу спостереження  $T$ , декременту випадкового процесу  $V$  і його інтенсивності  $\sigma_x^2$ . Показано, що збільшення параметра  $T\sigma_x^2$  призводить до розширення значень функціоналу-згортки в периферійні області великих ухлень. Зменшення параметра  $V T$  призводить до локалізації значень функціоналу-згортки під флуктуаційної області. Щільність розподілу ймовірностей функціоналу-згортки має єдиний максимум, дві точки перегину і експоненціальну асимптотику на периферії.*

*Ключові слова: регулярна функція, нормальність, марковість, інтегральні квадратичні функціонали, функціонал згорткового типу, твірна функція розподілу ймовірностей, статистичні властивості.*

A.S. MAZMANISHVILI

National Science Center “Kharkov Institute of Physics & Technology”

### PROBABILITY DISTRIBUTION OF CROSS-FUNCTIONAL FROM REGULAR SIGNAL AND NORMAL MARKOVIAN NOISE

A superposition of a regular function  $s(t)$  and a random process  $x(t)$  with the properties of normality and Markov property is considered. For a given time interval, based on the specified function, the convolution-type functional is studied. An approach based on the use of reverse functions is proposed and used, which made it possible to obtain an analytical expression for the generating distribution function of random values of the convolution functional. The statistical properties of the convolution functional are analyzed. The density and the integral distribution law are found numerically using the inverse Laplace transform for the selected regular function  $s(t)$  and the selected values  $T$  of the observation time, the decrement of the random process  $\nu$  and its intensity  $\sigma_x^2$ . It is shown that an increase in the parameter  $T\sigma_x^2$  leads to the expansion of the convolution functional to the peripheral regions of large deviations. A decrease in the parameter  $\nu T$  leads to the localization of the values of the convolution functional in the fluctuation region. The probability distribution density of the convolution functional has a single maximum, two inflection points and exponential asymptotic behavior at the periphery.

Keywords: regular function, normality, Markov property, integral quadratic functional, convolution-type functional, generating probability distribution function, statistical properties.

### Постановка задачи

В ряде задач возникает необходимость вычисления случайных величин, которые представляют собой квадратичные функционалы от траекторий нормального марковского процесса. Примером таких функционалов может служить сверточный интеграл для заданного временного интервала  $T$

$$J_X = \int_0^T x(t)x(T-t) dt, \quad T > 0. \quad (1)$$

Здесь под  $\{x(t)\}$  понимается нормальный процесс Орнштейна-Уленбека (ОУ-процесс). Стационарный вещественный случайный ОУ-процесс имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию  $\mathbf{M}[x^2(t)] = \sigma_x^2$ . При этом ОУ-процесс  $x(t)$  удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}x(t) + \nu x(t) = w(t), \quad (2)$$

где декремент  $\nu > 0$ , а  $w(t)$  – винеровский случайный процесс с дисперсией  $\sigma_w^2/2$  и корреляционной функцией  $\mathbf{M}[w(t)w(t')] = \frac{1}{2}\sigma_w^2 \min(t, t')$ .

В более общем случае можно рассматривать обобщение функционала (1), в котором помимо случайной функции  $x(t)$  также фигурирует регулярная детерминированная функция  $s(t)$ :

$$J_{X+S} = \int_0^T [x(t) + s(t)][x(T-t) + s(T-t)] dt, \quad T > 0. \quad (3)$$

Поставим задачу о нахождении плотности распределения  $f(y)$  случайных значений  $y$  функционала (3) или, что эквивалентно, характеристической функции (ХФ)  $Q_{X+S}(\lambda)$  распределения вероятностей для случайного функционала-свертки с параметром  $\lambda$

$$Q_{X+S}(\lambda) = \langle \exp(-\lambda J_{X+S}) \rangle_X. \quad (4)$$

Здесь и ниже угловыми скобками будем обозначать усреднение в пространстве функций  $\{x(t)\}$ , а нижним индексом укажем пространство функций, относительно которого ищется математическое ожидание.

Подобные задачи ранее рассматривались в работах [1-3]. В этих работах для вычисления ХФ пришлось преодолеть значительные технические трудности, в частности, найти аналитическое представление для фундаментальной матрицы  $\exp(A)$ , где  $A$  некоторая  $(4 \times 4)$ -матрица. В настоящей работе предложен и использован менее сложный подход, основанный на применении реверсных функций, что дало возможность расширить постановку задачи на случай свертки сигнала в смеси с шумом.

Отметим, что квадратичность структуры функционалов  $J_x$  и  $J_{x+s}$  дает возможность аналитического вычисления функционального интеграла (4) и получения замкнутого выражения, в котором отсутствует континуальное интегрирование по диссипативной гауссовой мере.

### Вычисление характеристической (производящей) функции

Рассматривая функциональный интеграл (3) в пространстве, образованном этим множеством функций, запишем его в виде

$$J_{x+s} = \frac{1}{4} \int_0^T \left[ (x(t) + s(t) + x(T-t) + s(T-t))^2 - (x(t) + s(t) - x(T-t) - s(T-t))^2 \right] dt, \quad (5)$$

тогда

$$Q_{x+s}(\lambda) = \left\langle \frac{1}{4} \int_0^T \left[ (x(t) + s(t) + x(T-t) + s(T-t))^2 - (x(t) + s(t) - x(T-t) - s(T-t))^2 \right] dt \right\rangle_x. \quad (6)$$

Введем функции

$$u(t) = x(t) + x(T-t) + s(t) + s(T-t), \quad v(t) = x(t) + s(t) - x(T-t) - s(T-t). \quad (7)$$

Принимая во внимание явный вид функционала (3), представим его в виде

$$J_{x+s} = J_+[x] + J_-[x] = \frac{1}{4} \int_0^T dt [x(t) + s(t) + x(T-t) + s(T-t)]^2 - \frac{1}{4} \int_0^T dt [x(t) + s(t) - x(T-t) - s(T-t)]^2. \quad (8)$$

Поскольку для введенных функций  $u(t)$  и  $v(t)$  справедливо

$$\begin{aligned} \langle u(t) \rangle_x &= s(t) + s(T-t), \quad \langle v(t) \rangle_x = s(t) - s(T-t) \\ \text{и } \langle u(t)v(t) \rangle_x &= (s(t) + s(T-t))(s(t) - s(T-t)), \end{aligned}$$

то в силу этих равенств справедливо  $\langle u(t)v(t) \rangle_x = \langle u(t) \rangle_x \langle v(t) \rangle_x$ , поэтому они в силу нормального свойства процесса  $x(t)$  статистически независимы. Отсюда вытекает, что  $Q_{x+s}(\lambda)$  можно записать в виде

$$Q_{x+s}(\lambda) = Q_+(\lambda) Q_-(\lambda), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} Q_+(\lambda) &= \left\langle \exp \left\{ -\frac{\lambda}{4} \int_0^T dt [x(t) + s(t) + x(T-t) + s(T-t)]^2 \right\} \right\rangle_x = \left\langle \exp \left\{ -\frac{\lambda}{4} \int_0^T dt u^2(t) \right\} \right\rangle_x, \\ Q_-(\lambda) &= \left\langle \exp \left\{ \frac{\lambda}{4} \int_0^T dt [x(t) + s(t) - x(T-t) - s(T-t)]^2 \right\} \right\rangle_x = \left\langle \exp \left\{ \frac{\lambda}{4} \int_0^T dt v^2(t) \right\} \right\rangle_x. \end{aligned} \quad (10)$$

В факторизационном представлении (9) для ХФ сначала рассмотрим первый множитель. В нем наряду с множеством функций  $\{u(t)\}$  используем сопряженное с ним множество функций  $\{p(t)\}$ . Тогда

$$Q_+(\lambda) = \left\langle \exp \left\{ -\frac{\lambda}{4} \int_0^T dt u^2(t) \right\} \right\rangle_X = \int Dp(t) \left\langle \exp \left\{ -\int_0^T dt p^2(t) + \sqrt{-\lambda} \int_0^T dt p(t)u(t) \right\} \right\rangle_X, \quad (11)$$

где  $Dp(t)$  – обобщенный дифференциал в пространстве функций  $\{p(t)\}$ .

В силу нормальности статистическое среднее в (11) равно

$$\left\langle \exp \left\{ \sqrt{-\lambda} \int_0^T dt p(t)u(t) \right\} \right\rangle_X = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \lambda \int_0^T dt p(t) \int_0^T dt' p(t') \langle u(t)u(t') \rangle_X \right\}, \quad (12)$$

что после прямого вычисления коррелятора  $K_U(t, t') = \langle u(t)u(t') \rangle$  дает

$$Q_+(\lambda) = \int Dp(t) \left\langle \exp \left\{ -\int_0^T p^2(t)dt - \frac{\lambda}{2} \sigma_X^2 \int_0^T p(t) dt \int_0^T p(t') dt' [\exp(-\nu|t-t'|) + \exp(-\nu|t+t'-T|)] \right\} \right\rangle. \quad (13)$$

*Утверждение 1.*

Статистические средние, основанные на корреляторе  $K_U(t, t') = \langle u(t)u(t') \rangle$  с собственными функциями  $\{\varphi_n(t)\}$  и собственными числами  $\{\Lambda_n\}$ , эквивалентны соответствующим статистическим средним, основанным на корреляторе  $K_X(t, t') = \langle x(t)x(t') \rangle$  с собственными функциями  $\{\psi_n(t)\}$  и собственными числами  $\{\lambda_n\} = \{2\Lambda_n\}$ .

*Доказательство.*

Рассмотрим уравнение для собственных функций  $\{\varphi_n(t)\}$  оператора  $K_U$  исходного случайного ОУ-процесса с соответствующим им набором собственных чисел  $\{\Lambda_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,

$$(\varphi_n(t) + s(t)) = \Lambda_n \int_0^T dt' (\varphi_n(t') + s(t')) [\exp(-\nu|t-t'|) + \exp(-\nu|t+t'-T|)]. \quad (14)$$

Коррелятор  $K_U(t, t')$  имеет вид  $K_U(t, t') = \langle x(t)x(t') \rangle + \langle x(t)x(T-t') \rangle$  и выражен через корреляторы ОУ-процесса. Во втором (экспоненциальном) слагаемом под интегралом (14) осуществим реверсную замену во времени  $T-t'=t$ , тогда, вновь используя переменную  $t'$ , получим

$$(\varphi_n(t) + s(t)) = \Lambda_n \int_0^T dt' (\varphi_n(t') + s(t') + \varphi_n(T-t') + s(T-t')) \exp(-\nu|t-t'|). \quad (15)$$

Из (15) вытекает, что для реверсной функции справедливо

$$(\varphi_n(T-t) + s(T-t)) = \Lambda_n \int_0^T dt' (\varphi_n(t') + s(t') + \varphi_n(T-t') + s(T-t')) \exp(-\nu|t+t'-T|). \quad (16)$$

или

$$(\varphi_n(T-t) + s(T-t)) = \Lambda_n \int_0^T dt' (\varphi_n(T-t') + s(T-t') + \varphi_n(t') + s(t')) \exp(-\nu|t-t'|). \quad (17)$$

Складывая (15) и (17), приходим к уравнению

$$\psi_n(t) = 2\Lambda_n \int_0^T dt' \psi_n(t') \exp(-\nu|t-t'|), \quad (18)$$

где  $\psi_n(t) = \varphi_n(t') + s(t') + \varphi_n(T-t') + s(T-t')$ . В этом уравнении ядром служит уже коррелятор  $K_X(t, t')$  только ОУ-процесса  $\{x(t)\}$ .

Статистические средние, основанные на корреляторе  $K_U(t, t') = \langle u(t)u(t') \rangle$  с собственными функциями  $\{\varphi_n(t)\}$  и собственными числами  $\{\Lambda_n\}$ , эквивалентны соответствующим статистическим средним, основанным на корреляторе  $K_X(t, t') = \langle x(t)x(t') \rangle$  с собственными функциями  $\{\psi_n(t)\}$  и собственными числами  $\{\lambda_n\} = \{2\Lambda_n\}$ .

Из (15) и (18) можно заключить, что нахождение статистических средних, основанных на корреляторе  $K_U(t, t') = \langle u(t)u(t') \rangle$ , можно свести к нахождению статистических средних, основанных на корреляторе  $K_X(t, t') = \langle x(t)x(t') \rangle$ . Поэтому

$$Q_U(\lambda) = \left\langle \exp \left\{ -\frac{\lambda}{4} \int_0^T dt [x(t') + s(t') + x(T-t') + s(T-t')]^2 \right\} \right\rangle_X = \left\langle \exp \left\{ -\frac{\lambda}{2} \int_0^T (x(t) + s(t))^2 dt \right\} \right\rangle_X. \quad (19)$$

При  $s(t) = 0$  в правой части этого выражения имеем производящую функцию  $Q_Y(\lambda)$  энергетического функционала  $Y = J_X$  (1). Итак, имеем для парциальной производящей функции

$$Q_U(\lambda) = Q_+(\lambda/2). \quad (20)$$

*Утверждение 2.*

Статистические средние, основанные на корреляторе  $K_V(t, t') = \langle v(t)v(t') \rangle$  с собственными функциями  $\{\varphi_n(t)\}$  и собственными числами  $\{\Lambda_n\}$ , эквивалентны соответствующим статистическим средним, основанным на корреляторе  $K_X(t, t') = \langle x(t)x(t') \rangle$  с собственными функциями  $\{\psi_n(t)\}$  и собственными числами  $\{\lambda_n\} = \{2\Lambda_n\}$ .

*Доказательство.*

Преобразования, аналогичные выше изложенным, приводят к выражению

$$Q_V(\lambda) = \left\langle \exp \left\{ \frac{\lambda}{4} \int_0^T dt [x(t') + s(t') - x(T-t') - s(T-t')]^2 \right\} \right\rangle_X = \left\langle \exp \left\{ \frac{\lambda}{2} \int_0^T (x(t) + s(t))^2 dt \right\} \right\rangle_X. \quad (21)$$

Поэтому из (20) и (21) получаем окончательно

$$\begin{aligned} Q_{X+s}(\lambda) &= \left\langle \exp \left\{ -\lambda \int_0^T (x(t) + s(t))(x(T-t) + s(T-t)) dt \right\} \right\rangle_X = \\ &= \left\langle \exp \left\{ -\frac{\lambda}{2} \int_0^T (x(t) + s(t))^2 dt \right\} \right\rangle_X \left\langle \exp \left\{ \frac{\lambda}{2} \int_0^T (x(t) + s(t))^2 dt \right\} \right\rangle_X. \end{aligned} \quad (22)$$

Факторизация выражения (22) позволяет заключить, что пространство, отвечающее множеству функций  $\{x(t)\}$  вместе с  $\{x(T-t)\}$ , расслаивается на два подпространства, соответствующие аддитивным процессам  $\{u(t)\}$  и  $\{v(t)\}$  соответственно. Таким образом, ХФ  $Q_x(\lambda)$  формируется в подпространствах, образованных функциями  $\{u(t)\}$  и  $\{v(t)\}$  совместно, но с вдвое меньшей интенсивностью  $\sigma_x^2$  каждое. При этом их прямое объединение суть пространство, в котором действуют функции  $\{x(t)\}$ .

*Замечание.*

В частном случае  $s(t) = 0$  после замены в (22)  $2\nu\sigma_x^2 \Rightarrow \sigma_w^2$  и предельного перехода  $\nu \rightarrow 0$  в получившемся выражении приходим к характеристической функции  $Q_w(\lambda) = \langle \exp(-\lambda J_w[w]) \rangle$  функционала-свертки  $J_w = \int_0^T w(t)w(T-t)dt$  от винеровского процесса  $w(t)$  [4-8]:

$$Q_w(\lambda) = \langle \exp(-\lambda J_w) \rangle = \left( \text{ch}(\sqrt{\lambda} \sigma_w^2 T) \right)^{-1/2}. \quad (23)$$

Для искомых функциональных средних можно использовать ранее найденные аналитические представления ([5], стр. 190). Применяя выражение 1.23 ([5], стр. 194), в результате громоздких преобразований окончательно получим для искомой характеристической функции

$$Q_{x+s}(\lambda) = \left\{ \frac{4r_+ \nu \exp(\nu T)}{f_1(r_+)} \exp\left[-\frac{\lambda}{4} \int_0^T S_+^2(t) dt\right] \exp\left[\frac{2\lambda^2 \nu \sigma_x^2}{r_+ f_1(r_+)} \int_0^T d\tau \int_0^T d\tau' S_+(\tau) S_+(\tau') f_2(r_+, \tau, \tau')\right] \times \right. \\ \left. \times \frac{4r_- \nu \exp(\nu T)}{f_1(r_-)} \exp\left[\frac{\lambda}{4} \int_0^T S_-^2(t) dt\right] \exp\left[\frac{2\lambda^2 \nu \sigma_x^2}{r_- f_1(r_-)} \int_0^T d\tau \int_0^T d\tau' S_-(\tau) S_-(\tau') f_2(r_-, \tau, \tau')\right] \right\}^{1/2}. \quad (24)$$

В выражении (24) использованы следующие обозначения:

$$S_{\pm}(t) = s(t) \pm s(T-t), \quad r_{\pm} = \sqrt{\nu^2 \pm 2\lambda \nu \sigma_x^2} / 4, \quad f_1(r_{\pm}) = (r_{\pm} + \nu)^2 \exp(r_{\pm} T) - (r_{\pm} - \nu)^2 \exp(-r_{\pm} T), \\ f_2(r_{\pm}, \tau, \tau') = [(r_{\pm} + \nu) \exp(r_{\pm} \tau) + (r_{\pm} - \nu) \exp(-r_{\pm} \tau)] [(r_{\pm} + \nu) \exp(r_{\pm}(T-\tau')) + (r_{\pm} - \nu) \exp(-r_{\pm}(T-\tau'))].$$

Если записать произведение в правой части выражения (24) в виде  $Q_{x+s}(\lambda) = \{Q_x^+(\lambda) Q_s^+(\lambda) Q_{xs}^+(\lambda) Q_x^-(\lambda) Q_s^-(\lambda) Q_{xs}^-(\lambda)\}^{1/2}$ , то можно из вида этого произведения заключить, что множители  $\{Q_x^+(\lambda) Q_x^-(\lambda)\}^{1/2}$  отвечают вкладу нормального ОУ-шума  $x(t)$  в формирование случайной величины – функционала-свертки  $Z = J_{x+s}$ . Далее, множители  $\{Q_s^+(\lambda) Q_s^-(\lambda)\}^{1/2}$  ответственны за вклад регулярного сигнала  $s(t)$ . Наконец, множители  $\{Q_{xs}^+(\lambda) Q_{xs}^-(\lambda)\}^{1/2}$  отвечают вкладу перекрестного взаимодействия сигнала и шума, имеющего место из-за квадратичности функционала  $J_{x+s}$  (3).

### Свойства сверточного функционала

Найденная характеристическая функция (24)  $Q_Z(\lambda)$  функционала-свертки  $Z = J_{x+s}$  регулярного сигнала  $s(t)$  и нормального марковского процесса  $x(t)$  содержит всю статистическую информацию о случайной величине  $Z$ . В случае  $s(t) = 0$

плотность  $f(z)$  симметрична относительно линии  $z=0$ . В общем случае она удовлетворяет общим требованиям, предъявляемым к плотностям распределений вероятностей интегральных квадратичных функционалов, а именно,  $f(z)$  имеет единственный максимум, две точки перегиба и экспоненциальную асимптотику на перифериях.

Для частного, но важного случая  $s(t)=0$ , информацию о плотности распределения вероятностей  $f(z)$  можно получить с помощью обратного преобразования Лапласа (параметры расчета:  $s(t)=0$ ,  $\sigma_x^2=1$ ,  $T=1$ ).

На рис. 1 приведены зависимости плотности  $f(z)$  для указанных значений параметров расчета. Можно показать, что увеличение параметра  $T\sigma_x^2$  приводит к расширению значений функционала-свертки в периферийные области больших уклонений.

На рис. 2 приведены зависимости интегральной функции распределения  $F(z)$ . Из расчетов следует, что уменьшение параметра  $\chi = \nu T$ , равного отношению интервала наблюдения  $T$  к длине корреляции  $l_{\text{corr}} = \nu^{-1}$  ОУ-процесса, приводит к локализации значений функционала-свертки во флуктуационной области  $z \approx 0$ .

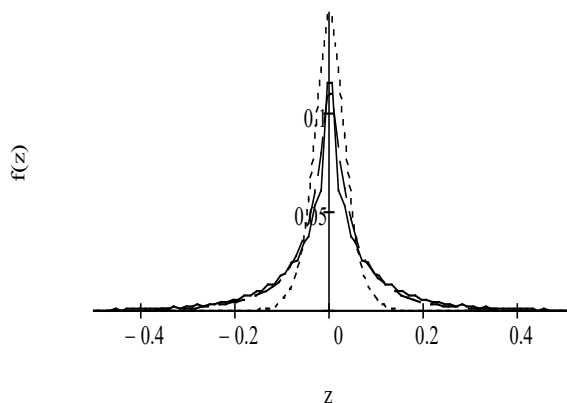


Рис. 1. Плотность распределения вероятностей  $f(z)$  при  $s(t)=0$ ; линия –  $\nu = 0.1$ , пунктир –  $\nu = 1$ , точки –  $\nu = 10$

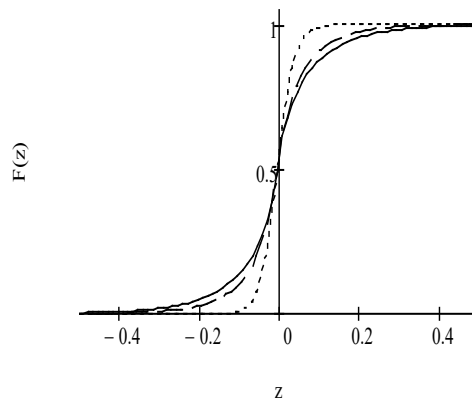


Рис. 2. Функция распределения вероятностей  $F(z)$  при  $s(t)=0$ ; линия –  $\nu = 0.1$ , пунктир –  $\nu = 1$ , точки –  $\nu = 10$

В случае отсутствия шумовой компоненты соответствующая плотность распределения имеет вид  $\delta$ -функции Дирака

$$f(z) = \delta\left(z - \int_0^T s(t)s(T-t) dt\right). \tag{25}$$

В общем случае из (24) следует для первого момента, что

$$M[Z] = \langle J_{x+s} \rangle = \frac{1}{4} \int_0^T S_+^2(t) dt - \frac{1}{4} \int_0^T S_-^2(t) dt = \int_0^T s(t)s(T-t) dt, \tag{26}$$

то есть случайная компонента не дает вклад в первый момент. Далее, дисперсия функционала-свертки равна

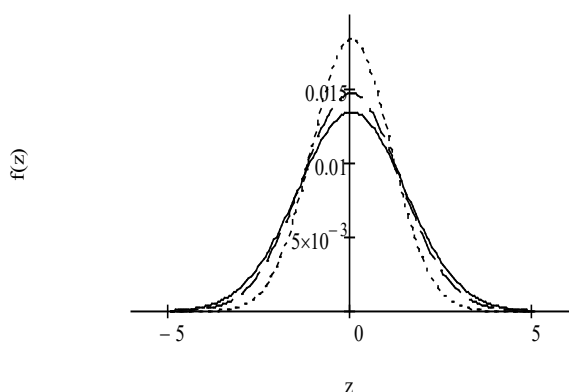


$$\begin{aligned}
 D[Z] &= \langle J_{X+S}^2 \rangle - \langle J_{X+S} \rangle^2 = \\
 &= \sigma_X^2 \frac{\nu T - 1 + e^{-\nu T}}{\nu} + \sigma_X^2 \int_0^T \int_0^T d\tau d\tau' [s(\tau)s(\tau') + s(T-\tau)s(T-\tau')] \exp(-\nu|\tau-\tau'|).
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

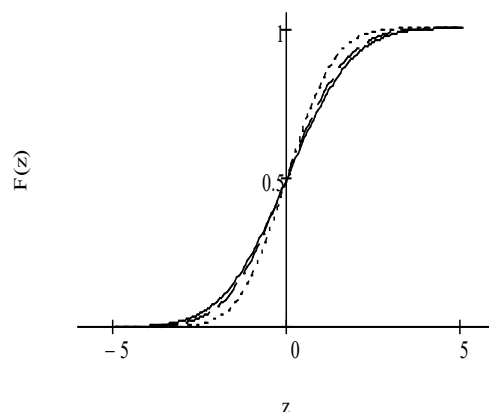
В случае достаточно большого отношения сигнал/шум приближенное выражение для плотности распределения вероятностей  $f(z)$  случайных значений функционала-свертки  $Z = J_{X+S}$  регулярного сигнала  $s(t)$  и нормального марковского процесса  $x(t)$  следующее

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D[Z]}} \exp\left(-\frac{(z - M[Z])^2}{2D[Z]}\right).
 \tag{28}$$

На рис.3 и 4 приведены зависимости, иллюстрирующие асимптотическую формулу (28) для случая, когда  $s(t) = t^2$  Лапласа (параметры расчета:  $\sigma_X^2=1, T=1$ ).



**Рис. 3. Плотность распределения вероятностей  $f(z)$  при  $s(t) = t^2$ ; линия –  $\nu = 0.1$ , пунктир –  $\nu = 1$ , точки –  $\nu = 10$**



**Рис. 4. Функция распределения вероятностей  $F(z)$  при  $s(t) = t^2$ ; линия –  $\nu = 0.1$ , пунктир –  $\nu = 1$ , точки –  $\nu = 10$**

Из рис. 3 и 4 можно видеть, что плотность распределения  $f(z)$  имеет гауссову форму и локализуется вокруг теперь уже ненулевого значения  $M[Z]$ .

### Выводы

В работе рассмотрена суперпозиция регулярной (сигнальной) функции  $s(t)$  и случайного процесса Орнштейна-Уленбека  $x(t)$ , обладающего свойствами нормальности и марковости. Для заданного временного интервала  $T$  изучен функционал  $J_{X+S}$  сверточного типа. Предложен подход, основанный на применении реверсных функций, что дало возможность получить аналитическое выражение для производящей функции  $Q_{X+S}(\lambda) = \langle \exp(-\lambda J_{X+S}) \rangle_X$  распределения случайных значений функционала-свертки  $Z = J_{X+S}$ . Плотность и интегральный закон распределения получены численно для выбранных значениях времени наблюдения  $T$ , декремента случайного процесса  $\nu$  и его интенсивности  $\sigma_X^2$ . Получено, что увеличение параметра  $T\sigma_X^2$  приводит к расширению значений функционала-свертки в периферийные области больших отклонений. Уменьшение параметра  $\nu T$  приводит к локализации значений

функціонала-свертки в флуктуационную область  $z \approx 0$ . Плотность  $f(z)$  удовлетворяет общим требованиям, предъявляемым к плотностям распределений вероятностей интегральных квадратичных функционалов. Приведены численные примеры, характеризующие описанные статистические свойства случайной величины – функционала-свертки  $J_{x+s}$ . С помощью предельного перехода и стандартных замен в производящей функции  $Q_z(\lambda) = \langle \exp(-\lambda J_x) \rangle$  получена характеристическая функция  $Q_w(\lambda) = \langle \exp(-\lambda J_w) \rangle$  функционала-свертки, основанном на винеровском процессе  $w(t)$ .

### Список использованной литературы

1. Uhlenbeck G. E., Ornstein L. S. On the theory of Brownian Motion. *Phys. Rev.* 1930. V. 36. P. 823–841.
2. Чандрасекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии. Москва: Государственное издательство иностранной литературы. 1947. 168 с.
3. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. М.: Сов. Радио. 1977. 488 с.
4. Лэкс М. Флуктуации и когерентные явления. Москва: Наука. 1974. 299 с.
5. Мазманишвили А. С. Континуальное интегрирование как метод решения физических задач. Киев: Наукова Думка. 1987. 224 с.
6. Вирченко Ю. П., Мазманишвили А. С. Статистические свойства функционала-свертки от нормального марковского процесса. *Доклады Академии Наук УССР.* 1988. № 1. С. 14–16.
7. Вирченко Ю. П., Мазманишвили А. С. Распределение вероятностей случайного функционала-свертки от нормального марковского процесса. *Проблемы передачи информации.* 1990. Т. 26. Вып. 3. С. 96–101.
8. Клячко А. А., Солодяников Ю. В. Вычисление характеристических функций некоторых функционалов от винеровского процесса и броуновского моста. *Теория вероятностей и её применение.* 1986. Т. 31. Вып. 3. С. 569–573.

### References

1. Uhlenbeck, G. E. & Ornstein, L. S. (1930). On the theory of Brownian Motion. *Phys. Rev.* **36**, 823–841.
2. Chandrasekar, S. (1947). Stochasticeskie problemyi v fizike i astronomii. Moskva: Gosudarstvennoe izdatelstvo inostrannoy literaturyi.
3. Tihonov, V. I. & Mironov, M. A. (1977). Markovskie protsessyi. Moskva: Sov. Radio.
4. Leks, M. (1974). Fluktuatsii i kogerentnyie yavleniya. Moskva: Nauka.
5. Mazmanishvili, A. S. (1987). Kontinualnoe integririvanie kak metod resheniya fizicheskikh zadach. Kiev: Naukova Dumka.
6. Virchenko, Yu. P. & Mazmanishvili, A. S. (1988). Statisticheskie svoystva funktsionala-svertki ot normalnogo markovskogo protsessa. *Doklady Akademii Nauk USSR.* **1**, 14–16.
7. Virchenko, Yu. P. & Mazmanishvili, A. S. (1990). Raspredelenie veroyatnostey sluchaynogo funktsionala-svertki ot normalnogo markovskogo protsessa. *Problemyi peredachi informatsii.* **26**, 3, 96–101.
8. Klyachko, A. A. & Solodyannikov, Yu. V. (1986). Vyichislenie harakteristicheskikh funktsiy nekotoryih funktsionalov ot vinerovskogo protsessa i brounovskogo mosta. *Teoriya veroyatnostey i eYo primenenie.* **31**, 3, 569–573.

МАЗМАНИШВИЛИ Александр Сергеевич – доктор физико-математических наук, профессор, старший научный сотрудник НИЦ ХФТИ, e-mail: mazmanishvili@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0373-0626.

УДК 621.791:537.525

І.В. МЕЛЬНИК, С.Б. ТУГАЙ, В.О. КИРИК  
НТУ «Київський політехнічний інститут ім. І. Сікорського», Київ  
Д.В. КОВАЛЬЧУК  
Приватне Акціонерне Товариство НВО «Червона Хвиля», Київ

### ТЕОРЕТИЧНЕ ОЦІНЮВАННЯ РОБОЧОГО ТИСКУ ГАРМАТ ВИСОКОВОЛЬТНОГО ТЛІЮЧОГО РОЗРЯДУ ДЛЯ ВИКОРИСТАННЯ В ЕЛЕКТРОННО-ПРОМЕНЕВІЙ ТЕХНОЛОГІЇ ЗВАРЮВАННЯ МЕТАЛЕВИХ ВИРОБІВ

*У статті проведений порівняльний аналіз методів аналітичного та чисельного розрахунку глибини зварювального шва металевих виробів за умови здійснення зварювання у низькому вакуумі електронним пучком, який формується гарматою високовольтного тліючого розряду. Показано, що хоча аналітичний метод розрахунку є простим та зручним, але, у разі його використання, розрахункові залежності правильно відображають динаміку зміни глибини шва лише у разі малих тисків та високої прискорювальної напруги. У даному випадку проблема забезпечення точності та адекватності аналітичних розрахунків за простими співвідношеннями насамперед пов'язана з тим, що не враховується залежність діаметра електронного пучка в фокусі від його струму. Запропонований чисельний метод розрахунку дозволяє оцінювати глибину шва в значно більш широкому діапазоні робочих тисків електронної гармати. Для розрахунку глибини зварювального шва були використані відомі прості аналітичні залежності, які дозволяють обчислити глибину проплавлення металу залежно від його термодинамічних властивостей, а також геометричних та енергетичних параметрів електронного пучка. Як параметри пучка розглядалися прискорювальна напруга, струм пучка та його фокальний діаметр. Для проведення аналітичних та чисельних оцінок були окремо враховані існуючі аналітичні залежності фокального діаметру електронного пучка від його струму, а також залежність струму електронної гармати високовольтного тліючого розряду від тиску у розрядній камері. Чисельні розрахунки проводились через аналіз функціональної залежності, в яку входили глибина зварювального шва та тиск газу у розрядній камері гармати як явні параметри, та через пошук нульового значення цієї функції шляхом розв'язування відповідного нелінійного рівняння. Аналіз поведінки функції у заданому інтервалі значень тиску та глибини зварювального шва показав, що така постановка задачі є цілком коректною з математичної точки зору. У статті наведені результати тестових аналітичних та чисельних розрахунків залежності глибини зварювального шва від тиску гелію в розрядній камері гармати, отримані для виробів із титану, та проведений аналіз отриманих розрахункових результатів.*

*Ключові слова: нелінійне рівняння, електронний пучок, електронно-променеє зварювання, глибина зварювального шва, фокальний діаметр електронного пучка, електронні гармати високовольтного тліючого розряду.*

І.В. МЕЛЬНИК, С.Б. ТУГАЙ, В.А. КИРИК  
НТУ України «Київський політехнічний інститут ім. І. Сікорського», Київ  
Д.В. КОВАЛЬЧУК  
Частное Акционерное Общество НПО «Червона Хвиля», Київ

### ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА РАБОЧЕГО ДАВЛЕНИЯ ПУШЕК ВИСОКОВОЛЬТНОГО ТЛЕЮЩЕГО РАЗРЯДА ДЛЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ В ЭЛЕКТРОННО-ЛУЧЕВОЙ ТЕХНОЛОГИИ СВАРКИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ИЗДЕЛИЙ

*В статье проведен сравнительный анализ методов аналитического и численного расчета глубины сварочного шва металлических изделий при осуществлении сварки в низком вакууме электронным пучком, который формируется пушкой высоковольтного тлеющего разряда. Показано, что хотя аналитический метод расчета является простым и удобным, но, в случае его использования, расчетные зависимости правильно отражают динамику изменения глубины шва только в случае малых давлений и высоких ускоряющих напряжений. В данном случае проблема обеспечения точности и адекватности аналитических расчетов по простым соотношениям прежде всего связана с тем, что не учитывается зависимость диаметра электронного пучка в фокусе от его тока. Предложенный численный метод расчета позволяет оценивать глубину шва в значительно более широком диапазоне рабочих давлений электронной пушки. Для расчета глубины сварочного шва были использованы известные простые аналитические зависимости, позволяющие вычислить глубину проплавления металла в зависимости от его термодинамических свойств, а также геометрических и энергетических параметров электронного пучка. Как параметры пучка рассматривались ускоряющее напряжение, ток*

пучка и его фокальной диаметр. Для проведения аналитических и численных оценок были отдельно учтены существующие аналитические зависимости фокального диаметра электронного пучка от его тока, а также зависимость тока электронной пушки высоковольтного тлеющего разряда от давления в разрядной камере. Численные расчеты проводились через анализ функциональной зависимости, в которую входили глубина сварочного шва и давление газа в разрядной камере пушки как явные параметры, и через поиск нулевого значения этой функции путем решения соответствующего нелинейного уравнения. Анализ поведения функции в заданном интервале значений давления и глубины сварочного шва показал, что такая постановка задачи является вполне корректной с математической точки зрения. В статье приведены результаты тестовых аналитических и численных расчетов зависимости глубины сварочного шва от давления гелия в разрядной камере пушки, полученные для изделий из титана, и проведен анализ полученных расчетных результатов.

Ключевые слова: нелинейное уравнение, электронный пучок, электронно-лучевая сварка, глубина сварочного шва, фокальный диаметр электронного пучка, электронные пушки высоковольтного тлеющего разряда.

I.V. MELNYK, S.B. TUHAI, V.O. KYRYK  
National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnical Institute"  
D.V. KOVALCHUK  
Private Actioner Society, Scientific and Industrial Association "ChervonaHvyliia"

## **THEORETICAL ESTIMATION OF OPERATION PRESSURE OF HIGH-VOLTAGE GLOW DISCHARGE GUNS FOR APPLYING IN ELECTRON-BEAM TECHNOLOGY OF METAL PRODUCTS WELDING**

*In the article a comparative analysis of methods for analytical and numerical calculation of the depth of a welding seam of metal products, during its welding in the soft vacuum by an electron beam, which is formed by high-voltage glow discharge guns, is provided. It is shown, that although the analytical method of calculation is simple and convenient, but, in the case of its use, the calculated dependences correctly reflect the dynamics of changing of the welding depth only in the case of low pressures and high acceleration voltage. In this case, the problem of ensuring the accuracy and adequacy of analytical calculations by using the simple relations is primarily due to the fact that the dependence of the electron beam diameter at the focus on its current isn't taken into account. The proposed numerical calculation method allows to estimate the weld depth in a much wider range of operating pressures of the electron gun. To calculate the depth of the seam, the well-known simple analytical dependences were used, which allows to calculate the depth of metal penetration in the seam depending on its thermodynamic properties, as well as on the geometry and energy parameters of the electron beam. Accelerating voltage, beam current and focal diameter were considered as beam parameters. To providing analytical and numerical estimates was separately took into account the existing analytical dependences of the electron beam focal diameter on its current, as well as the dependence of the current of high-voltage glow discharge electron guns on the pressure in discharge chamber. Numerical calculations were carried out through the analysis of the functional dependence, which included the depth of the weld and the gas pressure in the discharge chamber of the gun as explicit parameters, and through the search for the zero value of this function by solving the corresponding nonlinear equation. Analysis of the behavior of the function in a given range of values of pressure and depth of the weld showed that such a formulation of the problem is quite correct by the mathematical point of view. The results of testing of analytical and numerical calculations for the dependence of the welding seam depth on the helium pressure in the discharge chamber of the gun, obtained for titanium products, have been presented and analyzed in the article.*

Keywords: nonlinear equation, electron beam, electron beam welding, seam depth, electron beam focal diameter, high voltage glow discharge electron guns

### **Вступ**

Сьогодні технології електронно-променевого зварювання знаходять широке впровадження у різних галузях промисловості, зокрема у машинобудуванні, авіабудуванні, космічній індустрії, хімічній промисловості, а також в приладобудуванні та електронній промисловості. Загалом це пов'язано з такими вагомими перевагами сучасних електронно-променевих зварювальних технологій [1 – 6]:

1. висока якість виробів, яка обумовлена реалізацією процесу зварювання у вакуумі в умовах високої чистоти;

2. висока загальна та питома потужність електронного пучка, що забезпечує можливість отримання високоякісних швів з глибоким проплавленням, зокрема для виробів з великою товщиною металевих стінок;

3. простота керування просторовими та геометричними параметрами електронного пучка з використанням електричних та магнітних полів;

4. простота керування потужністю електронних пучків через введення додаткових електродів та використання методів модуляції.

Електронно-променево зварювання металів у вакуумі є сучасною та перспективною технологією, яка спроможна сьогодні замінити традиційні способи зварювання, зокрема аргонно-дугове та контактне, а також складає серйозну конкуренцію сучасним технологіям лазерного зварювання [1 – 3, 7]. Головною перевагою електронного пучка над лазерним як зварювального технологічного інструменту є висока якість виробів, яка забезпечується через проведення зварювання у вакуумі, а також можливість забезпечення ефективного керування просторовими та енергетичними параметрами електронного пучка з використанням електричних та магнітних полів [1 – 4]. Незважаючи на те, що зварювання лазерним пучком можна проводити в повітрі в умовах атмосферного тиску, взагалі без використання вакуумного обладнання [7], якість деталей, які були зварювані електронним пучком в умовах високого або середнього вакууму, зазвичай є значно кращою [1 – 4].

Проте, важливим чинником подальшого розвитку технологій електронно-променевого зварювання та їх впровадження у сучасне промислове виробництво є спрощення та зниження вартості технологічного електронно-променевого зварювального обладнання. Одним із шляхів такого розвитку електронно-променевих зварювальних технологій є проведення технологічної операції зварювання у низькому та середньому вакуумі з використанням захисного або активного газового середовища [1 – 4]. Проте, у разі застосування для формування електронного пучка традиційно використовуваних джерел електронів із розжарюваними катодами, для забезпечення нормальної роботи генератора електронного пучка необхідно додатково створювати високий вакуум в об'ємі гармати та виключати можливість наявності активних газів. За такої умови проведення технологічної операції зварювання в низькому вакуумі потребує суттєвого ускладнення вакуумного технологічного обладнання, що у значній мірі збільшує його вартість [1 – 3].

Тому сьогодні інженерна розробка джерел електронів, призначених для застосування в електронно-променевих технологіях зварювання, проводиться за наступними двома головними напрямками:

1. подальше удосконалення конструкцій джерел електронів із розжарюваними катодами та зварювального обладнання на їх основі [1 – 3];

2. розробка джерел електронів нового типу, робота яких ґрунтується на новітніх фізичних принципах, одним з яких може бути емісія заряджених частинок з іонізованого газу або із плазми під дією потужного електричного поля [4 – 6, 8 – 10].

Серед таких джерел електронів, робота яких забезпечується через запалювання тліючого розряду низького тиску, окреме місце займають електронні гармати на основі високовольтного тліючого розряду (ВТР). Головний принцип роботи таких гармат полягає у тому, що емісія електронів здійснюється з розвиненої поверхні охолоджуваного катода як результат її бомбардування іонами залишкового газу, джерелом яких є анодна плазма [8 – 10]. Робочий тиск електронних гармат ВТР відповідає низькому вакууму та зазвичай лежить в діапазоні 1 – 10 Па [4, 8 – 10]. Тому фізичні основи роботи гармат ВТР забезпечують можливість проведення технологічної операції зварювання електронним пучком в низькому вакуумі, у середовищі захисних або активних газів, на простому технологічному обладнанні [8, 9]. Іншою особливістю

технологічних гармат ВТР є можливість формування профільних електронних пучків з метою забезпечення швидкодійного моноімпульсного зварювання виробів із складною геометрією кільцевим, прямокутним або лінійним швом. Наприклад, такий спосіб є вкрай ефективним для зварювання трубчастих виробів, інших круглих деталей, або корпусів електронних приладів [9]. Відповідна схема процесу зварювання показана на рис. 1.

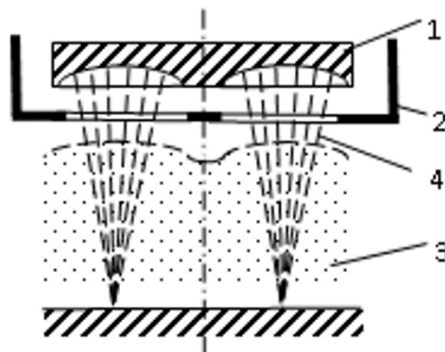


Рис. 1. Принцип формування кільцевого зварювального шва з використанням електронної гармати ВТР. 1 – охолоджуваний катод, 2 – анодна діафрагма, 3 – електронний пучок, 4 – анодна плазма

Проте аналітичних та чисельних методів розрахунку геометричних параметрів зварювального шва, з урахуванням геометричних та енергетичних параметрів електронних пучків, які формуються електронними гарматами ВТР, сьогодні не існує. Отримання та аналіз таких аналітичних співвідношень є метою даної статті.

### Постановка задачі

У загальному вигляді аналіз залежності глибини зварювального шва від прискорювальної напруги, струму електронного пучка та його діаметра може бути проведений через аналітичне або чисельне розв’язування однорідного рівняння теплопровідності, яке в декартових координатах записується наступним чином [1, 11]:

$$\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial t} - a^2 \left( \frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial z^2} \right) = 0, \quad a = \frac{\chi}{c_p \rho}, \quad (1)$$

де  $t$  – час,  $x, y, z$  – просторові координати,  $a$  – коефіцієнт термічної дифузії,  $\chi$  – теплопровідність металу,  $c_p$  – ізобарна теплопровідність металу та  $\rho$  – густина металу.

Для пошуку аналітичних розв’язків рівняння теплопровідності (1) зазвичай розглядають його ядро, яке у загальному вигляді записується наступним чином [1, 11]:

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4a^2 t}\right). \quad (2)$$

Проте розв’язування термодинамічних задач з використанням рівнянь (1, 2) є досить складним та потребує використання спеціальних аналітичних [3, 11] та чисельних [12] методів. Такі способи аналізу параметрів зварювального шва є вкрай складними з обчислювальної точки зору та потребують використання потужних обчислювальних ресурсів [1]. Недолік такої узагальненої постановки завдання моделювання геометрії зварювального шва також полягає у тому, що аналіз отриманої функції

$$h_{\text{шв}} = f(I_{\text{п}}, U_{\text{пр}}, p_{\text{г}}), \quad (3)$$

де  $h_{шв}$  – глибина зварювального шва,  $I_{п}$  – струм електронного пучка,  $U_{пр}$  – прискорювальна напруга,  $p_{г}$  – робочий тиск у гарматі ВТР, можливий лише через аналіз отриманих графічних залежностей [1]. Тобто, до функції (3), у разі використання складних методів комп’ютерних розрахунків, не може бути застосований ефективний сучасний математичний апарат функціонального аналізу з метою визначення її загальних властивостей [13].

Тому для комплексного аналізу залежності параметрів зварювального шва від термодинамічних властивостей металу, який зварюється, а також від енергетичних та геометричних параметрів електронного пучка, більш зручно та ефективно використовувати добре відомі спрощені аналітичні розв’язки рівняння (1), отримані з урахуванням особливостей протікання процесу зварювання та відповідних граничних умов [1, 3]. Загальний недолік цих співвідношень, з точки зору можливості їх використання для проведення реальних інженерних розрахунків, полягає у тому, що в них функція для визначення параметрів зварювального шва (3) записана як залежність від задалегідь відомих енергетичних та геометричних параметрів електронного пучка, а саме:

$$h_{шв} = f_1(I_{п}, U_{пр}, d_{п}), \quad (4)$$

де  $d_{п}$  – діаметр електронного пучка.

Цілком зрозуміло, що узагальнене співвідношення (4) безпосередньо не може бути використано для проведення аналітичних та числових оцінок глибини зварюваного шва з наступних причин.

1. У співвідношенні (4) не враховується залежність діаметра електронного пучка від його струму  $d_{п}(I_{п})$ .

2. У співвідношенні (4) не враховується залежність струму гармати ВТР від тиску в розрядній камері  $I_{п}(p_{г})$ .

Аналітичні співвідношення, які описують залежність  $d_{п}(I_{п})$ , у загальному вигляді наведені в роботах [14, 15], а аналітичне співвідношення  $I_{п}(p_{г})$ , безпосередньо для умов горіння ВТР, було отримане у роботі [8]. Узагальнені оцінки енергетичних та геометричних параметрів електронних пучків, які формуються джерелами електронів ВТР, а також питомої потужності таких електронних пучків, були отримані та описані у роботі [10].

Тому метою даної роботи є отримання та подальший аналіз простих аналітичних співвідношень для оцінки параметрів зварювального шва у разі використання технологічних електронних гармат ВТР. Такі співвідношення можна отримати через аналіз функціональних залежностей, записаних у вигляді (4) та наведених у монографії [1], підставляючи в них відомі залежності  $d_{п}(I_{п})$ , наведені в роботах [8, 14, 15], та залежність  $I_{п}(p_{г})$ , наведену у роботі [8]. Аналіз отриманих аналітичних функцій, записаних у вигляді (3), а також побудованих на їхній основі графічних залежностей, дозволить провести узагальнену теоретичну оцінку технологічних можливостей зварювальних електронних гармат ВТР. Така оцінка має вельми велике практичне значення для проектувальників електронно-променевого зварювального технологічного обладнання.

### **Порівняльний аналіз аналітичних співвідношень, призначених для оцінки глибини проплавлення зварювального шва**

Узагальнений розгляд різних методів розрахунку глибини проплавлення зварювального шва наведений у монографіях [1, 3]. Загалом, головними способами розрахунку геометричних параметрів зварювального шва є наступні [1, 3].

1. Розв'язування рівняння теплопровідності (1) для визначених граничних умов з використанням чисельних методів [1, 3].

2. Аналітичне розв'язування рівняння теплопровідності (1) для заданих граничних умов через аналіз особливостей його загального рішення, заданого функцією (2). Зазвичай результатом таких аналітичних перетворень є складні нелінійні рівняння, які розв'язуються з використанням чисельних методів [12].

3. Пошук, з урахуванням заданих граничних умов, простих аналітичних співвідношень, записаних у вигляді (4).

Головною перевагою першого та другого способів розрахунку геометричних параметрів зварювального шва є висока точність та можливість врахування різних фізичних та технологічних факторів, які можуть суттєво впливати на процес зварювання [1, 3]. Проте головним недоліком цих способів є їх складність з обчислювальної точки зору [1, 3], а точність таких розрахунків суттєво залежить від правильності описання граничних умов [1, 3] та обчислювальних особливостей використовуваних чисельних методів [12]. Крім цього, час проведення таких розрахунків, навіть за умови використання сучасних комп'ютерних систем з великою обчислювальною потужністю, може не задовольняти вимогам промислового виробництва. Ці вимоги мають особливо велике значення у разі проведення розрахунків геометричних параметрів шва у реальному часі, тобто, безпосередньо в ході виконання процесу зварювання з метою автоматизації контролю якості зварювальних виробів [1]. Крім цього, оцінки геометрії зварювального шва, проведені першим та другим способом, можна проводити лише з використанням отриманих графічних залежностей, без аналізу особливостей поведінки аналітичної функції (4) у разі зміни параметрів процесу зварювання. Тому на практиці, для проведення теоретичних оцінок з метою пошуку способів поліпшення якості зварюваного з'єднання, часто використовують методи інтерполяції отриманих чисельних розрахунків або методи апроксимації експериментальних даних [1, 16 – 18].

У зв'язку з цим, в інженерній практиці, для попереднього оцінювання глибини зварювального з'єднання на етапі визначення параметрів технологічного процесу зварювання, часто використовують більш прості аналітичні співвідношення. Тобто, з практичної точки зору, найбільш цікавим, серед перелічених вище, є третій спосіб розрахунку [1]. Проте головним недоліком цього способу є суттєві обмеження з точки зору врахування всіх впливових факторів та фізичних закономірностей, притаманних процесу електронно-променевого зварювання [1]. Тобто, точність розрахунків відносно експериментальних даних у даному разі може бути невисокою, але безперечними перевагами використання третього способу оцінювання параметрів зварювального з'єднання є висока швидкість розрахунків та можливість безпосереднього оцінювання впливу головних параметрів технологічного процесу зварювання на геометрію шва через аналіз особливостей аналітичної функції (4).

У монографії [1] наведені наступні аналітичні співвідношення для наближеної оцінки глибини зварюваного шва.

1. Універсальна оцінка за співвідношенням Хабланіана [1, 19]:

$$h_{шв} = 0,2 \sqrt{\frac{2a_T}{v_{св} r_{п}}} \cdot \frac{U_{пр} I_{п}}{4\lambda_T T_{пл} \left(1 + \frac{L_{пл}}{cT_{пл}}\right)}, \quad (5)$$

де  $a_T$  – коефіцієнт температуропровідності,  $v_{св}$  – швидкість зварювання,  $r_{п}$  – радіус електронного пучка,  $U_{пр}$  – прискорювальна напруга,  $I_{п}$  – струм пучка,  $\lambda_T$  – коефіцієнт теплопровідності металу,  $T_{пл}$  – температура плавлення металу,  $L_{пл}$  – питома теплота плавлення металу,  $c$  – теплоємність металу.

2. Уточнена оцінка для зварювальних з'єднань з глибоким проплавленням за співвідношенням Лопатко, Карташова та Ткачова [1, 20]:



$$h_{\text{шв}} = \frac{0,132U_{\text{пр}}I_{\text{п}}}{\lambda_{\text{T}}T_{\text{пл}}\left(\left(\frac{2v_{\text{св}}r_{\text{п}}}{a_{\text{T}}}\right)\left(1+\frac{L_{\text{пл}}}{cT_{\text{пл}}}\right)\right)^{0,815}}. \quad (6)$$

Перепишемо співвідношення (5, 6) у вигляді зворотної залежності:

$$I_{\text{п}} = f_2(h_{\text{шв}}, U_{\text{пр}}, d_{\text{п}}). \quad (7)$$

Перевага записаного співвідношення (7) над співвідношенням (4), з точки зору розв'язування практичних завдань технології електронно-променевого зварювання, полягає у тому, що зазвичай товщина шва  $h_{\text{шв}}$  є відомим параметром, який забезпечує високу якість зварювальних виробів. Тому розробникам технології зварювання завжди важливо знати, за умови якої потужності електронного пучка досягається необхідна товщина шва [1 – 3]. Враховуючи те, що в промисловому зварювальному електронно-променевому обладнанні прискорювальна напруга  $U_{\text{пр}}$  зазвичай є стабільною величиною [1, 2], важливим інженерним завданням для визначення та стабілізації параметрів технологічного процесу зварювання є пошук аналітичної залежності струму електронного пучка  $I_{\text{п}}$  від глибини шва  $h_{\text{шв}}$ , прискорювальної напруги  $U_{\text{пр}}$  та діаметра пучка  $d_{\text{п}}$ , записаної у вигляді (7).

З урахуванням наведених вище практичних міркувань, наведені співвідношення (5, 6) можна переписати наступним чином:

$$I_{\text{п}} = \frac{20h_{\text{шв}}\lambda_{\text{T}}T_{\text{пл}}\left(1+\frac{L_{\text{пл}}}{cT_{\text{пл}}}\right)\sqrt{\frac{v_{\text{св}}r_{\text{п}}}{2a_{\text{T}}}}}{U_{\text{пр}}}. \quad (8)$$

$$I_{\text{п}} = \frac{7,576h_{\text{шв}}\lambda_{\text{T}}T_{\text{пл}}\left(\left(\frac{2v_{\text{св}}r_{\text{п}}}{a_{\text{T}}}\right)\left(1+\frac{L_{\text{пл}}}{cT_{\text{пл}}}\right)\right)^{0,815}}{U_{\text{пр}}}. \quad (9)$$

Залежності  $I_{\text{п}}(h_{\text{шв}}, U_{\text{пр}}, d_{\text{п}})$ , отримані з використанням співвідношень (8, 9), наведені на рис. 2. З аналізу співвідношень (8, 9) зрозуміло, що залежність  $I_{\text{п}}(h_{\text{шв}})$  має лінійний характер. Слід відзначити, що залежність (8) є більш універсальною, ніж формула (9), та не містить складної для аналізу та проведення точних розрахунків степеневі функції з раціональним показником степені. Головна перевага залежності (9) над залежністю (8) полягає у тому, що вона дозволяє точніше оцінювати значення струму електронного пучка для зварювальних з'єднань з глибоким проплавленням на металевих виробах великої товщини [1, 20]. Проте для виконання цієї вкрай складної технологічної операції зварювання зазвичай використовуються інтенсивні електронні пучки з великим струмом, великою кінетичною енергією електронів та малим кутом збіжності [1, 3]. Джерела електронів ВТР, для яких будуть проводитись подальші аналітичні оцінки, не відповідають цим вимогам. Зазвичай електронні пучки, сформовані гарматами ВТР, використовуються для зварювання металевих виробів невеликої товщини [5, 8 – 10]. Тому надалі, для оцінювання значення струму електронного пучка, необхідного для забезпечення заданої глибини проплавлення зварювального шва, а також відповідного значення тиску у розрядній камері гармати ВТР, будемо використовувати співвідношення (8).

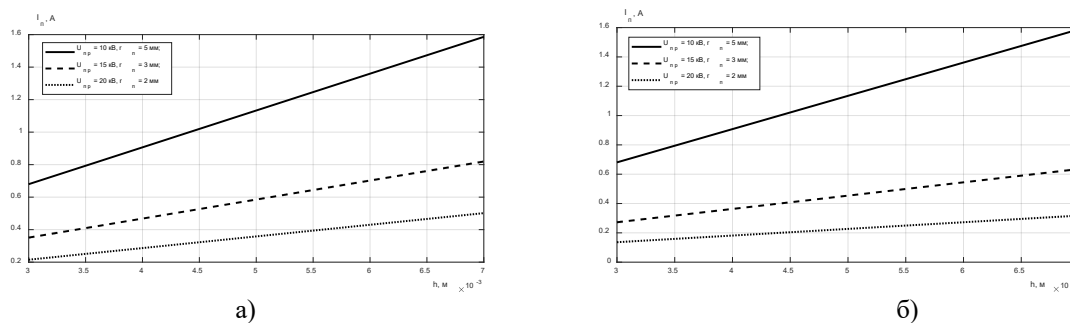


Рис. 2. Залежності глибини зварювального шва від струму електронного пучка, його радіусу та прискорювальної напруги, отримані з використанням співвідношень (8) (а) та (9) (б)

Загальний недолік наведених співвідношень (8, 9) полягає у тому, що, згідно з загальновідомими фізичними особливостями формування потужних електронних пучків, діаметр пучка  $d_p$  безпосередньо залежить від його струму  $I_p$  та прискорювальної напруги  $U_{пр}$ . Тому метою подальших досліджень має бути пошук аналітичних залежностей  $d_p(I_p, U_{пр})$  [8, 14, 15]. Враховуючи те, що в діодних джерелах електронів ВТР струм електронного пучка визначається тиском у розрядній камері та використовуваним робочим газом, тобто, параметр  $I_p$  безпосередньо залежить від тиску. З точки зору ефективності подальшого практичного використання, зручніше аналізувати функціональну залежність для тиску газу у розрядній камері гарматою  $p_r$  від наперед заданих незалежних параметрів, а саме, прискорювальної напруги  $U_{пр}$  та необхідної глибини проплавлення зварюваного шва  $h_{шв}$ . Аналітичні залежності струму електронного пучка ВТР від тиску робочого газу відповідають вольт-амперним характеристикам ВТР та були наведені та проаналізовані в роботах [8, 16]. Узагальнені теоретичні оцінки розподілу струму електронного пучка ВТР в його фокусі були проведені в роботі [10, 17]. Тобто, узагальненим завданням подальших досліджень є пошук функціональної залежності, зворотної до формули (3):

$$p_r = f_4(U_{пр}, h_{шв}). \tag{10}$$

**Аналітична залежність тиску в розрядній камері від необхідної глибини зварювального шва та прискорювальної напруги та результати тестових розрахунків для титанових виробів**

У монографії [8] була наведена наступна аналітична залежність для мінімального радіусу електронного пучка, який формується гарматою ВТР, від параметрів горіння розряду та геометрії електронної системи:

$$r_e = \frac{r_k}{\alpha} \sqrt{\frac{\Delta U}{U_{пр}}}, \tag{11}$$

де  $r_k$  – радіус робочої поверхні катоду,  $\alpha$  – кут збіжності електронного пучка,  $\Delta U$  – розкид електронів пучка за швидкостями, який для фізичних умов горіння ВТР складає близько  $\Delta U = 30$  В [8]. З урахуванням співвідношення (11) та залежності (8), записаної у вигляді функції (7), залежність струму електронного пучка  $I_p$  від глибини зварювального шва  $h_{шв}$  та прискорювальної напруги можна  $U_{пр}$  записати у вигляді наступного аналітичного виразу:

$$I_p(h_{шв}, U_{пр}) = \frac{20h_{шв}\lambda_T T_{пл} \left(1 + \frac{L_{пл}}{cT_{пл}}\right) \sqrt{\frac{v_{св} r_k e}{2a_T}}}{U_{пр}} = \frac{20h_{шв}\lambda_T T_{пл} \left(1 + \frac{L_{пл}}{cT_{пл}}\right) \sqrt{\frac{v_{св} r_k}{\alpha} \sqrt{\frac{\Delta U}{U_{пр}}}}}{U_{пр}}. \tag{12}$$

Залежність струму електронного пучка, який формується гарматою ВТР, від тиску газу у розрядній камері та прискорювальної напруги, яка описує вольт-амперну характеристику ВТР, записується в наступному вигляді [8, 16]

$$I_{\text{п}} = AU_{\text{пр}}^k p_{\Gamma}^m, \quad (13)$$

де  $A$ ,  $k$ ,  $m$  – напівемпіричні коефіцієнти, які зазвичай обчислюються через апроксимацію експериментальних даних. У роботах [8, 16, 18] було відмічено, що коефіцієнти  $k$  та  $m$  для фізичних умов горіння ВТР лежать в числовому діапазоні [1; 2]. Чітке визначення числового діапазону дозволяє спростити завдання пошуку цих коефіцієнтів під час вирішення задачі апроксимації з використанням відомих чисельних методів розв’язування оптимізаційних задач [12, 21]. Для пошуку коефіцієнтів співвідношення (13) за відомими експериментальними даними можуть бути використані програмні засоби та функції системи науково-технічних розрахунків MatLab, зокрема функції аналітичного процесора [16, 18].

Підставляючи аналітичний вираз (13) до отриманого співвідношення (12), можна записати аналітичну залежність  $p_{\Gamma}(h_{\text{шв}}, U_{\text{пр}})$  у вигляді явної функції (10) наступним чином:

$$p_{\Gamma}(h_{\text{шв}}, U_{\text{пр}}) = \left( \frac{20h_{\text{шв}}\lambda_{\Gamma}T_{\text{пл}}(\Delta U)^{0,25} \left(1 + \frac{L_{\text{пл}}}{cT_{\text{пл}}}\right) \sqrt{\frac{v_{\text{св}}r_{\text{к}}}{2a_{\Gamma}\alpha}}}{AU_{\text{пр}}^{1,25+k}} \right)^{\frac{1}{m}}. \quad (14)$$

Розрахунки тиску в розрядній камері за співвідношенням (14) проводились для виробів з титану та для гелію як робочого газу гармати ВТР. Параметри моделі були наступними:  $a_{\Gamma} \approx 25 \cdot 10^6 \frac{\text{М}^2}{\text{с}}$ ,  $v_{\text{св}} = 2 \frac{\text{М}}{\text{ХВ}}$ ,  $U_{\text{пр}} = 10 - 20$  кВ,  $\lambda_{\Gamma} = 15 \frac{\text{Вт}}{\text{М}\cdot\text{К}}$ ,  $T_{\text{пл}} = 1668^{\circ}\text{С}$ ,  $L_{\text{пл}} \approx 18,8 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль}}$ ,  $c \approx 600 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$ ,  $r_{\text{к}} = 0,035$  м,  $\alpha = 15^{\circ}$ ,  $A = 97 \frac{\text{А}}{\text{В}\cdot\text{Па}}$ ,  $k = 1,4$ ,  $m = 1,5$ . Невідомі емпіричні коефіцієнти вольт-амперної характеристики ВТР  $A$ ,  $k$  та  $m$  визначалися в ході проведення експериментальних досліджень, які були виконані на експериментальному електронно-променевому обладнанні кафедри електронних пристроїв та систем факультету електроніки Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» та Приватного Акціонерного Товариства НВО «Червона хвиля». Результати розрахунків, виконаних з використанням співвідношення (14), наведені на рис. 3.

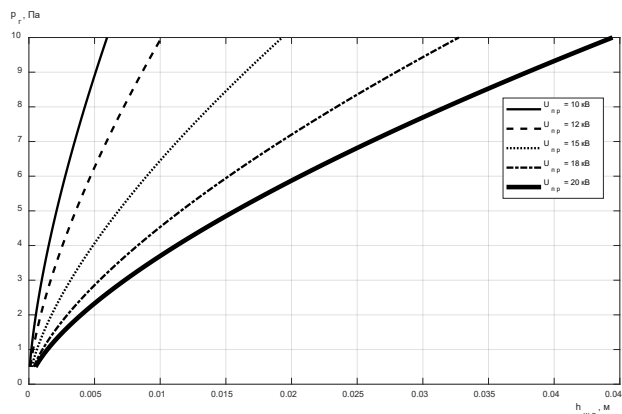


Рис. 3. Залежності тиску у розрядній камері гармати ВТР від необхідної глибини зварювального шва від та прискорювальної напруги, отриманої з використанням співвідношення (14)

Головний недолік використання співвідношення (11) для оцінювання радіуса електронного пучка в фокусі полягає в тому, що в ньому не врахована залежність радіуса пучка від його струму, яка обумовлена просторовим зарядом електронів та є однією із головних закономірностей щодо формування електронних пучків. Тому залежності, наведені на рис. 2, можна використовувати лише для малих струмів електронного пучка за умови компенсації просторового заряду електронів позитивними іонами залишкового газу.

### Залежність фокального радіуса електронного пучка від його струму та визначення необхідного тиску в камері гармати з урахуванням цієї залежності

З теорії формування електронних пучків загальновідомою є наступна аналітична залежність, яка дозволяє визначити значення мінімального радіусу електронного пучка в фокусі  $r_{\min}$  за умови відомих значень струму пучка, прискорювальної напруги, кута збіжності пучка та радіусу робочої поверхні катоду [14, 15]:

$$\ln\left(\frac{r_k}{r_{\min}}\right) = 1,04 \cdot 10^{-3} \frac{U_{\text{пр}}^{1,5}}{I_{\text{п}}} \text{tg}(\alpha). \quad (15)$$

Перепишемо рівняння (15) у вигляді явної функціональної залежності мінімального радіусу електронного пучка від його електричних та геометричних параметрів, тобто як функцію  $r_{\min}(I_{\text{п}}, U_{\text{пр}}, \alpha, r_k)$ :

$$r_{\min} = r_k \exp\left(-1,04 \cdot 10^{-3} \frac{U_{\text{пр}}^{1,5}}{I_{\text{п}}} \text{tg}(\alpha)\right) \quad (16)$$

Підставляючи співвідношення (16) до співвідношення (8), отримуємо наступний результат:

$$I_{\text{п}} = \frac{20h_{\text{шв}}\lambda_{\text{T}}T_{\text{пл}}\left(1 + \frac{L_{\text{пл}}}{cT_{\text{пл}}}\right) \sqrt{\frac{v_{\text{св}}r_k}{2a_{\text{T}}\exp\left(\frac{1,04 \cdot 10^{-3} \text{tg}(\alpha)U_{\text{пр}}^{1,5}}{I_{\text{п}}}\right)}}}{U_{\text{пр}}}. \quad (17)$$

Після підстановки до отриманого рівняння (17) співвідношення (13), яке описує залежність струму електронного пучка від тиску в технологічній камері гармати ВТР, та відповідних аналітичних перетворень, отримуємо наступний алгебраїчний вираз:

$$f(p_{\text{Г}}, h_{\text{шв}}, U_{\text{пр}}) = \frac{20h_{\text{шв}}\lambda_{\text{T}}T_{\text{пл}}\left(1 + \frac{L_{\text{пл}}}{cT_{\text{пл}}}\right) \sqrt{\frac{v_{\text{св}}r_k}{2a_{\text{T}}\exp\left(\frac{1,04 \cdot 10^{-3} \text{tg}(\alpha)U_{\text{пр}}^{1,5}}{AU_{\text{пр}}^k p_{\text{Г}}^m}\right)}}}{U_{\text{пр}}} - AU_{\text{пр}}^k p_{\text{Г}}^m = 0. \quad (18)$$

Отримане рівняння (18) є нелінійним відносно  $p_{\text{Г}}$  та його можна розв'язати з використанням чисельних методів [12, 21]. Дослідження функції (18) показали, що нелінійне рівняння  $f(p_{\text{Г}}) = 0$  має розв'язок в досліджуваному діапазоні прискорювальної напруги  $U_{\text{пр}} = 10 - 30$  кВ та глибини зварювального шва  $h_{\text{шв}} = 0,002 - 0,01$  м. Отримані графічні залежності для функції  $f(p_{\text{Г}})$  для прискорювальної напруги  $U_{\text{пр}} = 20$  кВ та різних значень глибини зварювального шва  $h_{\text{шв}}$  наведені на рис. 4, а.

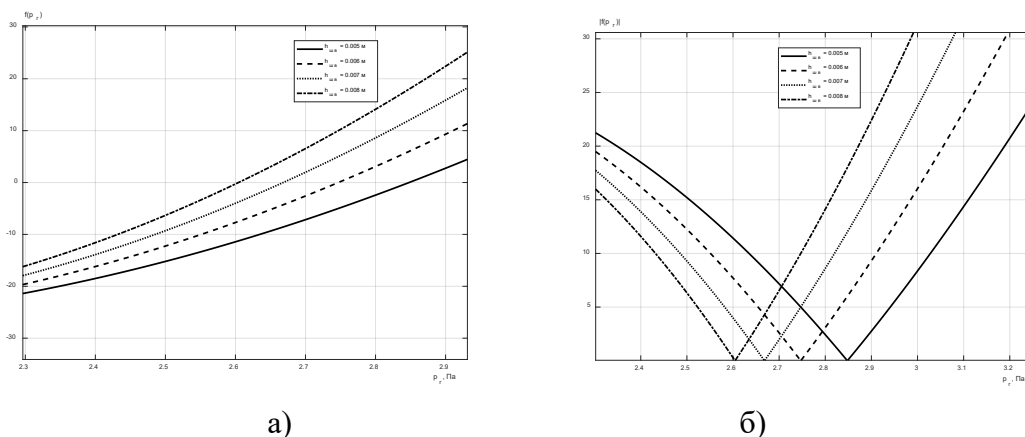


Рис. 4. Дослідження поведінки функції  $f(p_r)$ , заданої співвідношенням (18) (а), та модуля цієї функції  $|f(p_r)|$  (б) для різних значень глибини зварювального шва  $h_{шв}$ . Прискорювальна напруга –  $U_{пр} = 20$  кВ

Чисельне розв’язування рівняння (18) у визначеному діапазоні значень прискорювальної напруги  $U_{пр}$  та глибини зварювального шва  $h_{шв}$  проводилось через пошук мінімального значення модуля дослідженої функції  $f(p_r)$ . Тобто вважалось, що розв’язок нелінійного рівняння (18) відповідає умові [12, 18, 21]:

$$p_r = \arg(\min(|f(p_r)|)). \quad (19)$$

Відповідні графічні залежності для функції  $|f(p_r)|$  наведені на рис. 4, б.

Графічні залежності для функції  $p_r(h_{шв}, U_{пр})$ , отримані як результат чисельного розв’язку нелінійного рівняння (18) з використанням співвідношення (19), наведені на рис. 5.

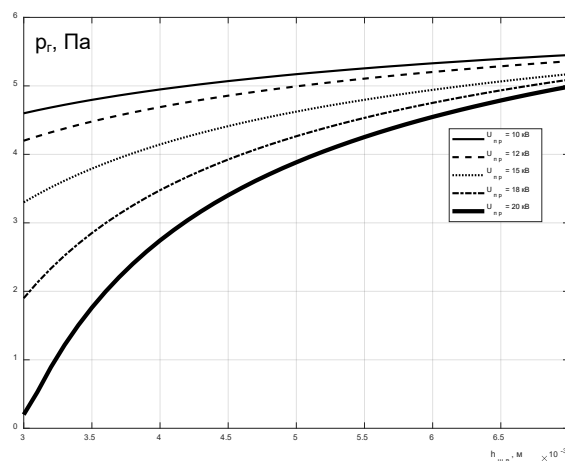


Рис. 5. Залежності  $p_r(U_{пр}, h_{шв})$ , отримані як результат чисельного розв’язування нелінійного рівняння (18)

### Обговорення отриманих результатів

Із графічних залежностей  $p_r(h_{шв}, U_{пр})$ , наведених на рис. 3 та рис. 5, зрозуміло, що розрахунки з використанням співвідношень (14) та (19) дають дещо різні результати. На залежностях, які наведені на рис. 5, значення тисків для невеликих величин глибини шва є більшими, а для великих величин – меншими. Таку розбіжність отриманих розрахункових результатів можна пояснити тим, що в аналітичному співвідношенні (14) не врахована залежність фокального радіуса електронного пучка від його струму  $r_{\min}(I_n)$ , задана

співвідношенням (16). З іншого боку, ця аналітична залежність отримана для умов генерації електронного пучка в вакуумі без урахування компенсації просторового заряду електронів позитивними іонами залишкового газу, тобто, оцінка збільшення мінімального радіуса електронного пучка із зростанням його струму, зроблена з використанням співвідношення (18), може бути дещо завищеною [8 – 10]. Для більш точних оцінок значення тиску у розрядній камері необхідно знайти аналітичну залежність, яка точніше описує умов генерації електронного пучка в ВТР. У будь-якому разі, теоретичні дослідження, описані у даній статті, можуть бути вкрай цікавими для проектувальників електронно-променевого зварювального обладнання.

### Висновки

У статті наведено аналітичні залежності, які дозволяють проводити попередню наближену оцінку значення тиску у розрядній камері електронної гармати ВТР для технологічного процесу електронно-променевого зварювання за умови відомої прискорювальної напруги, термодинамічних властивостей зварюваних металів та необхідної глибини зварювального з'єднання. Аналітичне співвідношення (14) відповідає узагальненому вигляду функції (10) та дозволяє проводити безпосередні розрахунки, а співвідношення (18) неможливо записати у вигляді функції (10), тому залежність  $p_r(U_{пр}, h_{шв})$  можна отримати лише як чисельний розв'язок рівняння (18). Проте несумнівна перевага співвідношення (18) полягає в тому, що в ньому врахована залежність мінімального радіуса електронного пучка від його струму та прискорювальної напруги  $r_{\min}(I_{пр}, U_{пр})$ , задана рівнянням (16). Тестові розрахунки, проведені для виробів із титану з використанням співвідношення (18), дозволили правильно оцінити технологічні можливості електронних гармат ВТР та необхідне значення тиску у розрядній камері гармати. Стаття може бути цікавою для спеціалістів в області технології електронно-променевого зварювання та для проектувальників зварювального електронно-променевого обладнання.

### Список використаної літератури

1. Электронно-лучевая сварка/ под общей редакцией Б.Е. Патона Киев: Наукова думка, 1987. 256 с.
2. Шиллер З., Гайзиг У., Панцер З. Электронно-лучевая технология. Москва: Энергия, 1980. 528 с.
3. Рыкалин Н.Н., Зуев И.В., Углов А.А. Основы электронно-лучевой обработки материалов. Москва: Машиностроение, 1978. 239 с.
4. Завьялов М.А., Крейнделъ Ю.Е., Новиков А.А., Шантурин Л.П. Плазменные процессы в технологических электронных пушках. Москва: Атомиздат, 1989. 256 с.
5. Krasik Y.E., Gleizer J.Z., Krokhmal A., Chirko K. et al. High-current electron sources based on gaseous discharges. *Vacuum*. 2003. Vol. 77. no 4. P. 391–398.
6. Gruzdev V.A., Zalesski V.G., Antonovich D.A., Golubev V.P. Universal plasma electron source. *Vacuum*. 2003. Vol. 77. no 4. P. 399–406.
7. Коваленко В.С. Лазерная технология: учебник. Киев: Вища школа, 1989. 280.
8. Новиков А.А. Источники электронов высоковольтного тлеющего разряда с анодной плазмой. Москва: Энергоатомиздат, 1983. 96 с.
9. Denbnovetskiy S., Melnyk V., Melnyk I., Tugai B., Tuhai S., Wojcik W., Lawicki T., Assambay A., Luganskaya S. Principles of operation of high voltage glow discharge electron guns and particularities of its technological application. *Proceedings of SPIE. The International Society of Optical Engineering*. 2017. P. 10445–10455.

10. Melnyk I., Tyhai S., Pochynok A. Universal complex model for estimation the beam current density of high voltage glow discharge electron guns. *Lecture Notes in Networks and Systems: manual book* / Edited by Ilchenko M. Yu. Springer, 2021. 152. P. 319–341.
11. Исаченко В.П, Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопроводность. Москва: Энергоатомиздат, 1981. 417 с.
12. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: учеб. пособие для вузов. Москва: Наука, 1989. 432 с.
13. Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функциональный анализ: курс лекций. Киев: Высшая школа, 1990. 600 с.
14. Молоковский С.И., Сушков Д.И. Интенсивные электронные и ионные пучки. Москва: Энергоатомиздат, 1991. 304 с.
15. Силадьи М. Электронная и ионная оптика. Москва: Мир, 1990. 640 с.
16. Мельник И.В. Аппроксимация вольт-амперных характеристик технологических источников электронов высоковольтного тлеющего разряда с использованием средств системы MatLab. *Вестник Херсонского национального технического университета*. 2009. Вып. 2 (35). С. 299–305.
17. Мельник І.В., Починок А.В. Дослідження класу алгебраїчних функцій для інтерполяції межових траєкторій короткофокусних електронних пучків. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2020. №3. С. 23–39.
18. Мельник І.В. Система науково-технічних розрахунків MatLab та її використання для розв'язання задач із електроніки: навчальний посібник у 2-х томах. Т. 2. Основи програмування та розв'язання прикладних задач. Київ: Університет «Україна», 2009. 327 с.
19. Hablani M.H. A correlation of welding variables. *Proceedings of IV Symposium of Electron Beam Technologies*. Bosotn, 1962. P. 262–268.
20. Лопатко В.А., Карташов Г.В., Ткачев Л.Г. и др. Определение глубины проплавления при электронно-лучевой сварке металлов большой толщины. *V Всесоюзная конференция по электронно-лучевой сварке*. Киев: Наукова думка, 1977. С. 16–19.
21. Василев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач: учебное пособие для вузов. Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1988. 552 с.

#### References

1. Paton, B.E. (Ed.). (1987). *Elektronno-luchevaya svarka*. Kiev: Naukova dumka.
2. Shiller, Z., Gayzig, U., & Pantser, Z. (1980). *Elektronno-luchevaya tehnologiya*. Moskva: Energiya.
3. Ryikalin, N.N., Zuev, I.V., & Uglov, A.A. (1978). *Osnovyi elektronno-luchevoy obrabotki materialov*. Moskva: Mashinostroenie.
4. Zavyalov, M.A., Kreyndel, Yu.E., Novikov, A.A., & Shanturin, L.P. (1989). *Plazmennyye protsessyi v tehnologicheskikh elektronnyih pushkah*. Moskva: Atomizdat.
5. Krasik, Y.E., Gleizer, J.Z., Krokmal, A., Chirko, K. et al (2003). High-current electron sources based on gaseous discharges. *Vacuum*. 77, 4, 391–398.
6. Gruzdev, V.A., Zalesski, V.G., Antonovich, D.A., & Golubev V.P. (2003). Universal plasma electron source. *Vacuum*. 77, 4, 399–406.
7. Kovalenko, V.S. (1989). *Lazeranya tehnologiya*. Kyiv: Vyscha Shkola.
8. Novikov, A.A. (1983). *Istochniki elektronov vysokovol'tnogo tleyushego razryada s anodnoi plazmoi*. Moskva: Energoatomizdat.
9. Denbnovetskiy, S., Melnyk, V., Melnyk, I., Tugai, B., Tyhai, S., Wojcik, W., Lawicki, T., Assambay, A., & Luganskaya, S. (2017). Principles of operation of high voltage glow

- discharge electron guns and particularities of its technological application. *Proceedings of SPIE. The International Society of Optical Engineering*, pp. 10445– 10455.
10. Melnyk, I., Tyhai, S., & Pochynok, A. (2021) Universal complex model for estimation the beam current density of high voltage glow discharge electron guns. *Lecture Notes in Networks and Systems: manual book* / Edited by Ilchenko M. Yu. Springer, **152**. pp. 319–341.
  11. Isachenko, V.P., Osipova, V.A., & Sukomel, A.S. (1981). *Теплопроводность*. Moskva: Energoatomizdat.
  12. Samarskiy, A.A., & Gulin, A.V. (1989). *Численные методы: учеб. пособие для вузов*. Moskva: Nauka.
  13. Berezanskiy, Yu. M., Us, G.F., & Sheftel Z.G. (1990) *Функциональный анализ: курс лекций*. Kyiv: Vyscha Shkola.
  14. Molokovskiy, S.I., & Sushkov, D.I. (1991). *Интенсивные электронные и ионные пучки*. Moskva: Energoatomizdat.
  15. Siladi, M. (1990). *Elektronnaya i ionnaya optika*. Moskva: Mir.
  16. Melnyk, I.V. (2009) *Аппроксимация вольт-амперных характеристик технологических источников электронов высоковольтного разряда с использованием средств системы MatLab*. *Vestnik Khersonskogo natsional'nogo etnicheskogo universiteta*. **2(35)**, 299–305.
  17. Melnyk, I.V., & Pochynok, A.V. (2020) *Дослідження класу алгебраїчних функцій для інтерполяції міжових траєкторій електронних пучків*. *Systemni doslidzhennia ta informatsiini technologii*. **3**. 23–39.
  18. Melnyk, I.V. (2009) *Система науково-технічних розрахунків MatLab та її використання для розв'язання задач із електроніки*. Т. 2. *Основи програмування та розв'язання прикладних задач*. Kyiv: Universytet 'Ukraina'.
  19. Hablanian, M.H. (1962) *A correlation of welding variables*. *Proceedings of IV Symposium of Electron Beam Technologies*. Bosotn. pp. 262–268.
  20. Lopatko, V.A., Kartashov, G.V., Tkachov, L.G. at all (1977). *Определение глубины проплавления при электронно-лучевой сварке металлов большой толщины*. *V Vsesoyuznaia konferencia po elektronno-luchevoi svarke*. Kiev: Naukova dumka. pp. 16–19.
  21. Vasilev, F.P. (1988). *Численные методы решения экстремальных задач: Учебное пособие для вузов*. Moskva: Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury.

МЕЛЬНИК Ігор Віталійович – д. т. н., професор кафедри електронних пристроїв та систем факультету електроніки Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». E-mail: imelnik@phbme.kpi.ua, ORCID: [0000-0003-0220-0615](https://orcid.org/0000-0003-0220-0615).

ТУГАЙ Сергій Борисович, к. т. н., доцент кафедри електронних пристроїв та систем факультету електроніки Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». E-mail: sbtuhai@gmail.com, ORCID: [0000-0001-7646-1979](https://orcid.org/0000-0001-7646-1979).

КИРИК Володимир Олександрович, магістр кафедри електронних пристроїв та систем факультету електроніки Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», e-mail: vova.kirik1975@gmail.com

КОВАЛЬЧУК Дмитро Вікторович, директор Приватного Акціонерного Товариства НВО «Червона Хвиля», e-mail: dv\_kovalchuk@yahoo.com.



УДК 539.3

М.Л. МИРОНЕНКО

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України  
Харківський національний університет міського господарства ім. О.М. Бекетова

## ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ПАЛИВНИХ БАКІВ ПРИ РІЗНИХ УМОВАХ ЕКСПЛУАТАЦІЇ

*Дослідження коливань рідини у паливних баках космічних апаратів є необхідним для забезпечення їх стійкості під час польоту. Рідинні ракети-носії мають на борту значні запаси рідких компонентів. В паливних баках та баках окисників виникають коливання вільної поверхні рідини, на характер яких впливають також і зовнішні чинники, такі як гравітація, рівень заповнення баків, їх форма тощо. Виникає необхідність визначення форм та частот коливань вільної поверхні рідини для забезпечення стійкого стану літального апарату під час польоту. Для вирішення цієї задачі застосовано методи математичного моделювання. Розглянуто дослідження задачі малих коливань у резервуарах, частково заповнених рідиною, що стосуються космічної галузі. Також розглянуті роботи вітчизняних та закордонних авторів щодо розв'язання задач коливань рідини в нелінійній постановці. У даній роботі проведено аналіз форм та частот коливань рідини в умовах перевантаження при різних рівнях заповнення. Виконано дослідження малих коливань (лінійне формулювання). Прийнято, що рідина є нестисливою та однорідною, а її рух безвихровий. Існує потенціал швидкості руху, що задовольняє рівнянню Лапласа. Виконуються кінематична та динамічна граничні умови на вільній поверхні. Для врахування впливу низької гравітації виконано узагальнення граничних умов. В динамічній умові на вільній поверхні враховано поверхневий натяг, що має визначальне значення в умовах мікрогравітації. Отримано співвідношення, що має виконуватись на вільній поверхні. Отримане рівняння дозволяє проводити дослідження вимушених коливань жорсткої оболонки обертяння, що частково заповнена рідиною. Отримано числові результати для циліндричної оболонки обертяння. Прийняті нульові початкові умови. Виконані розрахунки при різних рівнях заповнення для циліндричної оболонки. Отримані найнижчі частоти коливань. Також досліджені коливання рідини, що знаходиться під дією вертикального навантаження. Отримані фазові портрети для різних значень частот вертикальної сили збудження. Отримані результати дозволяють дослідити амплітуди коливань вільної поверхні.*

*Ключові слова: вимушені коливання, оболонка обертяння, вільна поверхня рідини, поверхневий натяг, методи скінчених та граничних елементів.*

M.L. MYRONENKO

A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the Ukrainian Academy of Sciences  
O. M. Beketov National University of Urban Economy in Kharkiv

## FORCED VIBRATIONS OF FUEL TANKS UNDER DIFFERENT OPERATING CONDITIONS

*The study of fluid vibrations in the fuel tanks in launch vehicles is necessary to ensure their stability during flight. Liquid launch vehicles have significant reserves of liquid components on board. In fuel tanks and oxidizer tanks there are oscillations of the free surface of the liquid, the nature of which is also influenced by external factors such as gravity, the level of filling of the tanks, their shape and so on. There is a need to determine the shapes and frequencies of the free surface vibrations of the liquid to ensure a stable state of the aircraft during flight. To solve this problem, mathematical modeling methods are used. A study of the problem of small oscillations in reservoirs partially filled with liquid in the space industry is considered. The works of domestic and foreign authors on solving the problems of fluid oscillations in a nonlinear formulation are also considered. In this article the analysis of forms and frequencies of fluctuations of liquid in the conditions of an overload at various levels of filling is carried out. The study of small oscillations (linear formulation) is performed. It is accepted that the fluid is incompressible and homogeneous, and its motion is vortex-free. There is a potential for velocity that satisfies the Laplace equation. Kinematic and dynamic boundary conditions on a free surface are fulfilled. To take into account the influence of low gravity, the generalization of boundary conditions is performed. In the dynamic state on the free surface, the surface tension is taken into account, which is the governing quantity under microgravity conditions. The relation to be performed on a free surface is obtained. The obtained equation allows us to study the forced oscillations of the rigid shell of revolution which is partially filled with fluid. Numerical results for a cylindrical shell of revolution are obtained. Zero initial conditions are accepted. Calculations were performed at different levels of filling for the cylindrical shell. The*

*lowest vibrations frequencies are obtained. The vibrations of the fluid under the action of the vertical load are also investigated. Phase portraits for different values of vertical excitation frequencies are obtained. The amplitudes of vibrations of the free surface are investigated.*

*Keywords: forced vibrations, shell of revolution, surface tension, liquid free surface, boundary and finite element methods.*

М.Л. МИРОНЕНКО

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины  
Харьковский национальный университет городского хозяйства им. А.Н. Бекетова

## ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОПЛИВНЫХ БАКОВ ПРИ РАЗНЫХ УСЛОВИЯХ ЭКСПЛУАТАЦИИ

*Исследование колебаний жидкости в топливных баках космических аппаратов необходимо для обеспечения их устойчивости во время полета. Жидкостные ракеты-носители имеют на борту значительные запасы жидких компонентов. В топливных баках и баках окислителей возникают колебания свободной поверхности жидкости, на характер которых влияют также и внешние факторы, такие как гравитация, уровень заполнения баков, их форма. Возникает необходимость определения форм и частот колебаний свободной поверхности жидкости для обеспечения устойчивого состояния летательного аппарата во время полета. Для решения этой задачи применены методы математического моделирования. Рассмотрены исследования задачи малых колебаний в резервуарах, частично заполненных жидкостью, касающиеся космической отрасли. Также рассмотрены работы отечественных и зарубежных авторов по решению задач колебаний жидкости в нелинейной постановке. В данной работе проведен анализ форм и частот колебаний жидкости в условиях перегрузки при различных уровнях заполнения. Выполнены исследования малых колебаний (линейная формулировка). Считаем, что жидкость является несжимаемой и однородной, а ее движение безвихревым. Существует потенциал скорости движения, удовлетворяющий уравнению Лапласа. Выполняются кинематические и динамические граничные условия на свободной поверхности. Для учета влияния низкой гравитации выполнено обобщение граничных условий. В динамическом условии на свободной поверхности учтено поверхностное натяжение, что имеет определяющее значение в условиях микрогравитации. Полученные соотношения должны выполняться на свободной поверхности. Выведенное уравнение позволяет проводить исследования вынужденных колебаний жесткой оболочки вращения, частично заполненной жидкостью. Получены численные результаты для цилиндрической оболочки вращения. Приняты нулевые начальные условия. Выполнены расчеты при различных уровнях заполнения для цилиндрической оболочки. Получены низшие частоты колебаний. Также исследованы колебания жидкости в резервуаре, находящемся под действием вертикальной нагрузки. Получены фазовые портреты для различных значений частот вертикальной нагрузки. Исследованы амплитуды колебаний свободной поверхности.*

*Ключевые слова: вынужденные колебания, оболочка вращения, свободная поверхность жидкости, поверхностное натяжение, методы конечных и граничных элементов.*

### Постановка проблеми

Сфера машинобудування, зокрема галузі авіаційної та ракетно-космічної техніки, пов'язані з вирішенням задач динаміки тіл, які мають заповнені рідиною порожнини, наприклад, баки, резервуари тощо. Особливістю ракет-носіїв є значні обсяги рідкого палива, вага якого більш ніж в тридцять разів перевищує масу корисного навантаження. Тому запас рідкого палива на борту ракети-носія, а також інтенсивний зовнішній вплив впливає на рух літального апарату. Виникають коливання вільної поверхні рідини в баках, на характер яких впливає значна кількість чинників, таких як гравітація, рівень наповнення баків, їх форма, напрямок та параметри зовнішнього впливу та інші. Методом математичного моделювання отримують форми та частоти коливань вільної поверхні в резервуарах, що частково заповнені рідиною. Це є складовою у забезпеченні стійкості руху рідинних ракет-носіїв.

### Аналіз останніх досліджень та публікацій

Задачі малих коливань тіл, що містять заповнені рідиною порожнини, подані у лінійному вигляді у роботах вітчизняних вчених 50-60 років ХХ ст. [1-3], а також зарубіжних дослідників [4-6]. Оновлене видання [7] монографії [6] доповнене новими результатами досліджень, що стосуються саме галузі використання космічних апаратів. Наприклад, значно розширено розділ, присвячений поведінці рідкого ракетного палива в умовах мікрогравітації [7].

Завдання ускладнювалось, якщо коливання не вважались малими, а розв'язання виконувалось в нелінійній постановці. У роботі [8] розглянуті асиметричні коливання в частково заповнених рідиною циліндричних резервуарах, які знаходяться під дією періодичного горизонтального впливу. В результаті різкого осьового прискорення (перезапуску двигуна) починається формування гейзера, різке виплескування рідини та захоплення газу, викликані різкою зміною числа Бонда. В роботі [9] виконується аналітичне дослідження впливу тонкої еластичної пластинчастої кришки на паливний бак, заповнений рідиною. Результати показують, що невимірною основною кутовою швидкістю системи рідина-структура є функцією масового співвідношення, числа пружності пластини та співвідношення сторін. Ця функція може використовуватись для проектування резервуарів для рідини з кришкою. Використовуючи мультимодальну теорію плескання, автори у роботі [10] дослідили стаціонарну хвильову характеристику, коли частота вимушених коливань близька до найнижчої природної частоти хлюпання. Побудоване аналітичне рішення показує, що амплітудно-хвильова характеристика має поведінку жорсткої пружини, що підтверджується експериментально.

Існують дослідження плескання рідини у 3D-просторі. Використовуються рівняння мілководдя (відомі як рівняння Сен-Венана) для опису тривимірних коливань рідини у посудині, яка здійснює рух, як тверде тіло [13]. Таким чином, у роботі точно моделюється рух твердого тіла посудини (крен-тангаж-рискання та (або) стрибкоподібне коливання), а наближення приймаються лише для течії рідини. Модель розповсюджується на теорію Пенні-Прайса-Тейлора та розширює її до тривимірної форми для найвищої стоячої хвилі. Рівняння на поверхні моделюються за допомогою неявної схеми перемінних напрямків з розділенням кроків.

Методом топографії еталонного зображення експериментально досліджені форми поверхні розподілу рідина-газ в циліндричному посуді, частково заповненому водою, під час плескання, викликаного за рахунок дії бічних зусиль у вигляді синусоїдального збудження [11]. Запропонована технологія дозволяє перетворювати оптичне поле переміщення у висоту вільної поверхні за допомогою оцінки видимої деформації зображення. Результати включають дані, отримані під час сталого режиму хлюпання, під час перехідної фази при гальмуванні контейнеру та демпфуванні рідини при відсутності зовнішнього збудження. У наступній роботі авторів [12], яка є продовженням даного дослідження, показано, що під час помірного коливання (за відсутності розбризкування та розбиття хвилі) можливо визначати абсолютне положення поверхні розподілу рідина-газ. Одночасне вимірювання у кількох точках дозволило індивідуалізувати площинні та закручені рухи та фазові затримки. Визначення швидкості затухання коливань рідини на границі розподілу рідина-газ у всіх точках області дозволило ідентифікувати області резервуару з більш високою енергією. Результати експериментальних досліджень відіграють важливу роль у розумінні фізичної сторони плескання рідини, а також створюють точну базу даних для оцінки та перевірки чисельного моделювання [12].

### Мета дослідження

Метою дослідження є створення методики визначення частот та форм вільних коливань рідини в баках при різних умовах експлуатації: різних рівнях заповнення і перевантажень.

### Викладення основного матеріалу дослідження

У даній роботі розглядаються коливання рідини в жорсткій циліндричній оболонці обертання висотою  $H$  та радіусом  $R$ , яка частково заповнена рідиною на висоту  $H_1$ , має вільну поверхню  $S_0$ . Площа змоченої бічної поверхні складає  $S_1$  (рис. 1).

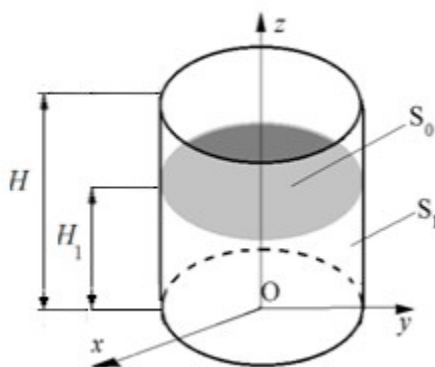


Рис. 1. Циліндрична оболонка обертання, частково заповнена рідиною

Для моделювання руху рідини була розроблена математична модель, що базується на таких гіпотезах: рідина є ідеальною та нестисливою, а її рух безвихровий. Досліджуємо лише малі коливання (лінійна теорія). В цих умовах існує потенціал швидкості  $\phi(x, y, z, t)$ , градієнт якого є швидкістю рідини, а саме  $V = \nabla\phi$ . Використовуючи рівняння руху і умови потенційності потоку, приходимо до інтеграла Коші-Лагранжа в такій формі, як в роботі [14]:

$$p = -\rho_l \left[ \frac{\partial\phi}{\partial t} + a_x(t)x + a_z(t)z + gz + \frac{1}{2} |\nabla\phi|^2 \right], \quad (1)$$

де  $\rho_l$  – густина рідини, кг/м<sup>3</sup>;

$a_x(t), a_z(t)$  – компоненти пришвидшення сили, що збуджує, м/сек<sup>2</sup>;

$g$  – пришвидшення вільного падіння, м/сек<sup>2</sup>.

Якщо розглядаються малі коливання рідини (лінійне формулювання), то  $|\nabla\phi|^2 \ll 1$ , та із формули (1) отримуємо:

$$p = -\rho_l \left[ \frac{\partial\phi}{\partial t} + a_x(t)x + a_z(t)z + gz \right]. \quad (2)$$

У припущенні, що потік є безвихровим, рух ідеальної нестислої рідини описується рівнянням Лапласа для потенціалу швидкості

$$\nabla^2\phi = 0. \quad (3)$$

Для визначення тиску необхідно обчислити потенціал швидкостей. Для цього треба сформулювати граничні умови для потенціалу швидкостей на границях розрахункової області. На вільній поверхні виконуються кінематична та динамічна умови. Означені умови мають такий вигляд:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + a_x(t)x + a_z(t)\xi + g\xi|_{S_0} = 0, \quad \frac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_{S_0} = \frac{\partial\xi}{\partial t}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_{\sigma} = 0, \quad (4)$$

де  $\xi = \xi(x, y, t)$  – функція, що описує рух вільної поверхні.

Зауважимо, що граничні умови (4) у випадку низької гравітації треба узагальнити. Нехай  $\sigma_0$  – поверхневий натяг. За формулою Лапласа-Юнга [15] маємо

$$p_s = \sigma_0 k,$$

де  $k$  – кривина поверхні.

Вираз для кривини  $k$  можна лінеаризувати, як в роботі [15]:

$$k = -\Delta_s \xi,$$

де  $\Delta_s$  – поверхневий оператор Лапласа.

Таким чином, динамічна гранична умова на вільній поверхні набуває вигляду

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + a_x(t)x + a_z(t)z + g\xi - \frac{\sigma_0}{\rho_l} \Delta_s \xi \Big|_{s_0} = 0. \quad (5)$$

Умова (5) дозволяє враховувати поверхневий натяг, який стає визначальним фактором при дослідженні коливань оболонкової конструкції в умовах низької гравітації.

Зобразимо потенціал  $\Phi_2$  у вигляді ряду по власним формам коливань рідини в жорсткому резервуарі

$$\Phi = \sum_{k=1}^M \dot{d}_k(t) \varphi_k, \quad (6)$$

де  $d_k(t)$  – невідомі коефіцієнти, які залежать лише від часу;

$\varphi_k$  – базисні функції;

$M$  – кількість форм, що утримуються при розрахунках.

Для функцій  $\varphi_k$  формулюємо крайові задачі таким чином:

$$\nabla^2 \varphi_k = 0, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \Big|_{\sigma} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \Big|_{s_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + g\xi = 0. \quad (7)$$

При цьому на вільній поверхні маємо співвідношення

$$\frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial n} = \frac{\chi_k^2}{g} \varphi_{2k}, \quad (8)$$

де  $\chi_k$  – частоти власних коливань вільної поверхні, Гц.

Ці базисні функції побудовано в роботах [16, 17]. При цьому крайові задачі зводились до систем сингулярних інтегральних рівнянь, для чисельного розв'язання яких використано метод, розроблений в [18].

Рівняння вільної поверхні набуває вигляду

$$\xi = \xi(x, y, t) = \sum_{k=1}^M d_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial n}, \quad (9)$$

а для потенціалу швидкостей маємо

$$\Phi = \Phi(x, y, t) = \sum_{k=1}^M \dot{d}_k \varphi_k.$$

При цьому на вільній поверхні має виконуватись таке співвідношення:

$$\sum_{k=1}^M \ddot{d}_k \varphi_k + (g + a_z(t)) \left( \sum_{k=1}^M d_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \right) + a_x(t)x - \frac{\sigma_0}{\rho_l} \Delta_s \xi = 0. \quad (10)$$

Рівняння (10) дає змогу дослідити вимушені коливання жорсткої оболонкової конструкції з відсіками, частково заповненими рідиною. Оскільки зазвичай припускалося, що в початковий момент часу система «оболонка-рідина» знаходилась в стані спокою, при розрахунках приймаються нульові початкові умови.

### Аналіз числових результатів

Розглянуто циліндричну оболонку з такими параметрами:  $R=1\text{м}$ ,  $H=1\text{м}$ . Поверхневий натяг  $\sigma_0 = 2,87 \times 10^{-2} \text{ Н/м}$ . Вивчені вільні коливання такої оболонки при різних рівнях заповнення  $h$  та перевантаження  $n$ . Ці дані наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Рівні заповнення та перевантаження

$n$	1	2,3	3,6	4,0	0,2
$h, \text{м}$	1,0	0,7	0,6	0,5	0,4
$\omega, \text{Гц}$	0,659251	0,626516	0,605506	0,576106	0,535326

В цій таблиці також наведені нижчі частоти коливань рідини. Бачимо тенденцію до зниження нижчої частоти. Далі вивчено коливання рідини під дією вертикального навантаження. На рис. 2 подані фазові портрети коливань рідини в координатах  $\xi, \xi'_t$  з різними параметрами зовнішнього навантаження. Вважалось, що в рівнянні (10)

$$a_z(t) = -a_v \cos \omega_v t, \quad a_x(t) = 0.$$

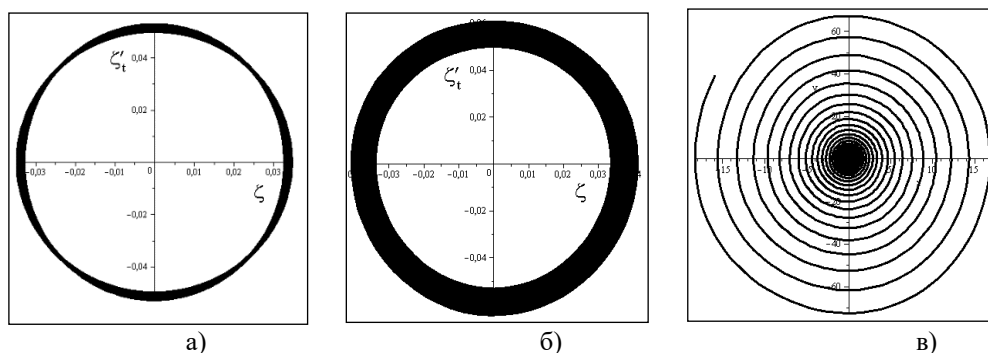


Рис.2. Фазові портрети

За початкові умови обирались рівняння

$$\dot{d}_{01}(0) = 0.05, \dot{d}_{0k}(0) = 0.0, k = \overline{2, M}, d_{0k}(0) = 0, k = \overline{1, M}.$$

Розглянуто випадок  $n=3.6, h=0.6 \text{ м}$ . Вважалось, що  $a_v = 1$ . Розглянуто різні значення частоти вертикальної сили збудження, а саме  $\omega_v = 0.2 \text{ Гц}$ ,  $\omega_v = 0.6 \text{ Гц}$ ,  $\omega_v = 1.2 \text{ Гц}$ . Саме цим значенням відповідають фазові портрети, зображені на рис. 2а), 2б), 2в).

З отриманих результатів можна зробити висновок, що при  $\omega_v = 0.6$  Гц, яке є близьким до власної частоти, наявне збільшення амплітуди коливань вільної поверхні, а при  $\omega_v = 1.2$  Гц спостерігається явище параметричного резонансу.

### Висновки

Розроблено методику дослідження поведінки вільної поверхні рідини у циліндричній оболонці обертання за різних умов експлуатації. Методика дозволяє дослідити амплітуди вимушених коливань вільної поверхні при різних рівнях заповнення резервуару та різних перенавантаженнях. У подальшому передбачається дослідити поведінку рідини в резервуарах іншої форми.

### Список використаної літератури

1. Крейн С.Г., Моисеев Н.Н. О колебаниях твердого тела, содержащего жидкость со свободной поверхностью. *Прикладная математика и механика*. 1957. № 21 (2). С. 169–174.
2. Рабинович Б.И., Докучаев Л.В., Полякова З.М. О расчете коэффициентов уравнений возмущенного движения твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. *Космические исследования*. 1965. № 3 (2). С. 179–207.
3. Моисеев Н.Н., Петров А.А. Численные методы расчета, собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. Москва: ВЦ АН СССР, 1966. 268 с.
4. Hutton R. E. An investigation of nonlinear, nonplanar oscillations of fluid in cylindrical container: Tech. Rep. 1963. P. 191–194. URL: <https://doi.org/10.2514/6.1964-1019> (дата звернення: 05.04.2021).
5. Abramson H. N., Chu W. H., and Kana D. D. Some studies of nonlinear lateral sloshing in rigid containers. *Journal of Applied Mechanics*. 1964. Vol. 33. No. 4. P. 777–784.
6. Abramson H. N. The dynamic behavior of liquids in moving containers with applications to space vehicle technology: Tech. Rep. NASA SP-106. 1966. P. 467.
7. Dodge F. T. The New “Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers”. San Antonio, Texas: Southwest Research Institute, 2000. 195 p.
8. Hopfinger E. J., Baumbach V. Liquid sloshing in cylindrical fuel tanks *EUCASS Proceedings Series – Advances in Aerospace Sciences*. 2009. Vol. 1. P. 279-292 URL: <https://doi.org/10.1051/eucass/200901279> (дата звернення: 05.04.2021).
9. Abdollahzadeh Jamalabadi M.Y. Analytical Solution of Sloshing in a Cylindrical Tank with an Elastic Cover. *Mathematics*. 2019. Vol. 7. P. 1070.
10. Raynovskyy I., Timokha A. Steady-State Resonant Sloshing in an Upright Cylindrical Container Performing a Circular Orbital Motion. *Mathematical Problems in Engineering*. 2018. Vol. 2018. P. 1–8. URL: <https://doi.org/10.1155/2018/5487178> (дата звернення: 06.04.2021).
11. Simonini A., Fontanarosa D., De Giorgi M.G., Vetrano M.R. Liquid dynamics sloshing in cylindrical containers: A 3D free-surface reconstruction dataset. Data in Brief. 2020. Vol. 33. ISSN 2352–3409. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2352340920314281> (дата звернення: 06.04.2021).
12. Simonini A., Fontanarosa D., De Giorgi M.G., Vetrano M.R. Mode characterization and damping measurement of liquid sloshing in cylindrical containers by means of Reference Image Topography. *Experimental Thermal and Fluid Science*. 2021. Vol. 120. ISSN 0894-1777, URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0894177720307366> (дата звернення: 06.04.2021).
13. Ardakani H., Bridges T. Shallow-water sloshing in vessels undergoing prescribed rigid-body motion in three dimensions. *Journal of Fluid Mechanics*. 2011. Vol. 667. P. 474–519. URL: <https://doi.org/10.1017/S0022112010004477> (дата звернення: 07.04.2021).

14. Strelnikova, E., Kriutchenko, D., Gnitko, V., Degtyarev, K. Boundary element method in nonlinear sloshing analysis for shells of revolution under longitudinal excitations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2020. 111. P. 78–87. URL: [https://doi: 10.1016/j.enganabound.2019.10.008](https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2019.10.008) (дата звернення: 08.04.2021).
15. Ibrahim R.A. *Liquid Sloshing Dynamics / Theory and Applications*. Cambridge University Press, 2005. 972 p.
16. Strelnikova, E., Choudhary, N., Kriutchenko, D., Gnitko, V., Tonkonozhenko, A. Liquid vibrations in circular cylindrical tanks with and without baffles under horizontal and vertical excitations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2020. 120. 13–27. URL: [https://doi: 10.1016/j.enganabound.2020.07.024](https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2020.07.024) (дата звернення: 08.04.2021).
17. Strelnikova E., Gnitko V., Krutchenko D., Naumemko Y. Free and forced vibrations of liquid storage tanks with baffles. *J. Modern Technology & Engineering*. 2018. Vol.3. No.1. P.15–52 URL: <http://jomardpublishing.com/UploadFiles/Files/journals/JTME/V3No1/StrelnikovaE.pdf> (дата звернення: 08.04.2021).
18. Gnitko V., Degtyariov K., Karaiev A., and Strelnikova E. Multi-domain boundary element method for axisymmetric problems in potential theory and linear isotropic elasticity, WIT Transactions on Engineering Sciences, *Boundary Elements and other Mesh Reduction Methods XLII*. 2019. Vol. 122. P.13–25. URL: 10.2495/BE410021(дата звернення: 08.04.2021).

#### References

1. Kreyn, S.G., & Moiseev, N.N. (1957). O kolebaniyah tverdogo tela, soderzhashego zhidkost so svobodnoy poverhnostyu. *Prikladnaya matematika i mehanika*, **21** (2), 169–174.
2. Rabinovich, B.I., Dokuchaev, L.V., & Polyakova Z.M. (1965). O raschete koeffitsientov uravneniy vozmushchennogo dvizheniya tverdogo tela s polostyami, chastichno zapolnennymi zhidkostyu. *Kosmicheskie issledovaniya*. **3** (2), 179–207.
3. Moiseev, N.N., & Petrov, A.A. (1966). Chislennyye metody rascheta, sobstvennykh chastot kolebaniy ogranichennogo ob'ema zhidkosti. Moskva: VT AN SSSR.
4. Hutton, R. E. (1963). An investigation of nonlinear, nonplanar oscillations of fluid in cylindrical container: Tech. Rep. URL: <https://doi.org/10.2514/6.1964-1019> (Last accessed: 05.04.2021).
5. Abramson, H. N., Chu, W. H., & Kana, D. D. (1964). Some studies of nonlinear lateral sloshing in rigid containers. *Journal of Applied Mechanics*. **33**, 4, 777–784.
6. Abramson, H. N. (1966). The dynamic behavior of liquids in moving containers with applications to space vehicle technology: Tech. Rep. NASA SP-106.
7. Dodge, F. T. (2000). The New “Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers”. San Antonio, Texas: Southwest Research Institute.
8. Hopfinger, E. J., & Baumbach, V. (2009). Liquid sloshing in cylindrical fuel tanks *EUCASS Proceedings Series – Advances in Aerospace Sciences*. **1**, 279–292. URL: <https://doi.org/10.1051/eucass/200901279> (Last accessed: 05.04.2021).
9. Abdollahzadeh Jamalabadi, M.Y. (2019). Analytical Solution of Sloshing in a Cylindrical Tank with an Elastic Cover. *Mathematics*. **7**, 1070.
10. Raynovskyy, I., & Timokha, A. (2018). Steady-State Resonant Sloshing in an Upright Cylindrical Container Performing a Circular Orbital Motion. *Mathematical Problems in Engineering*. **2018**, 1–8. URL: <https://doi.org/10.1155/2018/5487178> (Last accessed: 06.04.2021).



11. Simonini, A., Fontanarosa, D., De Giorgi, M.G., & Vetrano M.R. (2020). Liquid dynamics sloshing in cylindrical containers: A 3D free-surface reconstruction dataset. *Data in Brief*. **33**.  
URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2352340920314281>  
(Last accessed: 06.04.2021).
12. Simonini, A., Fontanarosa, D., De Giorgi, M.G., & Vetrano, M.R. (2021). Mode characterization and damping measurement of liquid sloshing in cylindrical containers by means of Reference Image Topography. *Experimental Thermal and Fluid Science*. **120**.  
URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0894177720307366> (Last accessed: 06.04.2021).
13. Ardakani, H., & Bridges, T. (2011). Shallow-water sloshing in vessels undergoing prescribed rigid-body motion in three dimensions. *Journal of Fluid Mechanics*. **667**, 474–519. URL: <https://doi.org/10.1017/S0022112010004477> (Last accessed: 07.04.2021).
14. Strelnikova, E., Kriutchenko, D., Gnitko, V., & Degtyarev, K. (2020). Boundary element method in nonlinear sloshing analysis for shells of revolution under longitudinal excitations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. **111**, 78–87. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2019.10.008>.
15. Ibrahim, R.A. (2005). *Liquid Sloshing Dynamics / Theory and Applications*. Cambridge University Press.
16. Strelnikova, E., Choudhary, N., Kriutchenko, D., Gnitko, V., & Tonkonozhenko, A. (2020). Liquid vibrations in circular cylindrical tanks with and without baffles under horizontal and vertical excitations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. **120**, 13–27. URL: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2020.07.024> (Last accessed: 08.04.2021).
17. Strelnikova, E., Gnitko, V., Krutchenko, D., & Naumemko, Y. (2018). Free and forced vibrations of liquid storage tanks with baffles. *J. Modern Technology & Engineering*. **3**, 1, 15–52 URL: <http://jomardpublishing.com/UploadFiles/Files/journals/JTME/V3No1/StrelnikovaE.pdf> (Last accessed: 08.04.2021).
18. Gnitko, V., Degtyariov, K., Karaiev, A., & Strelnikova, E. (2019). Multi-domain boundary element method for axisymmetric problems in potential theory and linear isotropic elasticity, WIT Transactions on Engineering Sciences, *Boundary Elements and other Mesh Reduction Methods XLII*. **122**, 13–25. URL: [10.2495/BE410021](https://doi.org/10.2495/BE410021) (Last accessed: 08.04.2021).

Мироненко Марія Леонідівна – аспірант, Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, м. Харків; тел.: (098) 931-85-19; e-mail: [mariamironenko87@gmail.com](mailto:mariamironenko87@gmail.com). ID ORCID: 0000-0002-0266-4463.

УДК 514.18

А. Ю. НИЦЫН

Харьковский технический университет «Харьковский политехнический институт»

### **СВЯЗЬ ГРУППЫ СИММЕТРИИ ОРНАМЕНТА НА ЭСКИЗЕ М. К. ЭШЕРА «МОРСКИЕ КОНЬКИ» С ДВИЖЕНИЯМИ ПЛОСКОСТИ, ОПИСЫВАЮЩИМИ ПОСТРОЕНИЕ ЕГО ФИГУРНОЙ ПЛИТКИ**

*Первое, что бросается в глаза, когда рассматриваешь эскиз М. К. Эшера «Морские коньки», – её особенность, которая состоит в том, что если принять какую-либо зооморфную форму за оригинал, то, чтобы получить её копии, необходимо выполнить центральные симметрии оригинала и его параллельные переносы, причём параллельные переносы осуществляются в шести направлениях. Мы предполагаем, что такими же центральными симметриями и параллельными переносами связаны между собой отдельные части контура зооморфной формы, целиком покрывающей плоскость. Наше предположение основывается на том, что связь между группой симметрии орнамента и группой движений плоскости, описывающей построение фигурных плиток, заполняющих плоскость без наложений и пропусков, была обнаружена нами и в гравюре М. К. Эшера «Всадники», и в его литографии «Ящерицы».*

*Таким образом, наша цель состоит в том, чтобы классифицировать орнаменты по кристаллографическим группам симметрии на плоскости, открытым русским учёным Е. С. Фёдоровым, и связать группы симметрии орнаментов с группами движений плоскости, описывающими построение их повторяющихся фигур.*

*Предложено правило построения фигурной плитки, стилизующей изображения растений и животных и заполняющей плоскость без наложений и пропусков при параллельных переносах и вращениях её повторений, в частности фигурной плитки, обобщающей изображение зооморфной формы на эскизе М. К. Эшера «Морские коньки». Предложенное правило было применено для составления орнамента, стилизующего эскиз М. К. Эшера «Морские коньки». Показано, что данный орнамент имеет множество центров симметрии и шесть векторов трансляции. Выявлена связь между группой симметрии орнамента и движениями плоскости, приводящими к образованию его фигурной плитки. Выявлена связь между движениями плоскости, приводящими к образованию фигурной плитки, и группой симметрии орнамента, полученного на её основе. Показано, что если какой-либо фигуре соответствует какая-либо группа преобразований плоскости, то такой же группе преобразований плоскости будет соответствовать орнамент, полученный параллельными переносами и вращениями её повторений. Предположено, что предметом дальнейших исследований будет приложение одной из кристаллографических групп симметрии Е. С. Фёдорова к построению фигурной плитки, стилизующей зооморфную форму на одной из гравюр М. К. Эшера.*

*Ключевые слова: мозаики, фигурные плитки в форме животных и растений, стилизация гравюр М. К. Эшера.*

О.Ю. НИЦИН

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»

### **ЗВ'ЯЗОК ГРУПИ СИМЕТРІЇ ОРНАМЕНТУ НА ЕСКІЗИ М. К. ЕШЕРА «МОРСЬКІ КОНИКИ» З РУХАМИ ПЛОЩИНИ, ЩО ОПИСУЮТЬ ПОБУДОВУ ЙОГО ФІГУРНОЇ ПЛИТКИ**

*Перше, що кидається в очі, коли розглядаєш ескіз М. К. Ешера «Морські коники», – її особливість, яка полягає в тому, що якщо прийняти будь-яку зооморфну форму за оригінал, то, щоб отримати її копії, необхідно виконати центральні симетрії оригіналу та його паралельні перенесення, причому паралельні перенесення здійснюються в шести напрямках. Ми припускаємо, що такими ж центральними симетріями і паралельними перенесеннями пов'язані між собою окремі частини контуру зооморфної форми, що цілком заповнює площину. Наше припущення ґрунтується на тому, що зв'язок між групою симетрії орнаменту і групою рухів площини, яка описує побудову фігурних плиток, що заповнюють площину без накладень і пропусків, була виявлена нами і в гравюрі М. К. Ешера «Вершиники», і в його літографії «Ящірки».*

*Таким чином, наша мета полягає в тому, щоб класифікувати орнаменти за кристаллографічними групами симетрії на площині, відкритими російським вченим Е. С. Федоровим, і*

зв'язати групи симетрії орнаментів з групами рухів площині, що описують побудову їх фігур, що повторюються.

Запропоновано правило побудови фігурної плитки, що стилізує зображення рослин і тварин і заповнює площину без накладень і пропусків при паралельних перенесеннях і обертаннях її повторень, зокрема фігурної плитки, що узагальнює зображення зооморфною форми на ескізі М. К. Ешера «Морські коники». Запропоноване правило було застосовано для побудови орнаменту, що стилізує ескіз М. К. Ешера «Морські коники». Показано, що даний орнамент має множини центрів симетрії і шість векторів трансляції. Виявлено зв'язок між групою симетрії орнаменту і рухами площині, що приводять до утворення його фігурної плитки. Показано, що якщо будь-якій фігурі відповідає будь-яка група перетворень площини, то такій же групі перетворень площини буде відповідати орнамент, отриманий паралельними переносами і обертаннями її повторень. Припущено, що предметом подальших досліджень буде застосування однієї з кристаллографічних груп симетрії Є. С. Федорова до побудови фігурної плитки, що стилізує зооморфну форму на одній з гравюр М. К. Ешера.

Ключові слова: замоцнення площини, фігурні плитки у формі тварин і рослин, стилізація гравюр М. К. Ешера.

A.YU. NITSYN

National Technical University “Kharkov Polytechnic Institute”

## **RELATIONSHIP OF THE SYMMETRY GROUP OF THE ORNAMENT ON THE SKETCH OF M. C. ESHER'S SKETCH 'SEAHORSES' WITH THE MOTIONS OF THE PLANE DESCRIBING THE CONSTRUCTION OF ITS FIGURED TILE**

*The first thing that catches your eye when you look at the of M. C. Escher's sketch 'Seahorses' is its special feature, which consists in the fact that if you take any zoomorphic form for the original, then in order to get its copies, you need to complete the central symmetries of the original and its translations, with translations being carried out in six directions. We assume that the same central symmetries and translations are related to individual parts of the zoomorphic contour, which completely filling the plane. Our assumption is based on the fact that the connection between the group of symmetry of the ornament and the group of movements of the plane, describing the construction of figured tiles that fill the plane without overlaps and gaps, was discovered by us both in the M. C. Escher's print 'Horsemen', and in his lithograph "Reptiles".*

*Thus, our purpose is to classify the ornaments according to the crystallographic symmetry groups on the plane, discovered by the Russian scientist E. S. Fyodorov, and to connect the symmetry groups of the ornaments with the groups of plane movements describing the construction of their repeating figures.*

*A rule is proposed for constructing figured tiles that stylize images of plants and animals and fill the plane without overlaps and gaps by translations and rotations of its repetitions, in particular, figured tile that generalize the image of a zoomorphic form on the M. C. Escher's sketch "Seahorses". The proposed rule was applied to compose an ornament stylizing the M. C. Escher's sketch "Seahorses". It is shown that this ornament has set of centers of symmetry and six translation vectors. The connection between the symmetry group of the ornament and the movements of the plane, leading to the formation of its figured tiles was revealed. It is shown that if any group of plane transformations corresponds to any figure, then the ornament obtained by translations and rotations of its repetitions will correspond to the same group of transformations of the plane. It is assumed that the subject of further research will be the application of one of the crystallographic symmetry groups of E. S. Fyodorov to the construction of a figured tile stylizing a zoomorphic shape on one of M. C. Escher's prints.*

*Key words: tessellation of a plane, figured tiles in the form of animals and plants, stylization of M. C. Escher's prints.*

### **Постановка проблемы**

Решение задачи о покрытии плоскости фигурными плитками одной и той же формы без наложений и пропусков имеет как теоретическое, так и практическое значение. Её теоретическое значение состоит в определении условий, которым соответствуют фигурные плитки, целиком заполняющие плоскость, а её практическое значение – в том, что знание законов симметрии, которым подчиняются фигурные плитки, позволяет открыть новые виды кафеля и тротуарной плитки. Проблема состоит в том, что виды кафеля и тротуарной плитки, имеющие высокую эстетическую ценность и прочность, обеспечивающую им долговечность, можно пересчитать по пальцам. Мы полагаем, что специалистам, работающим в строительной отрасли, было

бы полезно внедрить в производство новые виды кафеля и тротуарной плитки, чтобы повысить конкурентоспособность их предприятий. Естественно, новые виды кафеля и тротуарной плитки должны обладать той же эстетической ценностью и долговечностью, что и традиционные виды строительных материалов. Поэтому открытие законов симметрии, которым соответствует фигурная плитка, заполняющая плоскость без наложений и пропусков при параллельных переносах, вращениях или отражениях её повторений, является актуальной задачей как теории орнамента, так и строительной индустрии.

#### **Анализ последних исследований и публикаций**

Творческому наследию выдающегося голландского художника Маурица Корнелиса Эшера (1898–1972) посвящены многочисленные статьи и монографии, выпущенные в зарубежных издательствах [1–10]. Выделим среди них сборник статей «MC Escher's Legacy: A Centennial Celebration», регулярно выходящий в немецком издательстве «Springer», по причине того, что в нём содержатся высококлассные работы о творчестве и жизни М. К. Эшера [6]. К сожалению, в отечественной литературе есть только труды по симметрии, в которых приводятся репродукции отдельных гравюр М. К. Эшера [11]. Между тем как графика М. К. Эшера содержит столько математических тайн, что их разгадок хватило бы не на одну монографию по теории орнамента. Тем более что, несмотря на многочисленные попытки проникнуть в тайну творчества М. К. Эшера, ни одна из его загадок ещё не разгадана.

Разумеется, есть статьи, авторы которых заявляют, будто им удалось разгадать способ, с помощью которого М. К. Эшер создавал свои гравюры [7]. Однако их попытки сводятся к тому, что на гравюру М. К. Эшера они накладывают ромбы, квадраты, правильные треугольники или правильные шестиугольники, вырезают с их помощью из неё повторяющийся фрагмент и заполняют им всю плоскость [1–7]. По нашему мнению, способ регулярного разбиения плоскости, состоящий в том, что повторяющийся рисунок вписывается в какой-либо правильный многоугольник, не только не приводит к объяснению того, как работал М. К. Эшер, но и уводит от него в противоположную сторону. Действительно, биографы М. К. Эшера в один голос утверждают, что по его собственному признанию он заполнял плоскость рисунка не правильными многоугольниками, а фигурками растений, животных и предметов быта, вылепленными из пластилина [12]. Поэтому о поисках в гравюрах М. К. Эшера фрагментов, вписывающихся в ромбы, квадраты, правильные треугольники или правильные шестиугольники, не может быть и речи.

По нашему мнению, разгадку тайны творчества М. К. Эшера или поиски ответа на вопрос: «Каким образом М. К. Эшер создавал такие знаменитые гравюры, как «Всадники», «День и ночь», «Небо и вода» или «Ящерицы»?», – надо начинать с изучения групп симметрии созданных им орнаментов. Например, когда мы поставили перед собой цель построить орнамент, стилизующий гравюру М. К. Эшера «Всадники», мы обратили внимание на то, что её симметрия описывается группой движений плоскости, которую М. К. Эшер назвал «скользящим зеркальным отражением» [13]. Правда, это определение является не совсем точным: фигуры человека и лошади перемещаются по плоскости не в результате параллельных переносов вдоль одного направления и зеркальных отражений относительно него, а в результате параллельных переносов вдоль двух взаимно перпендикулярных прямых и зеркальных отражений относительно одной из них. Тем не менее, определение группы движений плоскости, с которой связана симметрия орнамента, подсказало нам ответ на вопрос: «Как построить фигурную плитку орнамента, стилизующего гравюру М. К. Эшера «Всадники», чтобы её параллельными переносами и отражениями заполнить плоскость

без наложений и пропусков»? Мы предположили, что если орнамент образуется параллельными переносами вдоль двух взаимно перпендикулярных прямых и зеркальными отражениями относительно одной из них, то с помощью таких же движений плоскости образуется и его повторяющаяся фигура. К нашему удивлению, мы не ошиблись. Однако, если бы мы пошли по пути поиска раппорта, то есть правильного многоугольника, в который вписывается рисунок таким образом, чтобы его часть, примыкающая к одной стороне многоугольника, была продолжением его части, примыкающей к противоположной стороне того же многоугольника, мы никогда не достигли бы поставленной цели. Поэтому определение групп симметрии орнаментов в графике М. К. Эшера и разработка на их основе способов построения фигурных плиток, заполняющих плоскость без наложений и пропусков, является актуальной задачей теории орнамента.

### **Цель исследования**

Таким образом, наша цель состоит в том, чтобы классифицировать орнаменты по кристаллографическим группам симметрии на плоскости, открытым русским учёным Е. С. Фёдоровым, и связать группы симметрии орнаментов с группами движений плоскости, описывающими построение их повторяющихся фигур.

### **Изложение основного материала исследования**

Мы уже рассмотрели построение фигур, стилизующих человека и лошадь на гравюре М. К. Эшера «Всадники» и зооморфную форму на его литографии «Ящерицы» и заполняющих плоскость без наложений и пропусков при параллельных переносах, вращениях или отражениях их повторений. Теперь мы рассмотрим построение фигуры, стилизующей зооморфную форму на эскизе М. К. Эшера «Морские коньки» [13–15].

Первое, что бросается в глаза, когда рассматриваешь эскиз М. К. Эшера «Морские коньки», – её особенность, которая состоит в том, что если принять какую-либо зооморфную форму за оригинал, то, чтобы получить её копии, необходимо выполнить центральные симметрии оригинала и его параллельные переносы, причём параллельные переносы осуществляются в шести направлениях. Мы предполагаем, что такими же центральными симметриями и параллельными переносами связаны между собой отдельные части контура зооморфной формы, целиком покрывающей плоскость. Наше предположение основывается на том, что связь между группой симметрии орнамента и группой движений плоскости, описывающей построение фигурных плиток, заполняющих плоскость без наложений и пропусков, была обнаружена нами и в гравюре М. К. Эшера «Всадники», и в его литографии «Ящерицы».

Мы нашли удивительно простое правило построения фигуры, стилизующей изображение зооморфной формы на эскизе М. К. Эшера «Морские коньки» (1938) и заполняющей плоскость без наложений и пропусков при параллельных переносах и центральных симметриях её повторений. Однако из-за ограниченного объёма статьи мы не можем дать в ней его описание.

Приложим найденное нами правило к составлению орнамента, стилизующего эскиз М. К. Эшера «Морские коньки», и покажем его штриховой вариант на рис. 1.

Обратим внимание, что если в вершинах параллелограмма, связанного с каждой зооморфной формой, восстановить перпендикуляры к плоскости рисунка и повернуть весь орнамент вокруг каждого из них на угол  $180^\circ$ , то все зооморфные формы полностью совместятся друг с другом. Отсюда следует, что на рис. 1 представлен орнамент с множеством осей симметрии 2-го порядка. Плоскостей симметрии у данного орнамента не существует. Поэтому ни один фрагмент орнамента не может быть получен с помощью зеркального отражения его другого фрагмента. Между тем

как рассматриваемый орнамент обладает трансляционной симметрией. Это значит, что если орнамент, целиком заполняющий плоскость, сдвинуть в определённом направлении и на некоторое расстояние, то все его элементы совместятся друг с другом. Отрезок прямой линии, задающий направление и величину сдвига, будем называть вектором трансляции. Векторы трансляции рассматриваемого орнамента задают шесть направлений сдвига, которые совпадают с соответствующими сторонами параллелограмма. Причём длинами векторов трансляции являются длина стороны параллелограмма и длины его соответствующих диагоналей. Кроме того, у рассматриваемого орнамента есть ещё четыре вектора трансляции, направления которых задают стороны параллелограмма. Причём длинами векторов трансляции являются длины соответствующих сторон параллелограмма.

Раскрасим орнамент, стилизующий эскиз М. К. Эшера «Морские коньки». Очевидно, что поскольку в соответствующих точках каждой зооморфной формы сходятся две фигуры, а третья фигура примыкает к одной из них, необходимо взять три краски и раскрасить ими фигуры таким образом, чтобы зрительно отделить одну фигуру от другой. Причём порядок следования красок неизменно повторяется во всех фрагментах орнамента. Покажем на рис. 2 раскрашенный вариант орнамента, стилизующего эскиз М. К. Эшера «Морские коньки».

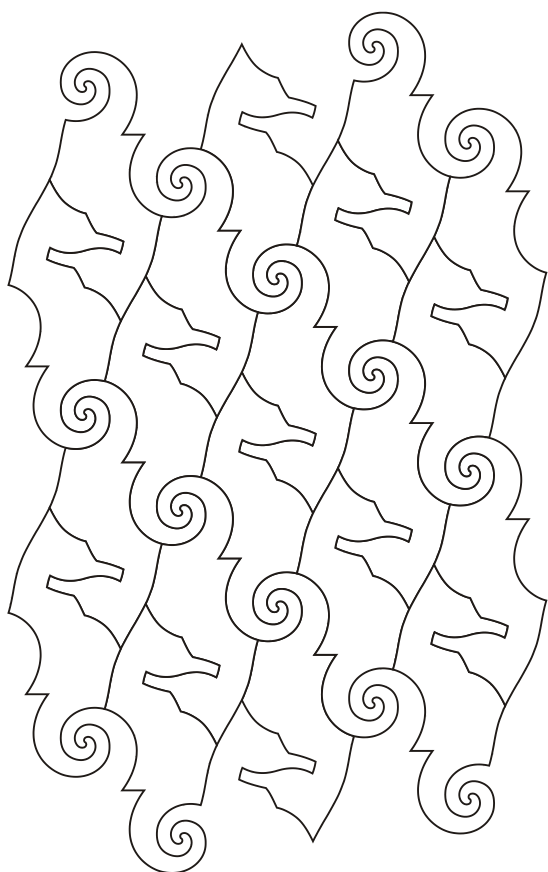


Рис. 1. Штриховой вариант орнамента, стилизующего эскиз М. К. Эшера «Морские коньки»



Рис. 2. Цветной вариант орнамента, стилизующего эскиз М. К. Эшера «Морские коньки»

Приведённый выше орнамент наглядно доказывает, что найденное нами правило построения повторяющейся фигуры можно считать законом, которому подчиняются все орнаменты, удовлетворяющие следующим условиям:

одна фигура является центральной симметрией другой фигуры;  
центры симметрии находятся в вершинах параллелограмма, вписанного в каждую фигуру, и являются общими для группы зооморфных форм, состоящей из фигуры и четырёх фигур, примыкающих к ней;

фигуры образуют группы зооморфных форм, состоящих из фигур, полученных параллельными переносами какой-либо фигуры, входящей в группу, в направлениях, заданных сторонами и диагоналями параллелограмма, вписанного в каждую фигуру.

Обратим внимание на связь, существующую между орнаментом, стилизующим литографию М. К. Эшера «Морские коньки», и его повторяющейся фигурой. Связь состоит в том, что и симметрия орнамента, и его повторяющаяся фигура описываются группами центральных симметрий и группами параллельных переносов. Причём центры симметрии как орнамента, так и его повторяющейся фигуры находятся в вершинах параллелограмма. Группы движений орнамента и его повторяющейся фигуры отличаются лишь тем, что направления параллельных переносов орнамента совпадают с диагоналями параллелограмма и его большей стороной, а направление параллельного переноса части контура зооморфной формы – с направлением меньшей стороны параллелограмма. Отсюда следует, что если какой-либо фигуре соответствует какая-либо группа преобразований плоскости, то такой же группе преобразований плоскости будет соответствовать орнамент, полученный такими же преобразованиями фигуры на плоскости. Действительно, фигура зооморфной формы образуется центральными симметриями относительно центров симметрии, находящихся в вершинах параллелограмма, и параллельного переноса в направлении его меньшей стороны. Между тем как орнамент образуется центральными симметриями относительно центров симметрии, находящихся в вершинах параллелограмма, и параллельных переносов зооморфной формы в направлениях, заданных его большей стороной. По нашему мнению, связь между группой симметрии орнамента и движениями плоскости, приводящими к образованию его повторяющейся фигуры, совершенно очевидна.

### **Выводы**

Таким образом, в статье предложено правило построения фигурной плитки, стилизующей изображения растений и животных и заполняющей плоскость без наложений и пропусков при параллельных переносах и вращениях её повторений, в частности фигурной плитки, обобщающей изображение зооморфной формы на эскизе М. К. Эшера «Морские коньки». Предложенное правило было применено для составления орнамента, стилизующего эскиз М. К. Эшера «Морские коньки». Показано, что данный орнамент имеет множество центров симметрии и шесть векторов трансляции. Выявлена связь между группой симметрии орнамента и движениями плоскости, приводящими к образованию его фигурной плитки. Предположено, что наша следующая работа будет посвящена приложению одной из кристаллографических групп симметрии Е. С. Фёдорова к построению фигурной плитки, стилизующей зооморфную форму на одной из гравюр М. К. Эшера.

**Список использованной литературы**

1. Coxeter Harold. S. M. Regular Polytopes. Tessellations and Honeycombs. Dover Books on Mathematics, 1973. 368 p.
2. Grünbaum B., Shephard G. C. Tilings and Patterns. 2nd ed. Dover Books on Mathematics, 2016. 700 p.
3. Raedschelders P. Tilings and Other Unusual Escher-Related Prints. *MC Escher's Legacy: A Centennial Celebration*. Berlin: Springer, 2005. P. 230–243.
4. Hofstadter Douglas. Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid. Basic Books, 1979. 752 p.
5. Gardner M. Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers and the Return of Dr. Matrix. New York: W. H. Freeman, 1989. 311 p.
6. MC Escher's Legacy: A Centennial Celebration / ed. by Schattschneider D. and Emmer M. Berlin: Springer, 2005. 489 p.
7. Le San. The Art of Space Filling in Penrose Tilings and Fractals. Cornell: Cornell University, 2012. 26 p. URL: <http://arxiv.org/abs/1106.2750>
8. Вейль Г. Симметрия /пер. с англ. Б. В. Бирюкова и Ю. А. Данилова; под ред. Б. А. Розенфельда. Москва: Наука, 1968. 192 с.
9. Кокстер Гарольд С. М. Введение в геометрию /пер. с англ. А. Б. Катка и С. Б. Катка; под ред. Б. А. Розенфельда и И. М. Яглома. Москва: Наука, 1966. 648 с.
10. Узоры симметрии: сб. статей / под ред. М. Сенешаль и Дж. Флека; пер. с англ. Ю. А. Данилова под ред. акад. Н. В. Белова и проф. Н. Н. Шефтеля. Москва: Мир, 1980. 271 с.
11. Шубников А. В., Копцик В. А. Симметрия в науке и искусстве. Москва: Наука, 1972. 339 с.
12. Bool F. H., Kist J. R., Locher J. L., Wierda F. M. C. Escher: His life and complete graphic work. New York: Harry N. Abrams, 1982. 349 p.
13. М. К Эшер. Графика; предисловие и аннотации художника. Кёльн – Москва: Tashen – Арт-Родник, 2001. 96 с.
14. Escher M. C. The World of M. C. Escher / ed. by J. L. Locher. New York: Harry N. Abrams, 1974. 235 p.
15. Bruno Ernst. The Magic Mirror of M. C. Escher. New York: Random House, 1976. 116 p.

**References**

1. Coxeter Harold, S. M. (1973). Regular Polytopes. Tessellations and Honeycombs. Dover Books on Mathematics.
2. Grünbaum, B., & Shephard, G. C. (2016). Tilings and Patterns. 2nd ed. Dover Books on Mathematics.
3. Raedschelders, P. (2005). Tilings and Other Unusual Escher-Related Prints. *MC Escher's Legacy: A Centennial Celebration*. Berlin: Springer. pp. 230–243.
4. Hofstadter Douglas. (1979). Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid. Basic Books.
5. Gardner, M. (1989). Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers and the Return of Dr. Matrix. New York: W. H. Freeman.
6. MC Escher's Legacy: A Centennial Celebration (2005) / ed. by Schattschneider D. and Emmer M. Berlin: Springer.
7. Le San. (2012). The Art of Space Filling in Penrose Tilings and Fractals. Cornell: Cornell University. URL: <http://arxiv.org/abs/1106.2750>
8. Veyl, G. (1968). Simmetriya: per. s angl. B. V. Biryukova i Yu. A. Danilova pod red. B. A. Rozenfelda. Moskva: Nauka.



9. Kokster Garold, S. M. (1966). *Vvedenie v geometriyu* / per. s angl. A. B. Katka I S. B. Katka; pod red. B. A. Rozenfelda s I. M. Yagloma. Moskva: Nauka.
10. *Uzory simmetrii: sb. statey* / pod red. M. Seneshal I Dzh. Fleka; per. s angl. Yu. A. Danilova pod red. N. V. Belova i prof. N. N. Shehtelya. (1980). Moskva: Mir.
11. Shubnskov, A. V., & Koptsik V. A. (1972). *Simmetriya v nauke i iskusstve*. Moskva: Nauka.
12. Bool, F. H., Kist, J. R., Locher, J. L., & Wierda, F. (1982). *M. C. Escher: His life and complete graphic work*. New York: Harry N. Abrams.
13. M. K. Esher. (2001). *Graafika; predislovie i annotatsii hudozhnika*. Kyoln – Moskva: Tashen – Art-Rodnik.
14. Escher M. C. (1974). *The World of M. C. Escher* / ed. by J. L. Locher. New York: Harry N. Abrams.
15. Bruno Ernst. (1976). *The Magic Mirror of M. C. Escher*. New York: Random House.

Ницын Александр Юрьевич – д.т.н., профессор, профессор кафедры геометрического моделирования и компьютерной графики Харьковского технического университета «Харьковский политехнический институт», e-mail: alnitsyn@gmail.com, ORCID: 0000-0001-7900-2612.

УДК 519.6

Ю.І. ПЕРШИНА  
Національний технічний університет “Харківський політехнічний інститут”  
В.О. ПАСІЧНИК  
Харківська державної академія дизайну і мистецтв

## ВІДНОВЛЕННЯ ВНУТРІШНЬОЇ СТРУКТУРИ ДИНАМІЧНОГО ТРИВИМІРНОГО ТІЛА З ВИКОРИСТАННЯМ МІШАНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

*Робота присвячена задачі відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою інформації про неї у вигляді томограм, що задані на деякій системі площин, які перетинають об'єкт дослідження. Ця задача виникає на практиці в тих випадках, коли серед площин, які входять в експериментальні дані, немає площини, що складається з того чи іншого набору точок, які цікавлять дослідника. Наприклад, така задача може виникнути після того, як пацієнт пройшов дослідження на медичному томографі. Після аналізу отриманих томограм виникає необхідність знайти за їх допомогою ще одну чи декілька томограм в площинах, які перетинають тіло та не співпадають ні з жодною із заданих площин. В статті зазначається, що оператори інтерфлотації функцій є природним узагальненням операторів інтерполяції функцій трьох змінних. Ці оператори відновлюють функції (можливо, наближено) за відомими їх слідами на заданій системі площин. Саме такі експериментальні дані використовуються в дистанційних методах, зокрема в комп'ютерній томографії. Отже, інтерфлотація – математичний апарат, природно пов'язаний із задачею відновлення характеристик об'єктів за їх відомими проєкціями. Як і у випадку інтерполяції, похибки в експериментальних даних (в даному випадку, в томограмах) привносяться також і в оператори інтерфлотації. В математиці існує альтернатива операторам інтерполяції – оператори апроксимації. Це оператори, що побудовані шляхом згладжування експериментальних даних за допомогою поліномів, раціональних функцій, тригонометричних поліномів, вейвлетів тощо. Будується оператор мішаної апроксимації функції трьох змінних за допомогою поліномів Бернштейна; наводиться загальний вигляд похибки наближення побудованим оператором та оцінка цієї похибки. Також в роботі будується та досліджується чотиривимірна математична модель тривимірного тіла, що змінюється з часом. Наводиться обчислювальний експеримент з відновлення внутрішньої структури рухомого серця людини за томограмами, що лежать на системі взаємно перпендикулярних площин, які поступають з реально діючого комп'ютерного томографа.*

*Ключові слова: інтерфлотація функцій, комп'ютерна томографія, томограма, мішана апроксимація, поліном Бернштейна.*

Ю.И. ПЕРШИНА  
Национальный технический университет “Харьковский политехнический институт”  
В.А. ПАСЕЧНИК  
Харьковская государственная академия дизайна и искусств

## ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРЫ ДИНАМИЧЕСКОГО ТРЕХМЕРНОГО ТЕЛА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СМЕШАННОЙ АПРОКСИМАЦИИ

*Робота посвящена задаче восстановления внутренней структуры трехмерного тела с помощью информации о ней в виде томограмм, что заданы на некоторой системе плоскостей, пересекающих объект исследования. Эта задача возникает на практике в тех случаях, когда среди плоскостей, которые входят в экспериментальные данные, нет плоскости, состоящей из того или иного набора точек, которые интересуют исследователя. Например, такая задача может возникнуть после того, как пациент прошел исследования на медицинском томографе. После анализа полученных томограмм, возникает необходимость найти с их помощью еще одну или несколько томограмм в плоскостях, пересекающих тело, но несовпадающих ни с одной из заданных плоскостей. В статье отмечается, что операторы интерфлотации функций являются естественным обобщением операторов интерполяции функций трех переменных. Эти операторы восстанавливают функции (возможно, приближенно) по известным их следам на заданной системе плоскостей. Именно такие экспериментальные данные используются в дистанционных методах, в частности, в компьютерной томографии. Таким образом, интерфлотация – математический аппарат, который естественно связан с задачей восстановления*

характеристик объектов по их известными проекциями. Как и в случае интерполяции, погрешности в экспериментальных данных (в данном случае, в томограммах) привносятся также и в операторы интерфлетиации. В математике существует альтернатива операторам интерполяции – операторы аппроксимации. Это операторы, построенные путем сглаживания экспериментальных данных с помощью полиномов, рациональных функций, тригонометрических полиномов, вейвлетов и тому подобное. Строится оператор смешанной аппроксимации функции трех переменных с помощью полиномов Бернштейна; приводится общий вид погрешности приближения построенным оператором и оценка этой погрешности. Также в работе строится и исследуется четырехмерная математическая модель трехмерного тела, которое меняется со временем. Приводится вычислительный эксперимент по восстановлению внутренней структуры подвижного сердца человека по томограммам, лежащим на системе взаимно перпендикулярных плоскостей, которые поступают из реально действующего компьютерного томографа.

Ключевые слова: интерфлетиация, компьютерная томография, томограмма, смешанная аппроксимация, полином Бернштейна.

I.I. PERSHINA

National Technical University “Kharkiv Polytechnic Institute”

V.O. PASICHNYK

Kharkov State Academy of Design and Arts

## RESTORATION OF THE INTERNAL STRUCTURE OF A DYNAMIC THREE-DIMENSIONAL BODY USING BLENDING APPROXIMATION

*The work is devoted to the problem of restoring the internal structure of a three-dimensional body using information about it in the form of tomograms, which are given on a certain system of planes intersecting the object of study. This problem arises in practice when, among the planes that are included in the experimental data, there is no plane consisting of a particular set of points that are of interest to the researcher. For example, such a problem may arise after a patient has undergone examinations on a medical tomograph. After analyzing the obtained tomograms, it becomes necessary to find with their help one or more tomograms in the planes intersecting the body, but not coinciding with any of the given planes. The article notes that the operators of interflotation of functions is a natural generalization of the operators of interpolation of three variables functions. These operators restore functions (possibly approximately) from their known traces on a given system of planes. It is these experimental data that are used in remote sensing methods, in particular in computed tomography. Thus, interflotation is a mathematical apparatus, naturally associated with the task of reconstructing the characteristics of objects from their known projections. As in the case of interpolation, errors in experimental data (in this case, in tomograms) are also introduced into the interflotation operators. In mathematics, there is an alternative to interpolation operators - approximation operators. These are operators constructed by smoothing experimental data using polynomials, rational functions, trigonometric polynomials, wavelets, and the like. An operator of blending approximation of a three variables function is constructed using Bernstein polynomials; the general form of the approximation error by the constructed operator and the estimate of this error are given. The work also builds and studies a four-dimensional mathematical model of a three-dimensional body that changes over time. A computational experiment is presented to restore the internal structure of a moving human heart from tomograms lying on a system of mutually perpendicular planes, which come from a really operating computer tomograph.*

*Keywords: interflotation, computed tomography, tomogram, blending approximation, Bernstein polynomial.*

### Постановка проблеми

У практиці дослідження томографічних зображень часто виникає задача отримання зображення перетину тіла у тих площинах, для яких немає зображення, за відомими зображеннями у деякій сукупності перетинів. У попередніх роботах авторів [1] розв'язувалася задача комп'ютерної томографії методами інтерфлетиції функцій.

Задача побудови математичних моделей динамічної внутрішньої структури тривимірних тіл належить до однієї з найбільш актуальних задач сучасності. Така задача виникає в різних областях науки та техніки, зокрема, в медичній практиці у випадку проведення декількох повторних досліджень пацієнта в різні моменти часу та необхідності аналізу на їх основі ефективності лікування. Таким чином, актуальною є

розробка та дослідження методу розв'язання 3D задачі комп'ютерної томографії з використанням операторів мішаної апроксимації та методу відновлення динамічної внутрішньої структури тривимірного тіла, що змінюється з часом, за відомими її томограмами, що поступають з комп'ютерного томографа.

В ряді випадків (наприклад, при дослідженні тривимірної моделі серця) необхідно враховувати, що повна зміна внутрішньої структури об'єкта здійснюється приблизно за одну секунду. Тому, якщо ми бажаємо отримати послідовність математичних моделей тривимірного тіла в різні моменти часу, то для кожного з цих моментів часу необхідно виконати великий об'єм роботи. Для ефективного дослідження змін за часом та, зокрема, для прогнозу, очевидно, необхідно аналітичне представлення внутрішньої структури тривимірного тіла.

Враховуючи викладене, актуальною являється задача побудови аналітичної чотирирівимірної моделі внутрішньої структури тіла, яка змінюється з часом, на основі томограм в різні моменти часу.

### **Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Математичні основи томографії були закладені на початку минулого століття в роботах вченого Дж. Радона [2], який розробив теорію перетворення функцій багатьох змінних (перетворення Радона). Відповідно до цих перетворень функцію багатьох змінних можна охарактеризувати не тільки її значеннями в точках багатовимірного простору, але й інтегралами від цієї функції, взятими за нескінченний набір ліній.

Загальний розв'язок задачі відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою інформації про неї у вигляді томограм, заданих на системі трьох груп площин, що перетинаються, був розроблений в роботі [3]. Ця задача була розв'язана з використанням операторів інтерфлетації функцій трьох змінних. Треба відмітити, що оператори інтерфлетації функцій є природним узагальненням операторів інтерполяції функцій трьох змінних. Тому, як і у випадку інтерполяції, похибки в експериментальних даних (в томограмах) привносяться також і в оператори інтерфлетація. В математиці існує альтернатива операторам інтерполяції – оператори апроксимації. Це оператори, що побудовані шляхом згладжування експериментальних даних за допомогою поліномів, раціональних функцій, вейвлетів тощо.

У даній статті пропонується метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла. В методі проводиться згладжування експериментальних даних у вигляді томограм, заданих на системі взаємно перпендикулярних площин, за допомогою операторів мішаної апроксимації [4], [5].

У статті [6] автори представляють новий алгоритм відновлення в 4D комп'ютерній томографії, який використовує повторення анатомічних структур в різних місцях між сусідніми фазами дихання при віяльній схемі сканування. В даній роботі представляється метод відновлення динамічного тіла при паралельній (найпростішій) схемі сканування.

### **Мета дослідження**

У даній роботі побудуємо оператор мішаної апроксимації функції трьох змінних для створення математичної моделі тривимірного тіла, яке змінюється з часом. В якості експериментальних даних виступають томограми, що поступають з комп'ютерного томографа.

### **Побудова оператора мішаної апроксимації поліномами Бернштейна для стаціонарного тривимірного тіла**

У роботі [7] викладена загальна теорія наближення функції трьох змінних

операторами мішаної апроксимації. Розглянемо цю теорію на прикладі мішаної апроксимації за допомогою поліномів Бернштейна та застосуємо її до розв'язання просторової задачі комп'ютерної томографії.

**Визначення.** Поліномами Бернштейна (або операторами Бернштейна) степеня  $n$  для функції  $g(t) \in C[0, 1]$  однієї змінної називають поліноми

$$B_n g(t) = \sum_{k=0}^n C_n^k t^k (1-t)^{n-k} g\left(\frac{k}{n}\right), \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Класичне узагальнення поліномів Бернштейна для випадку функцій  $f(x, y, z)$ ,  $(x, y) \in [0, 1]^3$  трьох змінних має вигляд:

$$B_{nms} f(x, y, z) = B1_n B2_m B3_s f(x, y, z) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \sum_{p=0}^s C_n^k C_m^l C_s^p x^k (1-x)^{n-k} y^l (1-y)^{m-l} z^p (1-z)^{s-p} f(x_k, y_l, z_p),$$

$$B1_n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f(x_k, y, z); \quad B2_m = \sum_{l=0}^m C_m^l y^l (1-y)^{m-l} f(x, y_l, z);$$

$$B3_s = \sum_{p=0}^s C_s^p z^p (1-z)^{s-p} f(x, y, z_p).$$

Тобто оператор  $B1_n$  діє на змінну  $x$ , оператор  $B2_m$  – на  $y$ , а оператор  $B3_s$  – на  $z$ .

**Зауваження.** Оператори  $B_{nms} f$  використовують  $(n+1)(m+1)(s+1)$  значень  $f(x_k, y_l, z_p)$ , але  $B_{nms} f(x_k, y_l, z_p) \neq f(x_k, y_l, z_p)$ ,  $k = \overline{0, n}$ ,  $l = \overline{0, m}$ ,  $p = \overline{0, s}$ .

**Теорема 1.** Для залишку наближення функції  $f(x, y, z)$  операторами  $B_{nms} f(x, y, z)$  виконується рівність:

$$f(x, y, z) - B_{nms} f(x, y, z) = ((I - B1_n) + (I - B2_m) + (I - B3_s) - (I - B1_n)(I - B2_m) - (I - B1_n)(I - B3_s) - (I - B2_m)(I - B3_s) + (I - B1_n)(I - B2_m)(I - B3_s)) f(x, y, z).$$

Це означає, що для функції  $f(x, y, z) \in C^{(2,2,2)}[0, 1]^3$ , яка має в точці  $(c, d, h) \in [0, 1]^3$  неперервні похідні  $f^{(2,0,0)}(x, y, z)$ ,  $f^{(0,2,0)}(x, y, z)$ ,  $f^{(0,0,2)}(x, y, z)$ , виконуватиметься співвідношення:  $|B_{nms} f(c, d, h) - f(c, d, h)| = O((\min\{n, m, s\})^{-1})$ ,  $m, n, s \rightarrow \infty$ .

Припустимо, що  $m = n = s$ . Тоді отримаємо:  $|B_{nms} f(c, d, h) - f(c, d, h)| = O(n^{-1})$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

Сформулюємо визначення мішаної апроксимації поліномами Бернштейна. Нехай внутрішня структура тривимірного об'єкта описується функцією  $f(x, y, z)$ , яка повністю розміщена в одиничному кубі  $[0, 1]^3$ . Та нехай задані три системи паралельних томограм на взаємно перпендикулярних площинах, які отримані за допомогою комп'ютерного томографу. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що ці групи площин паралельні координатним площинам, тобто маємо такі томограми: 1)  $T1_k(y, z) = f(x_k, y, z)$ ,  $k = \overline{1, n}$  – томограми, що лежать на площинах, перпендикулярних вісі  $Ox$ ; 2)  $T2_l(x, z) = f(x, y_l, z)$ ,  $l = \overline{1, m}$  – томограми, що лежать на площинах, перпендикулярних вісі  $Oy$ ; 3)  $T3_p(x, y) = f(x, y, z_p)$ ,  $p = \overline{1, s}$  – томограми, що лежать на площинах, перпендикулярних вісі  $Oz$ .

**Визначення.** Операторами мішаної апроксимації поліномами Бернштейна називаються оператори вигляду:

$$Of(x, y, z) = (B1_n + B2_m + B3_s - B1_n B2_m - B1_n B3_s - B2_m B3_s + B1_n B2_m B3_s) f(x, y, z),$$

$$B1_n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} T1_k(y, z); \quad B2_m = \sum_{l=0}^m C_m^l y^l (1-y)^{m-l} T2_l(x, z);$$

$$B3_s = \sum_{p=0}^p C_p^s z^p (1-z)^{s-p} T3_p(x, y),$$

де  $n, m, s$  – кількість томограм, що розташовані на площинах, які перпендикулярні вісям  $Ox, Oy, Oz$  відповідно.

**Теорема 2.** Нехай  $f \in C^{2,2,2}[0,1]^3$ . Тоді для оператора  $Of$  виконується асимптотичне співвідношення:

$$f(x, y, z) - Of(x, y, z) = \frac{f^{(2,2,2)}(x, y, z) x(1-x)y(1-y)z(1-z)}{8nms} + o\left(\frac{1}{nms}\right). \quad (1)$$

**Зауваження.** Якщо в (1) покласти  $n = m = s$ , то  $f(x, y, z) - Of(x, y, z) = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

Тобто, оператор  $Of$ , у випадку  $n = m = s$ , має порядок точності відносно змінної  $n$  у три рази більший, ніж при наближенні оператором  $B_{nms}f$ . Звертаємо увагу на те, що оператор  $Of(x, y, z)$  потребує для своєї побудови томограми  $T1_k, T2_l, T3_p$ , тобто сліди наближуваної функції  $f(x, y, z)$  на заданих лініях, паралельних осям координат. Таким чином, для оцінки похибки наближення функції  $f(x, y, z)$  оператором  $Of(x, y, z)$  виконується нерівність:  $\|f - Of\|_{C[0,1]^3} = O(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ ,  $\varepsilon_k \rightarrow 0, k = 1, 2, 3$ , де  $\varepsilon_1 = \|(I - L1_n)f\|_{C[0,1]^3}$ ,  $\varepsilon_2 = \|(I - L2_m)f\|_{C[0,1]^3}$ ,  $\varepsilon_3 = \|(I - L3_s)f\|_{C[0,1]^3}$ .

### Побудова чотиривимірної математичної моделі динамічної внутрішньої структури тривимірного тіла.

Нехай функція  $f(x, y, z, t)$  описує деяку фізичну характеристику внутрішньої структури (щільність, коефіцієнт поглинання тощо). Джерелом інформації про функцію  $f(x, y, z, t)$ , тобто про динамічну внутрішню структуру тривимірного тіла, будемо вважати набір площин  $\Pi_p : \omega_p(x, y, z) = \alpha_{p1}x + \alpha_{p2}y + \alpha_{p3}z - \gamma_p = 0, p = \overline{1, s}$ , а також набір томограм, які лежать на цих площинах, у конкретні моменти часу. Для подальшого викладення нам необхідно сформулювати деякі твердження.

**Визначення.** Слідом функції  $f(x, y, z, t_k)$  у момент часу  $t_k, k = \overline{1, n}$  на площині  $\Pi_p : \omega_p(x, y, z) = 0$  будемо називати функцію двох змінних  $\varphi_{k,p}(u, v)$ , яка в кожній точці цієї площини  $\Pi_p$  набуває таких самих значень, що і функція  $f(x, y, z, t_k)$ :

$$f_k(x, y, z)|_{\Pi_p} = \varphi_{k,p}(u, v), \quad k = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, s}. \quad (2)$$

**Визначення.** Інтерфлетацією функції  $f(x, y, z, t_k)$ ,  $k = \overline{1, n}$  називається відновлення (можливо, наближене) функції  $f(x, y, z, t_k)$ ,  $k = \overline{1, n}$  в точках між площинами  $\Pi_p : \omega_p(x, y, z) = 0$  за допомогою її слідів (2) на цих площинах.

**Визначення.** Томограмою  $T_{k,p}(\bar{x})$  (слідом функції  $f(x, y, z, t_k)$ ) на площині  $\omega_p(x, y, z) = 0$  в момент часу  $t_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  будемо називати одну з трьох функцій:

$$T_{k,p}(\bar{x}) = \{f(x_p(y, z), y, z, t_k); f(x, y_p(x, z), z, t_k), f(x, y, z_p(x, y), t_k)\}.$$

Як експериментальні дані будемо використовувати: 1) послідовність  $n$  моментів часу:  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ; 2) серію  $s$  площин, заданих рівняннями  $\Pi_p : \omega_p(x, y, z) = a_{p1}x + a_{p2}y + a_{p3}z - \gamma_p = 0$ ,  $p = \overline{1, s}$ ; 3) томограми тривимірного об'єкта  $T_{kp}$ ,  $k = \overline{1, n}$ ,  $p = \overline{1, s}$ , які лежать на заданих площинах  $\Pi_p$ , в задані моменти часу  $t = t_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

Спочатку побудуємо  $n$  тривимірних математичних моделей  $f_k(x, y, z)$ ,  $k = \overline{1, n}$  об'єкта  $f(x, y, z, t)$  для кожного з моментів часу  $t = t_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Отже, є функція  $f_k(x, y, z)$ , яка в точках площини  $\Pi_p$  в  $k$ -й момент часу збігається із зображенням  $p$ -ї томограми. Для побудови таких функцій можуть бути використані: 1) оператори сплайн-інтерфлетації; 2) оператори мішаної апроксимації, які були побудовані раніше. У випадку 1) побудовані тривимірні математичні моделі  $f_k(x, y, z)$ ,  $k = \overline{1, n}$  об'єкта  $f(x, y, z, t)$  для кожного з моментів часу  $t = t_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  мають задовольняти властивості:  $f(x, y, z, t_k)|_{\Pi_p} = f_k(x, y, z)|_{\Pi_p} = T_{k,p}(\bar{x})$ .

При цьому, якщо експериментальні дані задані точно, то можна використовувати метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою операторів інтерфлетації функцій. Якщо ж експериментальні дані задано з похибкою, то можна використовувати метод розв'язання задач тривимірного комп'ютерної томографії за допомогою мішаної апроксимації. Згадані методи відновлення внутрішньої структури тіла вирізняються високою точністю.

Після побудови тривимірних моделей  $f_k(x, y, z)$ ,  $k = \overline{1, n}$  будемо чотиривимірну модель  $F(x, y, z, t)$ , використовуючи метод інтерполяції за змінною  $t$  у вигляді формули:  $F(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^n h_k(t) f_k(x, y, z)$ , де  $h_p(t)$  – допоміжні функції від однієї

змінної  $t$  з властивостями:  $h_k(t_q) = \delta_{kq}$ ,  $k, q = \overline{1, n}$ ,  $\delta_{kq}$  – символ Кронекера.

Зазначимо, що задача в такій постановці немає єдиного розв'язку. Але при певних обмеженнях на клас функцій, вона буде мати єдиний розв'язок. Більш того, для деяких класів наближуваних функцій  $f(x, y, z, t)$  можна оцінити похибку наближення.

Було виконано обчислювальний експеримент для відновлення внутрішньої структури серця людини, яка змінюється з часом. Маємо 25 груп томограм. У кожній групі представлені томограми, зроблені в один певний момент часу, в дев'яти перетинах (тобто в кожній групі по 9 томограм). На рис. 1а) і 1б) показано приклади томограм у різні моменти часу в площині  $x = 0.5$ , а на рис. 1в) і 1г) відновлене нашим методом зображення серця в площині  $x = 0.6$  в різні моменти часу.

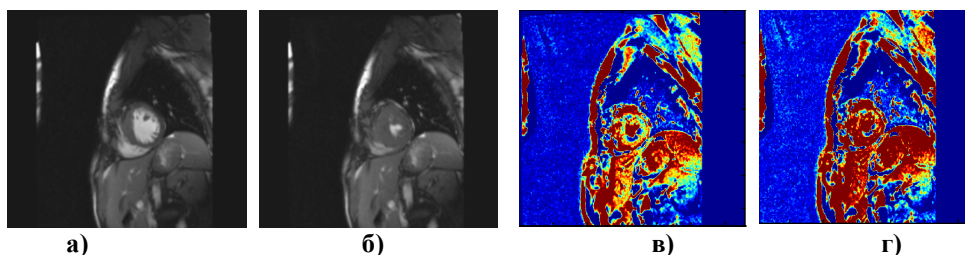


Рис. 1. Зображення томограм: а), б) експериментально заданих в площині  $x=0.5$  в різні моменти часу; в), г) наближено отриманих викладеним методом в площині  $x=0.6$  в різні моменти часу

### Висновки

У роботі запропонований новий метод побудови чотиривимірної математичної моделі тривимірного тіла, що змінюється з часом, з використанням операторів інтерполяції або апроксимації за змінною часу  $t$ . Отримана 4D модель може бути використана не тільки для знаходження зображення об'єкту в заданому перерізі у фіксований момент часу, який не співпадає з експериментально заданими значеннями часу, але і для аналізу течії хвороби шляхом дослідження поведінки функції чотирьох змінних в залежності від часу та від просторових координат.

### Список використаної літератури

1. Литвин О.М., Першина Ю.І. Математична модель відновлення внутрішньої структури тривимірного об'єкта за відомими його томограмами з використанням інтерфлетації функцій. *Доповіді НАНУ*. 2005. №1. С. 20-24.
2. Radon J. Über die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralverte Längs gewisser Mannigfaltigkeiten. *Ber. Verh. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig Math. Nat. Kl.* 1917. Vol. 69. P. 262 – 277.
3. Першина Ю. И., Шилін О. В. Чисельна реалізація методу відновлення внутрішньої структури 3D тіла за відомими її томограмами на системі довільних площин з використанням інтерфлетації функцій. *Вісник НТУ «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях*. Харків: НТУ «ХПІ», 2017. № 6 (1228). С. 105 –111.
4. Литвин О.М., Першина Ю.І. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням мішаної апроксимації. *Матеріали другої міжнародної конференції «Теорія та методи обробки сигналів»*. 2008. С. 85–86.
5. Литвин О.М., Першина Ю.І. Математична модель відновлення тривимірних об'єктів за їх томограмами на системі трьох груп перерізаних площин з використанням інтерфлетації функцій. *Доповіді НАНУ*. 2005. №8. С. 67-71.
6. Jia X., Lou Y., Dong B. 4D Computed Tomography Reconstruction from Few-Projection Data via Temporal Non-local Regularization. *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention: proceedings of the conference. Part I*. 2010. P. 143 – 150.
7. Литвин О.Н., Першина Ю.И., Сергиенко И.В. Восстановление разрывных функций двух переменных, когда линии разрыва неизвестны (прямоугольные элементы). *Кибернетика и системный анализ*. 2014. № 4. С. 126–134.

### References

1. Lytvyn, O.M. & Pershyna, Yu.I. (2005). Matematychna model vidnovlennia vnutrishnoi struktury tryvymirnogo obiekta za vidomymu yoho tomogramamy z vykorystanniam interfletatsii funktsii. *Dopovidi NANU*. 1, 20-24.



2. Radon, J. (1917) Über die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralverte Längs gewisser Mannigfaltigkeiten. *Ber. Verh. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig Math. Nat. Kl.* **69**, 262 – 277.
3. Pershyna, Yu. Y. & Shylin, O. V. (2017). Chyselna realizatsiia metodu vidnovlennia vnutrishnoi struktury 3D tila za vidomymy yii tomohramamy na systemi dovilnykh ploshchyn z vykorystanniam interfletatsii funktsii. *Visnyk NTU «KhPI». Zbirnyk naukovykh prats. Seriia : Matematychni modeliuvannia v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh.* Kharkiv: NTU «KhPI». **6(1228)**, 105 – 111.
4. Lytvyn, O.M. & Pershyna, Yu.I. (2008). Matematychni modeliuvannia v kompiuternii tomografii z vykorystanniam mishanoi aproksymatsii. *Materialy druhoi mizhnarodnoi konferentsii «Teoriia ta metody obrobky syhnaliv».* 85–86.
5. Lytvyn, O.M. & Pershyna, Yu.I. (2005). Matematychna model vidnovlennia tryvymirnykh ob'ektiv za yikh tomohramamy na systemi trokh hrup pererizanykh ploshchyn z vykorystanniam interfletatsii funktsii. *Dopovidy NANU.* **8**, 67-71.
6. Jia, X., Lou, Y. & Dong, B. (2010). 4D Computed Tomography Reconstruction from Few-Projection Data via Temporal Non-local Regularization. *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention: proceedings of the conference, Part I.* 143 – 150.
7. Litvin, O.N., Pershyna, I.I. & Sergienko, I.V. (2014). Vosstanovlenie razryvnykh funktsiy dvuh peremennykh, kogda linii razryva neizvestnyi (pryamougolnye elementy). *Kibernetika i sistemnyi analiz.* **4**, 126–134.

Першина Юлія Ігорівна – д.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри вищої математики Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», e-mail: yuliapershina78@gmail.com , ORCID: 0000-0002-4719-8195.

Пасічник Валентина Олексіївна – к.т.н., доцент, завідувач кафедри «Дизайн тканин та одягу» Харківської державної академії дизайну і мистецтв, e-mail: pasechnik.va@gmail.com ORCID: 0000-0003-1988-9914.

## ВИЯВЛЕННЯ АТАК ТИПУ DOS В МЕРЕЖЕВОМУ ТРАФІКУ ЗА ДОПОМОГОЮ ВЕЙВЛЕТ-ПЕРЕТВОРЕННЯ

**Мета роботи.** Кількість мережевих вторгнень і атак набирає все більш критичні позиції, які виходять з даних аналітичних агентств кібербезпеки. У 21 столітті майже всі організації не є на 100% захищені. В організаціях з передовими технологіями захисту можуть бути проблемні моменти в ключових елементах - розуміння зловмисником відомих технологій захисту. У таких ситуаціях використання інших способів виявлення може бути ключовим моментом в захисті від мережевої атаки. Є безліч методів перевірки рівня захищеності: аналіз безпеки систем і додатків, тестування на проникнення, оцінка обізнаності персоналу в питаннях інформаційної безпеки і т.д. Однак через постійні зміни технологій, появи нових інструментів і злочинних груп виникають нові типи ризиків, які важко виявити за допомогою традиційних способів аналізу захищеності. На цьому тлі найбільш поглиблений і прогресивний метод до тестування безпеки з перетворенням сигналу і вивченням вхідного трафіку буде здатний підвищити рівень надійності мережі.

**Методи дослідження.** Кібератаки в різних форматах, особливо відомі, постійно вимагають безперервну оцінку захищеності інформаційних систем. Ці отримані дані необхідні для вивчення і дослідження фахівцями для їх подальшого використання. Один із перспективних методів Data mining, який є прогресивним і поглибленим можливо вважати вейвлет-перетворення. Алгоритм вейвлет-перетворення слід застосовувати для аналізу дискретних даних. Це важливо коли потрібна висока швидкість обробки та аналізу інформації. Що є актуальним пунктом для вирішення завдання захисту мережі інтернет.

**Отримані результати.** Виконано аналіз алгоритмів вейвлет перетворення як для читки вхідного трафіку від шуму, так і для виявлення мережевої аномалії. Докладно розглянуті основні етапи застосування і реалізації системи виявлення, що використовує порогові значення вейвлет-коефіцієнтів для виявлення мережевої атаки і аномалії.

**Наукова новизна.** Розроблена модель виявлення відповідно до ефективного алгоритму вейвлет-перетворення, яка комплексно стежить за поточним станом мережі, і повідомляє про ризики виникнення несприятливих подій.

**Практичне значення.** Розглядаючи мережеві атаки типу DOS і практичне реагування на можливі атаки, у разі використання вейвлет-перетворення для безпеки, можливо підвищити захист системи з виявлення до непомічених загроз. Щоб зупинити зловмисників на ранніх стадіях атаки і запобігти матеріальним збиткам для бізнесу слід звернути увагу саме на цей метод Data mining.

**Ключові слова:** Dos-атака, вейвлет - перетворення, порогове значення виявлення, шумозниження, мережевий трафік, вейвлет функція, алгоритм Малла.

## ОБНАРУЖЕНИЕ АТАК ТИПА DOS В СЕТЕВОМ ТРАФИКЕ С ПОМОЩЬЮ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

**Цель работы.** Количество сетевых вторжений и атак набирает все более критические позиции, которая выходят из данных аналитических агентств по кибербезопасности. В 21 веке почти все организации не являются на 100% защищены. В организациях с передовыми технологиями защиты могут быть проблемные моменты в ключевых элементах - понимание злоумышленником известных технологий защиты. В таких ситуациях использование других способов обнаружения может быть ключевым моментом в защите от сетевой атаки. Есть множество методов проверки уровня защищенности: анализ безопасности систем и приложений, тестирования на проникновение, оценка осведомленности персонала в вопросах информационной безопасности и т.д. Однако через постоянные изменения технологий, появления новых инструментов и преступных групп возникают новые типы рисков, которые трудно обнаружить с помощью традиционных способов анализа защищенности. На этом фоне наиболее углубленный и прогрессивный метод к тестированию безопасности с преобразованием сигнала и изучением входящего трафика будет способен изменить уровень надежности сети.

**Методы исследования.** Кибератаки в различных форматах, особенно известные, постоянно требуют непрерывную оценку защищенности информационных систем. Эти полученные данные необходимы для изучения и исследования специалистами для их дальнейшего использования. Одно из перспективных методов Data mining, который является прогрессивным и углубленным можно считать вейвлет-преобразования. Алгоритм вейвлет-преобразования следует применять для анализа дискретных данных. Это важно когда требуется высокая скорость обработки и анализа информации. Что является актуально для решения задачи защиты сети интернета.

**Полученные результаты.** Выполнен анализ алгоритмов вейвлет преобразования как для читски входящего трафика от шума, так и для обнаружения сетевой аномалии. Подробно рассмотрены основные этапы применения и реализации системы обнаружения использующую пороговые значения вейвлет-коэффициентов для обнаружения сетевой атаки и аномалии.

**Научная новизна.** Разработанная модель обнаружения в соответствии с эффективным алгоритмом вейвлет-преобразования, комплексно учитывающий текущее состояние сети, и уведомляющий при риске возникновения неблагоприятных событий.

**Практическое значение.** Рассматривая сетевые атаки типа DOS и практическое реагирования на возможные атаки, при использовании вейвлет-преобразования для безопасности может повысить защиту системы по выявлению к незамеченным угрозам. Чтобы остановить злоумышленников на ранних стадиях атаки и предотвратить материальный ущерб для бизнеса следует обратить внимание именно на этот метод Data mining.

**Ключевые слова:** Dos-атака, мережева атака, вейвлет – преобразования, подавление шума, пороговое значение обнаружения, сетевой трафик, вейвлет функция, алгоритм Малла.

B. V. PETRIK, V. I. DUBROVIN  
National University "Zaporizhzhia Polytechnic"

## DETECTION OF DOS ATTACKS IN NETWORK TRAFFIC BY WAVELET TRANSFORM

**Purpose.** The number of network intrusions and attacks is gaining an increasingly critical position, which is emerging from the data of analytical agencies on cybersecurity. In the 21st century, almost all organizations are not 100% protected. In organizations with advanced security technologies, there may be bottlenecks in key elements - the attacker's understanding of known security technologies. In such situations, using other detection methods can be key to defending against a network attack. There are many methods for checking the level of security: analyzing the security of systems and applications, penetration testing, assessing the awareness of personnel in information security issues, etc. However, through the constant changes in technology, the emergence of new tools and criminal groups, new types of risks are emerging that are difficult to detect using traditional methods of security analysis. Against this background, the most advanced and progressive method for security testing with signal transformations and the study of incoming traffic will be able to change the level of network reliability.

**Methods.** Cyberattacks in various formats, especially well-known ones, constantly require continuous assessment of the security of information systems. These obtained data are necessary for study and research by specialists for their further use. One of the most promising data mining methods, which is progressive and in-depth, can be considered wavelet transforms. The wavelet transform algorithm should be used to analyze discrete data. This is important when a high speed of information processing and analysis is required. What is relevant for solving the problem of protecting the Internet.

**Results.** The analysis of wavelet transform algorithms is carried out both for cleaning incoming traffic from noise and for detecting a network anomaly. The main stages of application and implementation of a detection system using threshold values of wavelet coefficients for detecting a network attack and anomaly are considered in detail.

**Scientific novelty.** The developed detection model in accordance with an effective wavelet transform algorithm, comprehensively taking into account the current state of the network, and notifying at the risk of adverse events.

**Practical meaning.** By considering network attacks like DOS-attack and practical responses to possible attacks, using wavelet transform for security can increase the system's protection by detecting undetected threats. To stop cybercriminals in the early stages of an attack and prevent material damage to the business, you should pay attention to this particular data mining method.

**Keywords:** Dos attack, wavelet transform, detection threshold, noise reduction, network traffic, wavelet function, Mallat algorithm.

### Problem Statement

Analysis of network traffic data is very important for detecting DOS attacks and malicious anomalies. Many data mining techniques have been found to view data and use it for security purposes. Fast and accurate search for content-based queries is critical to making such numerous data streams useful. The need for analysis of network attacks and localization of anomaly data by the Data mining method is growing. When considering important points in the creation of a protection system, statistical data on the effectiveness of the method are needed. In experimental research, it is possible to analyze the possibilities and effectiveness of the analysis of the method in everyday use.

### Analysis of Recent Researches and Publications

Wavelet transform(WT) is one of the most promising data analysis technologies, its tools are used in various fields of intellectual activity. In contrast to the fast Fourier transform (FFT), wavelet analysis allows you to select both frequency and time components of variability, ie allows you to analyze the time variability of the frequency spectrum of the process[1].

There is usually a distinction between discrete wavelet transform (DWT) and continuous wavelet transform (CWT). CWT is the implementation of wavelet transform using arbitrary scales and virtually arbitrary wavelets, while DWT uses orthogonal type wavelets and two-level scaling. In the first case, a more detailed study of traffic behavior is possible, while in the second faster conversion is achieved. In this paper we will consider both CWT [2,3] and DWT [4,5].

**Wavelet transform for traffic analysis in educational networks.** Most research and scientific Internet networks are used to analyze these networks. Reliability, security and accuracy of such networks allow to make the exact analysis of a potential anomaly. This anomaly can be considered as a network attack, noise and quarterly network loads. In [4] the work on monitoring the university network is presented. It has been demonstrated that using continuous wavelet transform (CWT) it is possible to analyze how the frequency content of data changes over time. This depends on the time of the variable frequency information, which is not available in other methods, such as FFT. This feature is considered in the analysis of network traffic.

Figure 1 shows the network traffic data of the LSBU World Wide Web (WWW) in 3D format in Figure 1-a and the corresponding 2D representation in Figure 2-b. The results show that WWW traffic is very seasonal. These data respond to the busy day of the work week and less active weekends. This agrees well with the quarterly updates in the system, which are represented by the highest system activity. Also affects the periods of holidays and vacations. WWW traffic data vary significantly during the day, the highest from 10:00 to 19:00 and the lowest from 06:00 to 09:00.

2D network traffic data and 3D presentations, which have traffic for 24 hours and 365 days, help to best design and break down the structure of the system. With the support of the WT method, it is possible to decompose network traffic data. With CWT, it is possible to analyze data and show which is the most common data component issued over time.

Using the features of the CWT method, it is possible to see the general characteristics of WWW traffic and easily identify the situation, which will allow you to accurately identify the required part of the traffic, where there is a place of suspicious activity.

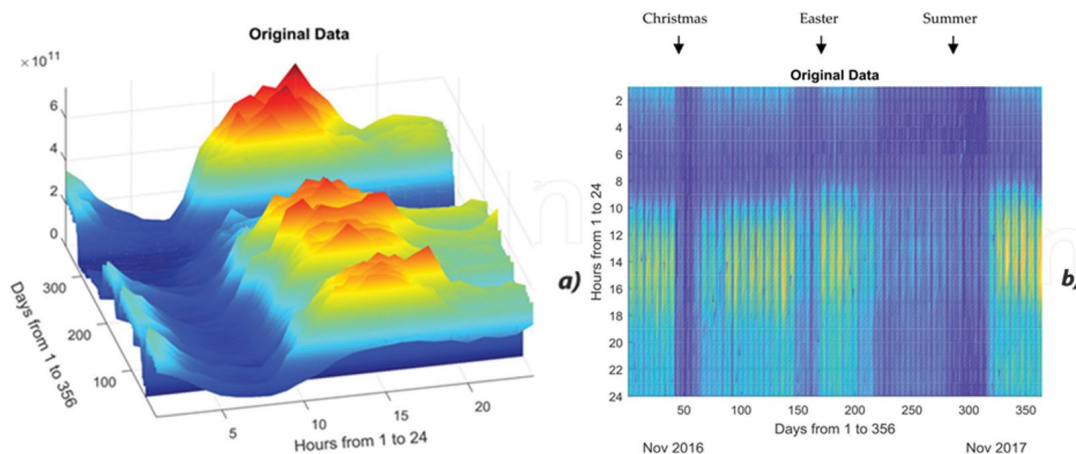


Fig. 1: 3D–presentation (a) and 2D–presentation (b) of WWW–traffic data in the scheme of daily use [2]

**Application of signal processing strategies that include Morlet wavelet.** There are various methods based on the host and network methods to monitor network intrusions in real time, but they are limited in the context of detecting anomalies. In [3], in order to increase security in modern network systems (MS), one method is to apply signal processing strategies that include powerful CWT methods consisting of Morlet wavelet to detect any anomalies in MS data. Percentage deviations were used to assess the quality of wavelet performance when detecting abnormal events, such as port scans and DoS attacks.

Re–decomposition of WT is a summation of the signal, which shows a scaled and offset version of the wavelet for the full time of the signal. Thus, the wavelet coefficients are generated by this process, which is a function of scale as well as position. After applying algorithm, the WT coefficients are produced at different scales using different parts of the signal. The coefficients represent the results of the regression of the output signal performed on the Morlet wavelet. The CWT is a time scale signal.

In the field of network intrusion, in order to detect anomalies in long–term data on network traffic, CWT Morle seems to be a very promising candidate for the wavelet function. This study limited the duration to one week, approximately 160,000 data points, and the Morlet wavelet demonstrated its best performance.

**Analysis of network traffic to detect attacks on digital product infrastructure.** Digital manufacturing integrates with all areas of human activity, including critical industries. Therefore, the task of detecting network attacks is a key priority in protecting digital production systems. In [4], an approach to analyzing the security of digital production is proposed, based on the assessment of the posterior probability of a point change in time series, based on the change in the DWT coefficient values in the time series of network traffic. These time series allow us to consider network traffic from several points of view simultaneously, which plays an important role in detecting network attacks. The attack methods vary considerably. Therefore, to detect them, it is necessary to track different values of different traffic parameters.

The proposed method has demonstrated its effectiveness in detecting DOS attacks implemented at the application level. Time series built and based on the "number of HTTP packets" parameter were used to detect this attack. Figure 2 shows the time series built by the number of packets for traffic with suspicious activity.

In the figure 2, you can see 4 intense data jumps, and they all coincide with the attack time. In this case, it should be noted that the developed method does not trigger false responses. A noticeable jump after 1200 in the middle chart looks like an anomaly, but the bottom chart showing the posterior value of the point change probability shows that the point change probability is very small: less than 0.2.

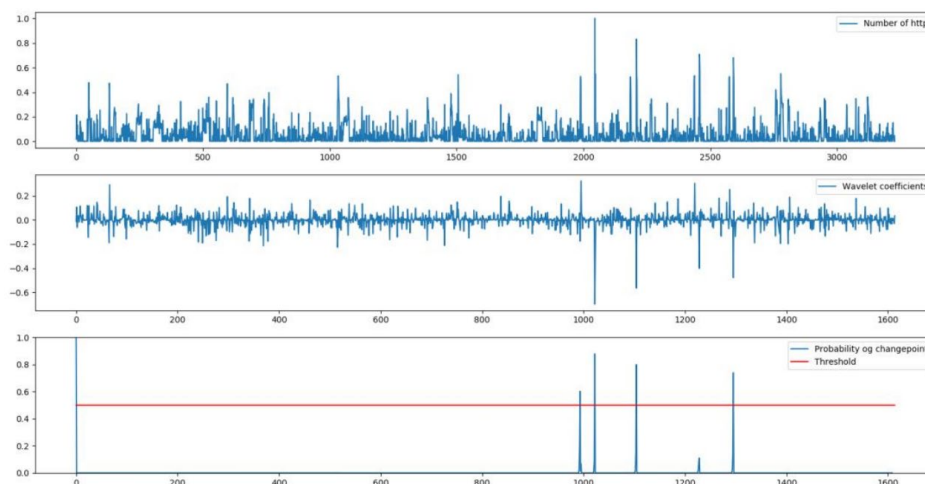


Fig. 2. Analysis of time series of abnormal traffic [4]

Thus, it has been experimentally proven that the developed method, which demonstrates the application of the Bayesian algorithm to the parameters of time series of network traffic, transformed using the wavelet transform, was effective.

**Automatic detection of anomalies in network traffic.** Automatic detection of anomalies in network traffic is an important and difficult task. In [5] it was shown that to create a wavelet analysis system for network traffic monitoring it is expedient to use Haar wavelet  $\psi_{m, k}(t)$ , scaling function  $\phi_{m, k}(t)$ , and fast wavelet analysis algorithm (Mallat algorithm) to obtain the best result in comparison of IDS (Intrusion Detection System) Snort and StopAttack with created on the basis of use of wavelet – transformation of the program of the anomaly analyzer (AA).

Test verification of the developed method of substantiation of the threshold level of anomalous activity of network subjects was performed using the MATCAD package. The evaluation of the efficiency of the prototype of the automatic intrusion detection system was carried out on the experimental section of the telecommunication network of the electronic document management and interaction management system. The results of the experiment are presented in Figure 3.

Intrusion type	IDS	Average time detection, sec.	Probability of detection, %	Accuracy rating
Port scanner	Snort	4,11	86	0,04
	StopAttack	3,86	84	0,0376
	AA	3,8	94	0,028
Denial of Service	Snort	2,08	72	0,0724
	StopAttack	1,22	79	0,0674
	AA	0,98	84	0,05
Server attack	Snort	2,78	66	0,023
	StopAttack	2,46	70	0,046
	AA	2,28	84	0,049
Spam	Snort	–	–	–
	StopAttack	3,6	80	0,043
	AA	3,15	86	0,0469

Fig. 3. Results of the comparative characteristics of IDS [5]

In comparison with the known IDS, the proposed AA solution takes higher characteristics: speed by 10–12%, probability of missed attack by 12–22%, with a permissible level of probability of false alarm 5% and with a probability of detection of 78–88%.

### Purpose of the Study

With a continuous change of parameters for the calculation of the wavelet spectrum requires large computational costs. Most wavelet functions are redundant. It is necessary to

sample the parameters while maintaining the possibility of restoring the signal from its conversion. To begin the analysis of traffic on the chosen technology it is necessary to apply WT and to choose effective tools of wavelet analysis. WT is a signal in the form of a generalized series or Fourier integral on a system of basic functions, which are constructed from the parent (original) wavelet due to time shift operations and changes in time scale. The use of wavelet spectrum will determine the time of onset of signal frequency changes [6].

One of the methods for processing noisy signals is trasholding. It represents the decomposition of the considered signal into a wavelet spectrum with its subsequent processing [7]. When considering a discrete signal, the study needs to check the correctness and effectiveness of methods for suppressing the noise part of a typical signal. Using WT with subsequent reconstruction, it is possible to obtain a signal without degrading its quality. Together with noise cleaning and the use of an effective algorithm WT, it is possible to identify an existing network attack by an anomaly threshold.

### **Description of Main Material of Research**

**Purification of noise from the analyzed signal.** Noise is considered to be high-frequency components of the signal. Noise reduction is an important process of eliminating noise from a useful signal in order to improve its subjective quality or to reduce the level of errors in transmission channels and digital data storage systems.

All recording devices, both analog and digital, have properties that make them susceptible to noise. The noise can be random and incoherent, ie not related to the signal itself, or coherent, introduced by recording devices and processing algorithms. Often in the communication lines, the signals are exposed to interference "white noise", which create detailed coefficients with a high content of noise components that have large random emissions of signal values.

Traditionally, to solve these problems, the method of noise attenuation of high-frequency components of the spectrum known from the practice of filtration is used. In addition, using wavelets, there is another method – limiting the level of detail coefficients. By setting a certain threshold for their level and "cutting off" the coefficients below this threshold, you can significantly reduce the noise level and compress the signal.

In discrete wavelet transform, the signal is decomposed into approximating coefficients representing the smoothed signal and detailing coefficients describing the noise oscillations. Therefore, the noise component is better reflected in the detail coefficients. Such components can be removed using a reset procedure or recalculation of the detail coefficients, the values of which are smaller than the threshold value. The most important thing is that the threshold level can be set for each factor separately. This allows you to build adaptive to signal changes methods of cleaning from noise.

There can be different types of restriction thresholds: soft or flexible and hard or hard. At the same time various rules of a choice of a threshold are established: adaptive, heuristic, minimax.

The procedure of threshold processing, or "thrasholding", today, is a promising tool for "cleaning" signals from noise (high-frequency components).

The quality of signal attenuation and, therefore, the degree of increase in the signal-to-noise ratio depends not only on the type of thrasholding function, but also on the method of its application. Depending on this, thrasholding is divided into global and local, and local in turn into general and multilevel.

From the study [8] the size of the remote noise signal is much smaller than the output signal, so the data will take up less space and is better suited for transmission over the Internet.

**Choice of wavelet basis.** WT offers a large set of data processing tools that help to divide the output signal into components and see its structure at different scales. The choice of wavelet base is an important issue before starting the detection procedure. But there is no universal method that will offer a choice of wavelet basis. The choice of the wavelet, leaving the study of the received signal, most often depends on the output signal [9]. Because wavelets have good frequency–time adaptation, they can be a handy tool for studying the frequency characteristics of a signal.

According to the frequency approach, the resulting range of wavelets can be divided into two components - low-frequency and high-frequency. The frequency of their separation is equal to half the sampling frequency of the signal. The main idea is to use a wavelet basis, each function of which characterizes both a certain spatial (temporal) frequency and the place of its localization in physical space (in time).

Function, which is usually called a wavelet, highlights the details of the signal and its local features. Functions that are well localized in both the time and frequency domains are usually selected as analytical wavelets.

Today there are whole wavelet families: Haar, Dobeshi, Simlet, Koiflet, Meyer, Gauss, Shannon, biorthogonal and others, each of which has certain advantages. The Haar wavelet has a compact media and provides signal and function reconstruction. Each function is strictly localized in physical space (in time), but is characterized by a slowly decreasing frequency spectrum. That is, spatial (temporal) and frequency characteristics cannot be measured simultaneously with arbitrarily high accuracy. The advantages of the Haar basis are that fast algorithms for fiberboard execution have been developed for it [10]. The decomposition of the signal in the system of basic Haar functions has the following structure. The first basic function is a straight line. In the case of a normalized basis, the convolution of the first basic function with the output signal will determine the average value of the function. The following basic functions of the Haar decomposition are scaled by the degree of two shifted steps. The system of basic Haar functions in a discrete space must be given by two parameters(1) – shift and frequency:

$$\varphi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \varphi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad (1)$$

where  $\varphi_{ab}(t)$  – Haar basis function,  
 a – frequency of the basic function,  
 b – shift.

Studies [11] have shown that it is advisable to use a Haar wavelet to monitor network traffic, because with a high reliability of a significant criterion  $a$ , the type of wavelet has a significant impact.

**Choice of wavelet transform algorithm.** The essence of Mallat algorithm operations is as follows. Representation of the signal in the form of a set of successive approximations of the approximating and detailing components to which a set of filters is used – low–frequency and high–frequency. First, the signal is passed through a low–pass filter, resulting in approximation coefficients that characterize the global trend of the series under study. The output sequence is also passed through a high–pass filter, with the output of the detail coefficients that characterize the local features of the data series. To increase the frequency resolution, it is possible to re–decompose for the approximation coefficients of the previous level. In the context of intensive exchange of network traffic components, there will be even more interest in analyzing local data features to detect threats using parameters generated from traffic data to improve the detection of low–duration and high–intensity network attacks.

WT with a consistent increase in the values of the components of traffic leads to the form of rapid iterative calculations of wavelet coefficients. Equations of fast iterative calculations of wavelet coefficients provide realization of fast WT one–dimensional



numerical series on the basis of pyramidal algorithm of calculation of wavelet coefficients (Mallat algorithm).

**Using discrete wavelet – packet transformation.** When considering discrete wavelet packet transformation (DWPT) according to Mallat algorithm [12], the signal is split at each step. High–frequency and low–frequency components are obtained and the high–frequency component is cut off. Because the low frequency region contains more information about the output signal than the high frequency region. Recognition by wavelet coefficients, which are several times less than the signal discrete, will reduce computational costs [13].

The use of DWPT provides a wider part of the frequency range than DWT. From the set of possible bases of wavelet decomposition at all levels of detail, values with the condition are selected experimentally taking into account time constraints. That is, on which the abnormal state of traffic is most clearly manifested.

It is proposed to use the criterion of minimum entropy as a criterion for choosing the optimal basis. It characterizes the level of averaging and determines the number of significant coefficients of the traffic model. The criterion is the ratio of variances and mean DWPT coefficients. The adaptation of the decomposition level selection is as follows. If at any level of DWPT there is an excess of the upper threshold, the decision on existence of an anomaly is made. If at this level the lower threshold is exceeded, then there may be an anomaly in this place. Then further wavelet decomposition is performed to the next level, at which the analysis is performed again. This happens until the value of the relationship exceeds the upper threshold. This will indicate possible attacks. Or it will stop exceeding the threshold at all. This will indicate the absence of anomalies. In Figure 4 shows graphs of outgoing traffic (top right). Also shown is the optimal decomposition tree (top left) and the restored random component of traffic on one node (6.1) (bottom left). The anomaly in this case is the result of a SYN–Flood attack. Because on the restored random component of the signal, the peaks coincide on the time axis with the anomalies in the output traffic. Anomalies are well localized by inverse DWPT when using sample nodes of the optimal decomposition tree. A window similar to the main menu of the ToolBox Wavelet – wavemenu with the selected option – wavelet–packet 1–D was used to conduct the experiment.

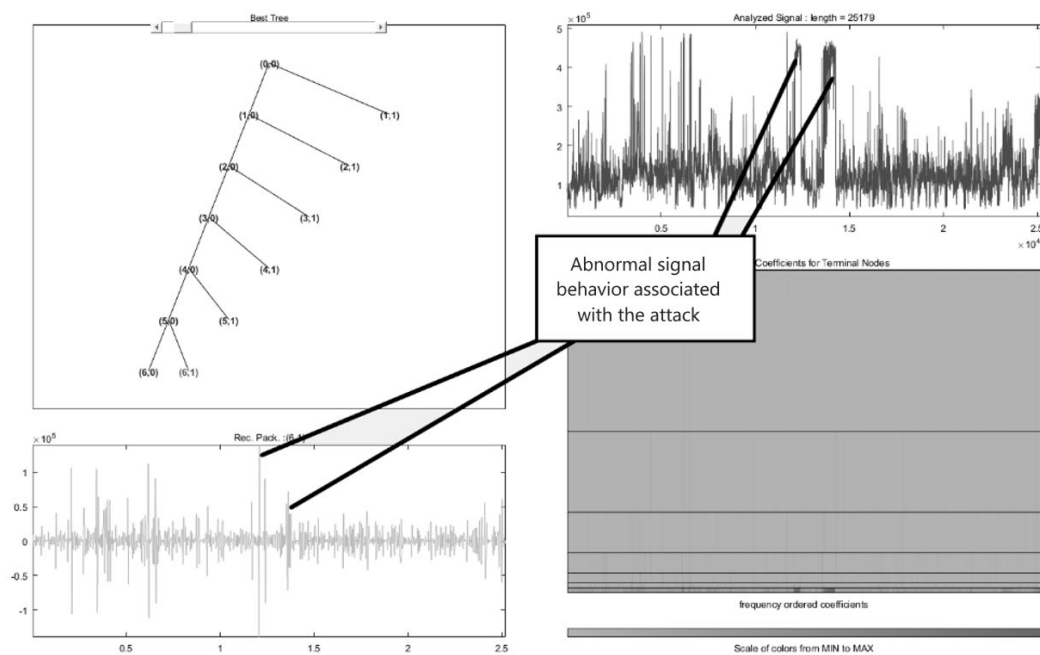


Fig. 4. Results of wavelet packet decomposition by Haar functions

### Conclusions

According to the results of the study, it can be concluded that there is a vulnerability for MS, according to which an attacker can implement a DoS-attack, or another network attack, which can be specially configured for certain protection limits. Then the presence of detection by WT will significantly increase the possibility of detecting such an attack. During the work, we developed our own method of detecting anomalies and network attacks based on the integration of the wavelet packet model of network traffic in the interactive development environment Matlab, namely, identified a number of parameters that are taken into account when implementing WT.

Considering the features of this work, we can make the following recommendations:

- network traffic anomalies can be divided into two major classes – short-term and long-term.
- application of the Haar wavelet function to improve the correct detection characteristic in WT-based detection systems;
- when changing the length of the wavelet filter, it is possible to observe an increase in the detection efficiency.
- the analysis of efficiency of algorithms of WT that in general makes 70–94% of correct detection of an anomaly is carried out;
- when using WT, a jump in the energy distribution dispersion becomes noticeable, which can be recorded at an early stage of the attack, well ahead of the accumulation of overload, which makes it effective for detecting the attack;
- promising is the method of detecting network traffic anomalies using entropy [14];
- Mallat algorithm makes it possible to analyze the frequency–time representation of the signal on low–frequency and high–frequency components, which provides the ability to localize signal anomalies of different types;
- use of DWPT, which significantly reduces computational costs in the decomposition of WT components.

### References

1. Tverdohleb J., Dubrovin V., Zakharova M. Wavelet technologies of non-stationary signals analysis. *1-th IEEE International Conference on Data Stream Mining & Processing*. Ukraine, Lviv: LPNU, 2016. P. 75–79.
2. Mohammed Alharbi and Marwan Ali Albahar. Time and frequency components analysis of network traffic data using continuous wavelet transform to detect anomalies. *ICIC International 2019 / ISSN 1349–4198*. 2019, № 4(15). P. 1323–1336.
3. Shwan D., Perry X. Wavelet Transform for Educational Network Data Traffic Analysis, *Wavelet Theory and Its Applications*. Sudhakar Radhakrishnan. 2018. 268 p.
4. Соловьев Н.А., Тишина Н.А., Цыганков А.С., Юркевская Л.А., Чернопрудова Е.Н. Методы спектрального анализа в задаче обнаружения аномалий информационных процессов телекоммуникационных сетей: монография. Оренбург: ОГУ, 2013. 171 с.
5. Lavrova D., Semyanov P., Shtyrkina A., Zegzhda P. Wavelet-analysis of network traffic time-series for detection of attacks on digital production infrastructure. *SHS Web of Conf*. 2018. Vol. 44. P. 1–8.
6. Аносов А.О., Проценко М.М., Дубинко О.Л., Павлунько М.Я. Застосування вейвлет-перетворення для аналізу цифрових сигналів. *Сучасний захист інформації*. 2018. №1(33). С. 38–42.
7. Московский С.Б., Сергеев А.Н., Лалина Н.А. Очистка сигнала от шумов с использованием вейвлет-преобразования. *Universum: технические науки: электрон. научн. журн*. 2015. №2 (15). С. 1-2.

8. Donghong S., Zhibiao S., Wu L., Ping R., Jian-ping W. Analysis of Network Security Data Using Wavelet Transforms. *Journal of Algorithms & Computational Technology*. 2003. Vol. 8. №1. P. 59–79.
9. Dubrovin V.I., Tverdohleb J.V., Kharchenko V.V. R-peaks detection using wavelet technology. *Радиоэлектроника, информатика, управление*. 2013. №2 (29). С. 126–129.
10. Проценко М.М., Павлунько М.Я., Мороз Д.П., Бржевська З.М. Методика фільтрації цифрових сигналів з використанням швидкого вейвлет–перетворення. *Сучасний захист інформації*. 2019. №1 (37). С. 64–69.
11. Шелухин О.И., Филинова А.С. Сравнительный анализ алгоритмов обнаружения аномалий трафика методами дискретного вейвлет–анализа. *T–Comm – Телекоммуникации и Транспорт*. 2014, Т. 8, № 9. С. 89–97.
12. Проценко М.М., Куртсеітов Т.Л., Павлунько М.Я., Бржевська З.М. Застосування пакетного вейвлет–перетворення для обробки радіотехнічних сигналів. *Сучасний захист інформації*. 2018, №3 (35). С. 11–15.
13. Шелухин О.И., Сакалема Д.Ж., Филинова А.С. Обнаружение вторжений в компьютерные сети (сетевые аномалии). Научно – техническое издательство Горячая линия – Телеком. 2016. 221 с.
14. Дубровин В.И., Твердохлеб Ю.В. Исследование изменений энтропии и энергии при разложении сигналов. *Радиоэлектроника, информатика, управление*. 2013, № 2 (29). С. 54–58.

#### References

1. Tverdohleb, J., Dubrovin, V. & Zakharova, M. (2016). Wavelet technologies of non-stationary signals analysis. *1–th IEEE International Conference on Data Stream Mining & Processing*. (Ukraine, Lviv, 23–27 August, 2016). Lviv: LPNU, 75–79.
2. Mohammed, Alharbi & Marwan, Ali Albahar. (2019). Time and frequency components analysis of network traffic data using continuous wavelet transform to detect anomalies. *ICIC International 2019*. ISSN 1349–4198. 4 (15), 1323–1336.
3. Shwan, D. Perry X. (2018). Wavelet Transform for Educational Network Data Traffic Analysis, *Wavelet Theory and Its Applications*. Sudhakar Radhakrishnan.
4. Solovev N.A., Tishina N.A., Tsyigankov A.S., Yurkevskaya L.A., Chernoprudova E.N. (2013). *Metodyi spektralnogo analiza v zadache obnaruzheniya anomaliiy informatsionnyih protsessov telekommunikatsionnyih setey: monografiya*. Orenburg: OGU.
5. Lavrova, D., Semyanov, P., Shtyrkina, A. & Zegzhda, P. (2018). Wavelet–analysis of network traffic time-series for detection of attacks on digital production infrastructure. *SHS Web of Conf.* 44, 1–8.
6. Anosov, A.O., Protsenko, M.M., Dubinko, O.L. & Pavlunko, M.Ya. (2018). Zastosuvannya veyvlet-peretvorenniya dlya analizu tsifrovih signaliv. *Suchasniy zahist Informatsiyi*. 1 (33), 38–42.
7. Moskovskiy, S.B., Sergeev, A.N. & Lalina, N.A. (2015). Ochistka signala ot shumov s ispolzovaniem veyvlet-preobrazovaniya. *Universum: tehnicheckie nauki: elektron. nauchn. zhurn.* 2 (15), 1–2.
8. Donghong, S., Zhibiao, S., Wu, L., Ping, R. & Jian-ping, W. (2003). Analysis of Network Security Data Using Wavelet Transforms. *Journal of Algorithms & Computational Technology*. 8, 1, 59–79.
9. Dubrovin, V.I., Tverdohleb, J.V. & Kharchenko, V.V. (2013). R-peaks detection using wavelet technology. *Radio Electronics, Computer Science, Control.*, 2 (29), 126–129.

10. Protsenko, M.M., Pavlunko, M.Ia., Moroz, D.P. & Brzhevskaya Z.M. (2019). Metodyka filtratsii tsyfrovyykh sygnaliv z vykorystanniam shvydkoho veivlet–peretvorennia. *Suchasnyi zakhyst informatsii*. **1** (37), 64–69.
11. Sheluhin, O.I. & Filinova, A.S. (2019). Sravnitelnyiy analiz algoritmov obnaruzheniya anomaliiy trafika metodami diskretnogo veyvlet–analiza. *T–Comm – Telekommunikatsii i Transport*. **8**, 9, 89–97.
12. Protsenko, M.M., Kurtseitov, T.L., Pavlunko, M.Ia. & Brzhevskaya, Z.M. (2018). Zastosuvannia paketnoho veivlet–peretvorennia dlia obrobky radiotekhnichnykh sygnaliv. *Suchasnyi zakhyst informatsii*. **3** (35), 11–15.
13. Sheluhin, O.I., Sakalema, D.Zh. & Filinova, A.S. (2016). Obnaruzhenie vtorzheniy v kompyuternyye seti (setevyye anomalii). Nauchno – tehnikeskoe izdatelstvo Goryachaya liniya – Telekom.
14. Dubrovin, V.I. & Tverdohleb, Yu. V. (2013). Issledovanie izmeneniy entropii i energii pri razlozhenii signalov. *Radio Electronics, Computer Science, Control*. **2** (29), 54–58.

Дубровін Валерій Іванович – к.т.н., професор, професор кафедри програмних засобів національного університету “Запорізька Політехніка”, e-mail: vdubrovin@gmail.com, ORCID: 0000–0002–0848–8202.

Петрик Богдан Вячеславович – студент кафедри програмних засобів національного університету “Запорізька Політехніка”, e-mail: dartbogdan32@gmail.com, ORCID: 0000–0002–9528–4610.

УДК 519.6; 535.37

Т.А. ПРОКОФЬЕВ, А.В. ИВАНЧЕНКО

Днепровский национальный университет имени Олеса Гончара

В.В. ГНАТУШЕНКО

Национальный технический университет “Днепровская политехника”

## АНАЛИТИЧЕСКИЙ И СИНТЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД В ПОСТРОЕНИИ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ ИЗЛУЧАЮЩИХ ЦЕНТРОВ МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЙ С ШИРОКИМИ СПЕКТРАМИ ЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ

*К настоящему моменту отсутствуют эффективные методики исследования систем излучающих центров люминесценции, хотя существуют способы, позволяющие выделять индивидуальные полосы для решения задач классификации излучающих центров по их положению в кристаллической решетке и выявления их поведения при изменении условий возбуждения люминесценции. В силу определенных обстоятельств далеко не все из них удобны в практическом применении и позволяют получать адекватные модели индивидуальных полос люминесценции при различных условиях проведения эксперимента. В данной работе предложена методика анализа системы излучающих центров люминесценции путем разложения на индивидуальные составляющие и построения их адекватных количественных моделей. Рассмотрено совместное использование аналитического и синтетического подходов. Первый направлен на анализ структуры системы, а второй позволяет найти ответы на вопросы, связанные со взаимодействием рассматриваемой системы с окружающей средой. Представлено математическое описание разработанных моделей, отражающих изменения количества центров свечения с определенным типом локального окружения относительно общего количества всех центров люминесценции при изменении условий возбуждения, что в свою очередь, позволяет получить информацию об изменениях структуры изучаемых материалов. Для выделения индивидуальных полос, сопоставляемых с излучением определенных типов центров люминесценции, использовано нормальное распределение. Учитывая то, что наличие различных фоновых или иных эффектов, обусловленных влиянием кристаллической решетки, не позволяет точно описывать индивидуальные полосы с помощью нормального распределения, для получения количественных моделей центров люминесценции при изменении условий возбуждения целесообразным является использование в качестве координат по оси абсцисс как шкалы энергии излучаемых фотонов, так и шкалы длин волн.*

*Ключевые слова:* система излучающих центров, спектры люминесценции, нормальное распределение, количественная модель, индивидуальные полосы люминесценции.

Т.А. ПРОКОФ'ЄВ, О.В. ІВАНЧЕНКО

Дніпровський національний університет імені Олеса Гончара

В.В. ГНАТУШЕНКО

Національний технічний університет “Дніпровська політехніка”

## АНАЛІТИЧНИЙ І СИНТЕТИЧНИЙ ПІДХІД У ПОБУДОВІ МОДЕЛІ СИСТЕМИ ВИПРОМІНЮВАЛЬНИХ ЦЕНТРІВ МОНОКРИСТАЛІЧНИХ З'ЄДНАНЬ З ШИРОКИМ СПЕКТРОМ ЛЮМІНЕСЦЕНЦІЇ

*До теперішнього моменту відсутні методики дослідження систем випромінюючих центрів люмінесценції, хоча існують способи, що дозволяють виділяти індивідуальні смуги для вирішення задач класифікації випромінюючих центрів по їх положенню в кристалічній решітці і виявлення їх поведінки при зміні умов збудження люмінесценції. В силу певних обставин далеко не всі з них зручні в практичному застосуванні і дозволяють отримувати адекватні моделі індивідуальних смуг люмінесценції при різних умовах проведення експерименту. В даній роботі запропоновано методику аналізу системи випромінюючих центрів люмінесценції шляхом розкладання на індивідуальні складові і побудови їх адекватних кількісних моделей. Розглянуто спільне використання аналітичного та синтетичного підходів. Перший спрямований на аналіз структури системи, а другий дозволяє знайти відповіді на питання, пов'язані із взаємодією даної системи з навколишнім середовищем. Представлено математичний опис розроблених моделей, що*

відображають зміни кількості центрів свічення з певним типом локального оточення щодо загальної кількості всіх центрів люмінесценції при зміні умов збудження, що в свою чергу, дозволяє отримати інформацію про зміни структури досліджуваних матеріалів. Для виділення індивідуальних смуг, які відповідають випромінюванню певних типів центрів люмінесценції використано нормальний розподіл. З огляду на те, що наявність різних фонових чи інших ефектів, обумовлених впливом кристалічної решітки, не дозволяє точно описувати індивідуальні смуги з допомогою нормального розподілу, для отримання кількісних моделей центрів люмінесценції при зміні умов збудження доцільним є використання в якості координат по осі абсцис як шкали енергії випромінюваних фотонів, так і шкали довжин хвиль.

*Ключові слова:* система випромінюючих центрів, спектри люмінесценції, нормальний розподіл, кількісна модель, індивідуальні смуги люмінесценції.

T.A. PROKOFIEV, A.V. IVANCHENKO

Oles Honchar Dnipro National University

V.V. HNATUSHENKO

Dnipro University of Technology

### **ANALYTICAL AND SYNTHETIC APPROACH TO BUILDING A MODEL OF A SYSTEM OF EMITTING CENTERS OF SINGLE CRYSTAL COMPOUNDS WITH WIDE LUMINESCENCE SPECTRA**

*To date, there is no definite technique for studying systems of emitting luminescence centers, although there are methods that make it possible to single out individual bands for solving the problems of classifying emitting centers by their position in the crystal lattice and revealing their behavior when changing the conditions of luminescence excitation. Due to certain circumstances, far from all of them are convenient in practical application and make it possible to obtain adequate models of individual luminescence bands under various experimental conditions. The technique for analyzing a system of emitting luminescence centers by decomposition into individual components and constructing their adequate quantitative models is proposed in this work. The joint use of both analytical and synthetic approaches is considered. The first one is aimed at clarifying what the system under consideration consists of, and the second allows one to find answers to questions related to the interaction of the system under consideration with the environment. Both approaches complement each other. The mathematical description of the developed models is presented. It describes the changes in the number of luminescence centers with a certain type of local environment relative to the total number of all luminescence centers when the excitation conditions change, which, in turn, makes it possible to obtain information on changes in the structure of the materials under study. A normal distribution was used to isolate individual bands associated with the emission of certain types of luminescence centers. Considering that the presence of various phonon or other effects caused by the influence of the crystal lattice does not allow an accurate description of individual bands using a normal distribution, it is advisable to use both the energy scale of the emitted photons and the wavelength scale as coordinates along the abscissa axis to obtain quantitative models of luminescence centers with a change in the excitation conditions.*

*Key words:* system of emitting centers, luminescence spectra, normal distribution, quantitative model, individual luminescence bands.

#### **Постановка проблемы**

Большинство монокристаллических материалов, размеры которых значительно превышают постоянную их кристаллической решетки, обладают широкими спектрами люминесценции, обусловленными всеми излучающими центрами в исследуемых образцах и определенным образом характеризующими их люминесцентные свойства. Как правило, эти центры имеют различную природу, занимают разные положения в кристаллической решетке, имеют разное локальное окружение и, соответственно, излучают свет в разных участках спектра. Для их классификации и получения информации об изменениях люминесцентных свойств исследуемых монокристаллических материалов возникает необходимость разделения общих, широких экспериментальных спектров люминесценции

на индивидуальные составляющие – полосы излучения, каждая из которых связывается с излучением центров с определенным локальным окружением. В общем случае эти индивидуальные полосы перекрываются между собой. Их количество, состав, форма контура и положение в экспериментальном спектре могут быть неизвестны, что накладывает определенные сложности для построения адекватной модели системы излучающих центров и выявления свойств исследуемых материалов.

### **Анализ последних исследований и публикаций**

К настоящему моменту существуют способы, позволяющие выделять индивидуальные полосы для решения задач классификации излучающих центров по их положению в кристаллической решетке и выявления их поведения при изменении условий возбуждения люминесценции. В силу определенных обстоятельств далеко не все из них удобны в практическом применении и позволяют получать адекватные модели индивидуальных полос люминесценции при различных условиях проведения эксперимента. Так, например, известный метод Аленцева-Фока [1] позволяет графическим путем определить форму контура и количество индивидуальных полос, но сложность его применения существенно зависит от их числа. Модуляционные методы [2, 3], благодаря своей высокой чувствительности, непосредственно в процессе экспериментов позволяют выявить в экспериментальном спектре слабые структуры сложных индивидуальных полос. Однако, их высокая чувствительность по отношению к различного рода шумовым сигналам часто приводит к тому, что число регистрируемых индивидуальных полос может превышать число известных типов центров люминесценции, что, в свою очередь требует проведения дополнительных уточняющих экспериментов. С точки зрения системного подхода к разрабатываемой в настоящей работе методике наиболее близки аппроксимационные методы исследования, где для математического описания индивидуальных полос используется нормальное распределение (функция Гаусса) [4, 5]. При этом удается получать достаточно адекватные количественные модели центров люминесценции для разных условий возбуждения при наличии априорной информации о количестве индивидуальных полос и положениях их максимумов.

### **Цель исследования**

Целью данной работы является разработка методики анализа спектров люминесценции путем создания адекватных моделей системы излучающих центров, отражающих их поведение при различных изменениях условий возбуждения.

### **Основная часть**

Систему излучающих центров можно отнести к классу очень сложных систем с точки зрения недостаточности информации о ней [6]. Каждая новая часть получаемой информации позволяет более точно прогнозировать ее свойства при различных условиях проведения эксперимента, а, значит, упрощает эту изучаемую систему и позволяет использовать новые экспериментальные результаты на очередном этапе практического применения исследуемых материалов. Для описания системы следует построить ее адекватную модель, отражающую поведение системы при различных изменениях окружающей среды. Для этого будем исследовать возможность применения двух подходов в построении моделей: аналитического и синтетического [6]. Первый направлен на выяснение, из чего состоит рассматриваемая система, а второй позволяет найти ответы на вопросы, связанные со взаимодействием рассматриваемой системы с окружающей средой.

Оба подхода не противопоставляются, а взаимно дополняют друг друга. Следуя аналитическому подходу необходимо последовательно выполнить следующие этапы:

- 1) сложное разделить на более мелкие, простые части;
- 2) объяснить каждый из полученных фрагментов;
- 3) объединить объяснение частей в объяснение целого.

Исходя из классификации моделей [6], общий экспериментальный спектр люминесценции – это реальная модель прямого подобия люминесценции оригинальной системы излучающих центров изучаемого монокристаллического материала (далее оригинал), реально отображающая количество центров с определенными энергиями оптических переходов (либо излучающих на определенной длине волны). Предложенная в данной работе модель системы индивидуальных полос является моделью косвенного подобия (далее модель), где для описания этого же количества используются законы распределения и другие математические выражения. Проводя декомпозицию сложного оригинала на более простые составляющие согласно п. 1), общий экспериментальный спектр люминесценции раскладывается на индивидуальные полосы. Для того, чтобы дать объяснение каждому из полученных фрагментов согласно п. 2) определяется форма этих полос, положение их максимума, излучение каждой из них связывается с излучением центров люминесценции с разной локальной симметрией, занимающих определенные положения в кристаллической решетке изучаемых монокристаллических материалов. Анализ поведения кривой суммы индивидуальных полос, позволяет выполнить п. 3), объединяя объяснение частей в объяснение целого. Математическое описание этих действий представлено формулой:

$$I(x) = y_1(x) + y_2(x) + \dots + y_n(x) + \Delta A(x), \quad (1)$$

где  $I(x)$  – интенсивность экспериментального спектра в точках измерения;  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ , ...,  $y_n(x)$  – функции, определяющие индивидуальные полосы;  $\Delta A(x)$  – функция «ошибки», характеризующая точность разложения.

Адекватность построенной модели оригиналу можно определить по точности совпадения кривой суммы индивидуальных полос с кривой общего экспериментального спектра, то есть по значению интеграла от функции  $\Delta A(x) - \int \Delta A(x) dx$ . Чем меньше значение этого интеграла, тем более адекватна модель. Данный параметр во многом зависит от правильности описания формы индивидуальных полос, то есть от правильности выбора функций  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ , ...,  $y_n(x)$ . Система однотипных излучающих центров большинства монокристаллических соединений, размеры которых значительно превышают постоянную их кристаллической решетки, вполне удовлетворяет следствию центральных предельных теорем теории вероятностей, утверждающих, что сумма большого количества независимых случайных величин имеет распределение близкое к нормальному. Поэтому, использование функции нормального распределения для описания индивидуальных полос люминесценции, обусловленных излучением центров свечения с определенным типом локальной симметрии, имеющих нормальное распределение по своим свойствам, вполне обосновано:

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad (2)$$



где  $P(x)$  – плотность вероятности,  $\sigma$  – дисперсия,  $\mu$  – математическое ожидание,  $x$  – абсцисса случайной величины.

В координатах экспериментальных спектров выражение (2) приводится к виду:

$$y_i(x) = A_i \exp \left[ \frac{-(x - x_{i\max})^2}{2w_i^2} \right], \quad (3)$$

где  $y_i(x)$  – интенсивность излучения  $x_{i\max}$  – координата соответствующего максимума по оси абсцисс,  $w_i$  – ширина пика на уровне половины амплитуды максимума,  $A_i$  – амплитуда максимума  $i$ -ой индивидуальной полосы,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

При этом:

$$A_i = \frac{a_i}{\sqrt{2\pi}w_i}, \quad (4)$$

где  $a_i$  – коэффициент пропорциональности между функцией плотности вероятности нормального распределения вида (1) и функцией, описывающей интенсивность излучения соответствующей индивидуальной полосы.

Таким образом в модели (1) левая часть выражения – это значения интенсивности экспериментального спектра в точках измерения, а правая представляет собой сумму моделируемых индивидуальных полос, каждая из которых описывается нормальным распределением со своими параметрами  $A_i$ ,  $w_i$ . Данные величины могут быть найдены в результате использования метода наименьших квадратов и минимизации специальной целевой функции вида:

$$\Phi(A_i, w_i) = \sum_{j=1}^m \left[ I(x_j) - \sum_{i=1}^n \left[ A_i \exp \left( \frac{-(x_j - x_{i\max})^2}{2(w_i)^2} \right) \right] \right]^2 = \min, \quad (5)$$

где  $j$  и  $m$  – номер экспериментальной точки и их количество, соответственно.

Минимизация выражения (5) является весьма непростой задачей, если, во-первых, изначально неизвестны количество полос и положения их максимумов, а во-вторых – неизвестны их полуширины. Неизвестность первого в итоге приводит к недостаточной адекватности получаемой модели всей системы, а в результате неизвестности второго возникает задача минимизации нелинейной целевой функции (5). Поэтому, до начала моделирования число полос необходимо конкретизировать путем использования различных экспериментальных методик. Наличие перекрытия индивидуальных полос делает крайне сложным определение значений  $w_i$ . Априорное предположение значений этих величин снимает нелинейность выражения (5), приводя его к виду:

$$\Phi(A_i) = \sum_{j=1}^m \left[ I(x_j) - \sum_{i=1}^n \left[ A_i \exp \left( \frac{-(x_j - x_{i\max})^2}{2(w_i)^2} \right) \right] \right]^2 = \min, \quad (6)$$

но получаемая при этом модель в большинстве случаев имеет низкую адекватность как показано на рис. 1, где концентрация активатора  $C_{Mn} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ gMnS/gZnS}$ , длина волны

возбуждающего света  $\lambda_{exit} = 396$  нм, величина ПД  $\varepsilon = 0$  %. Точками обозначены экспериментальные значения общего спектра фотолуминесценции (ФЛ). Сплошными линиями обозначены расчетные функции интенсивностей индивидуальных полос ФЛ и их сумма. На вставке изображена функция отклонения значений огибающей разложения  $\Delta A$  от значений экспериментальных спектров.

В то же время более сложная минимизация (5), позволяющая более точно найти значения  $A_i, w_i$ , дает возможность получить более адекватную модель, как показано на рис. 2 [4], где концентрация активатора  $C_{Mn} = 10^{-2} \text{ gMnS/gZnS}$ , длина волны возбуждающего света  $\lambda_{exit} = 408$  нм.

Площадь под кривой, пропорциональная количеству центров свечения, ответственных за излучение каждой индивидуальной полосы –  $y_i(x)$ , будет определяться по формуле:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} y_i(x) dx . \quad (7)$$

Пределы интегрирования  $x_1$  и  $x_2$  принадлежат участку, где функция  $y_i(x) \neq 0$ .

Если адекватность полученной модели удовлетворительна, то построение можно считать законченным, если же нет, то необходимо проводить дальнейшую декомпозицию «сложных» фрагментов с объяснением полученных частей и объединением этого объяснения в объяснение целого. То есть, либо производить корректировку функций  $y_i(x)$ , либо разделять на фрагменты  $\Delta A(x)$ . Последнее является сложной задачей, поскольку связано с учетом различных фоновых или иных эффектов, вызывающих отклонения формы спектра излучения индивидуальной полосы от нормального вида. Эти эффекты достаточно трудно контролируемые (поскольку их количество и характер зависит от многих параметров таких как вид, размер, форма, условия возбуждения исследуемого материала, и т.д.). В результате возникает ситуация, когда адекватность получаемой модели все еще недостаточна, а дальнейшую декомпозицию проводить невозможно и люминесцентный анализ приходится прекращать.

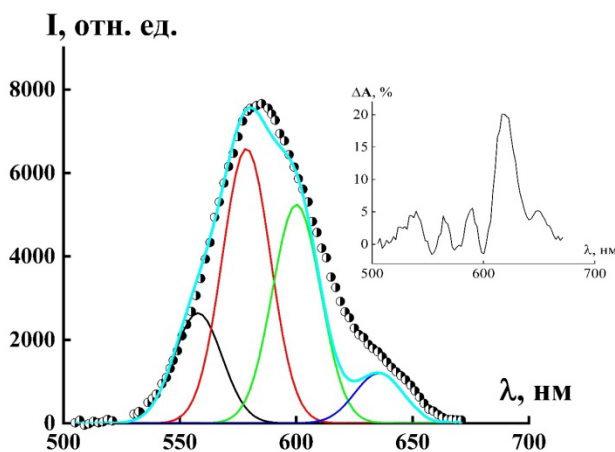


Рис. 1. Разложение спектра ФЛ монокристаллов  $ZnS:Mn$  на индивидуальные полосы с  $\lambda_{max} = 557, 578, 600$  и  $635$  нм при использовании целевой функции (6)

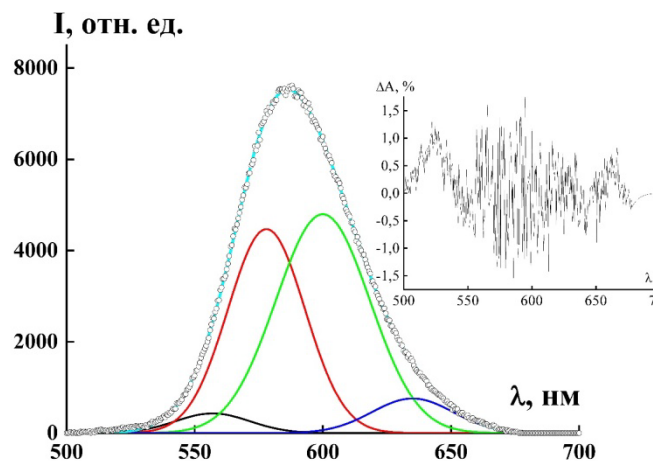


Рис. 2. Разложение спектра ФЛ монокристаллов  $ZnS:Mn$  на индивидуальные полосы с  $\lambda_{max} = 557, 578, 600$  и  $635$  нм при использовании целевой функции (5)

Кроме того, существуют вопросы, на которые аналитический подход не может дать ответ в принципе, поскольку он не связан ни с внутренним устройством системы, ни с ее взаимодействием с окружающей средой. Например, можно до бесконечности анализировать устройство механических часов, изучать взаимодействие отдельных узлов и механизмов, изучать их взаимодействие между собой, но это не дает ответа на вопрос, зачем нужно знать время. Применительно к рассматриваемому люминесцентному анализу, можно достаточно точно провести разложение с учетом и объяснением всех фононных, или иных эффектов, вызывающих отклонение формы спектра индивидуальных полос от нормальной, но это не даст ответа на вопрос зачем это нужно делать. Ответы на подобные вопросы дает синтетический подход [6], согласно которому выполняются последовательно следующие этапы:

- 1) выделяется метасистема, частью которой является рассматриваемая система индивидуальных полос люминесценции;
- 2) производится возможный анализ метасистемы, то есть рассматриваются ее состав и структура;
- 3) дается объяснение роли рассматриваемой системы индивидуальных полос в составе метасистемы с помощью изучения ее связей с другими частями метасистемы.

Применительно к нашей модели в качестве метасистемы рассматривается изучаемый монокристаллический материал, частью которого является система излучающих центров, представленная экспериментальным спектром люминесценции – оригиналом. В качестве модели, соответственно, выступает система индивидуальных полос (1). Анализ метасистемы заключается в учете результатов предыдущих и текущих исследований анализируемых люминесцентных материалов. Изменения условий возбуждения люминесценции отражаются в экспериментальных спектрах и моделируются в (1) путем подбора значений  $A_i$ ,  $w_i$  при минимизации (5) и достижения минимальности  $\int \Delta A(x) dx$ , то есть достижения максимальной адекватности модели оригиналу. В результате получим модель, отражающую изменения количества центров свечения с определенным типом локального окружения относительно общего количества всех центров люминесценции при изменении условий возбуждения, что в свою очередь, позволяют получить информацию об изменениях структуры изучаемых материалов.

Для получения количественной модели центров свечения по оси ординат чаще всего в относительных единицах откладывается величина, пропорциональная количеству регистрируемых фотонов. Вопрос использования различных координат по оси абсцисс для выделения, удовлетворяющих нормальному распределению, индивидуальных полос, не имеет однозначного ответа. Наиболее часто используемыми единицами измерения при регистрации люминесцентного излучения в видимом диапазоне являются единицы длин волн (нанометры) и единицы энергии фотонов (электронвольты). При этом если, например, в шкале энергий использовать нормальное распределение для описания индивидуальной полосы, то переход к шкале длин волн даст ассиметричную негауссову форму. Если взять две одинаковые гауссовы кривые А и Б в разных участках шкалы длин волн, то площади под этими кривыми будут равны. Если теперь перейти к шкале энергий, то площади под кривыми уже не одинаковы. Соответственно, если на основании первого вычисления сделать вывод о равенстве количества центров, ответственных за полосы А и Б, то по результатам вычислений в шкале энергий этот вывод будет неверен. Таким образом, при наличии нескольких перекрывающихся полос, аппроксимация их с помощью

нормального распределения может привести к ошибкам двух видов: либо неверному соотношению интенсивностей полос, либо в дополнение к этому неверное определение их количества (асимметричную негауссову полосу можно успешно аппроксимировать двумя «гауссианами»).

С одной стороны, поскольку ожидается нормальное распределение центров свечения по их свойствам, то для центров различной конфигурации следует ожидать нормального распределения количества носителей заряда, характеризующих их состояние в шкале энергий излучательных переходов по оси абсцисс. При этом площадь под кривой индивидуальной полосы, пропорциональная количеству излучающих центров, будет иметь физический смысл суммарной энергии излучения индивидуальной полосы, то есть число фотонов, умноженное на энергию фотона. Однако, если использовать «энергетические» координаты и предполагать, что в таких координатах индивидуальные полосы имеют гауссову форму, а не какую-то другую, то для этого, согласно классическим представлениям, нужно иметь веские основания [1]. При этом, если нет никаких дополнительных сведений о форме индивидуальных полос, то неизвестно в каких координатах следует анализировать сложную полосу для разделения ее на гауссовы составляющие. Следовательно, с теоретической точки зрения остается неясным, почему в качестве элементарной следует брать гауссову, а не какую-нибудь иную, например, колоколообразную форму. В работах [1, 7] приводится модель конфигурационных координат, из которой следует, что как раз в энергетических координатах спектр люминесценции может иметь гауссову форму только в том случае, если участок потенциальной кривой основного состояния, расположенный под областью минимума возбужденного состояния, можно заменить отрезком прямой. Во всех остальных случаях спектр люминесценции не будет иметь гауссовой формы. Таким образом, гауссова форма элементарной полосы в «энергетических» координатах с учетом вышеописанного, и в результате действия фононных или иных эффектов скорее является частным случаем, чем правилом, и для применения нормального распределения для описания индивидуальных полос имеется много достаточно жестких условий.

С точки зрения предложенной в этой работе модели (1) это означает, что если функции  $u_n(x)$  удовлетворяют выражению (3), то даже теоретически интеграл от функции  $\Delta A(x)$  не может быть равен нулю  $\int \Delta A(x) dx \neq 0$ , что изначально снижает адекватность (1). Следуя при этом аналитическому подходу построения модели, необходимо проводить дальнейшую декомпозицию системы излучающих центров, выделять неизвестные фононные эффекты, давать их объяснение и учитывать это при определении формы индивидуальной полосы. При таком подходе сложность моделирования уже на этапе данной декомпозиции многократно возрастает, что может привести к потере актуальности выполняемой задачи.

С другой стороны, если изначально форма индивидуальной полосы неизвестна и в результате наличия описанных выше причин реальная форма спектра в энергетической шкале отличается от гауссовой, то в силу учета этих же обстоятельств при использовании нормального распределения в шкале длин волн по оси абсцисс, значение интеграла  $\int \Delta A(x) dx$  в шкале длин волн может быть меньше, чем в шкале энергий фотонов:

$$\int \Delta A(\lambda) d\lambda < \int \Delta A(h\nu) d(h\nu), \quad (8)$$

где  $\lambda$  – длина волны в нанометрах,  $h\nu$  – энергия излучаемых фотонов в электронвольтах.

Следовательно, в данном случае, несмотря на то, что, на первый взгляд, не просматривается физический смысл использования нормального распределения в шкале длин волн, более адекватной может быть модель индивидуальных полос (1) именно в таких координатах по оси абсцисс.

Исходя из вышеописанного, в зависимости от вида исследуемых материалов, для получения наиболее полной информации, на наш взгляд, было бы целесообразным исследование обоих случаев. В результате мы получаем «облако» данных, внутри которого могут находиться точные значения формы контуров индивидуальных полос люминесценции исследуемых монокристаллических материалов.

### Выводы

Таким образом, в процессе анализа спектров люминесценции путем построения модели системы индивидуальных полос при отсутствии априорной информации об их форме и количестве для получения наилучшей адекватности модели при изменении условий возбуждения люминесценции необходимо комплексное использование аналитического и синтетического подхода. Учитывая то, что наличие различных фоновых или иных эффектов, обусловленных влиянием кристаллической решетки, не позволяет точно описывать индивидуальные полосы с помощью нормального распределения, для получения количественных моделей центров люминесценции при изменении условий возбуждения целесообразным является использование в качестве координат по оси абсцисс как шкалы энергии излучаемых фотонов, так и шкалы длин волн. При этом точные значения формы контуров индивидуальных полос могут находиться внутри своеобразного «облака» результатов, полученных при использовании обоих шкал.

### Список использованной литературы

1. Фок М. В. Разделение сложных спектров на индивидуальные полосы при помощи обобщённого метода Аленцева. *Труды ФИАН СССР*. 1972. № 59. С. 3–24.
2. Бобыль А. В., Будянский В. И., Федоров А. И., Шейкман М. К. Исследование структуры сложных полос люминесценции в  $CdSe_x Te_{1-x}$   $\lambda$  - методом. Сб. *Люминесцентные и особо чистые вещества*. Ставрополь. 1974. Т. 2. С. 82-85.
3. Будянский В.И., Лепсверидзе Д.С., Сальков Е.А., Шепельский Г.А. Дифференциальный спектр люминесценции. *ФТТ*. 1973. Т. 15. № 5. С. 1620-1621.
4. Prokofiev T. A., Ivanchenko A.V., Gnatushenko V. V. (2019). Luminescent Analysis of ZnS:Mn Single-Crystal Lattice Changes During Plastic Deformation. *Journal of Applied Spectroscopy*. doi:10.1007/s10812-019-00802-8.
5. Прокофьев Т.А., Иванченко А.В. Температурные зависимости фотолюминесценции ионов  $Mn^{2+}$  с разным локальным окружением в монокристаллах ZnS. Журнал прикладной спектроскопии. 2020. Т. 87, № 4. С. 561–569.
6. Тарасенко Ф.П. Прикладной системный анализ. Москва, издательство “КноРус”. 2010. С. 35–38, 59–61.
7. Прокофьев Т.А., Полежаев Б.А., Коваленко А.В. Журнал прикладной спектроскопии. 2005. Т. 72, № 6. С. 788–793.

### References

1. Fok, M. V. (1972). Razdelenie slozhnyih spektrov na individualnyie polosyi pri pomoschi obobschYonnogo metoda Alentseva. *Trudy FIAN SSSR*. **59**, 3–24.
2. Bobyil, A.V., Budyanskiy, V.I., Fedorov, A.I. & Sheykman, M.K. (1974). Issledovanie strukturyi slozhnyih polos lyuminesentsii v CdSex Te<sub>1-x</sub> λ-metodom. *Sb. Lyuminescentnyie i osobo chistyie veschestva*. Stavropol. **2**, 82-85.
3. Budyanskiy, V.I., Lepsveridze, D.S., Salkov, E.A. & Shepelskiy, G.A. (1973). Differentsialnyiye spektr lyuminesentsii. *FTT*. **15**, 5, 1620-1621.
4. Prokofiev, T. A., Ivanchenko, A. V. & Gnatushenko, V. V. (2019). Luminescent Analysis of ZnS:Mn Single-Crystal Lattice Changes During Plastic Deformation. *Journal of Applied Spectroscopy*. doi:10.1007/s10812-019-00802-8.
5. Prokofev, T.A. & Ivanchenko, A.V. (2020). Temperaturnyie zavisimosti fotolyuminesentsii ionov Mn<sup>2+</sup> s raznyim lokalnym okruzheniem v monokristallah ZnS. *Zhurnal prikladnoy spektroskopii*. **87**, 4, 561–569.
6. Tarasenko, F.P. (2010). Prikladnoy sistemnyiy analiz. Moskva, izdatelstvo “KnoRus”. 35–38, 59–61.
7. Prokofev, T.A., Polezhaev, B. A. & Kovalenko, A.V. *Zhurnal prikladnoy spektroskopii*. **72**, 6, 788–793.

Прокоф’єв Тихін Анатолійович — к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри комп’ютерних наук та інформаційних технологій Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара (м. Дніпро), e-mail: tichonprok@yahoo.de, ORCID: 0000-0002-5812-4618.

Іванченко Олександр Володимирович — к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри прикладної радіофізики, електроніки та наноматеріалів Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара (м. Дніпро), e-mail: ivanchenkoav@ukr.net, ORCID: 0000-0003-4380-268X.

Гнатушенко Володимир Володимирович — д.т.н., професор, завідувач кафедри інформаційних технологій та комп’ютерної інженерії Національного технічного університету «Дніпровська політехніка» (м. Дніпро), e-mail: vvgnat@ukr.net, ORCID: 0000-0003-3140-3788.

УДК 621.314.52

С.Р.СЄЛІВЕРСТОВА, О.К.КОЛЕБАНОВ

Херсонська державна морська академія

## МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМИ РОЗПОДІЛУ АКТИВНОЇ ПОТУЖНОСТІ МІЖ СУДНОВИМИ ГЕНЕРАТОРАМИ

*Огляд питань розподілення потужності між паралельно працюючими генераторами в багатогенераторних системах відбувається разом з аналізом та опрацюванням питань підвищення паливної ефективності енергосистеми. Відповідно до вимог Додатків IV, VI до Протоколу 1997 р. Міжнародної конвенції щодо запобігання забрудненню зі суден (МАРПОЛ) та положенням енергетичної ефективності морських суден, які були прийняті Комітетом по захисту морського середовища Міжнародної морської організації (ІМО МЕРС), встановлені ряд вимог щодо уникнення потрапляння нафтовмісних продуктів у морське середовище (додаток IV) та зниження обсягу викидів вуглекислого газу в атмосферу об'єктами морського транспорту (додаток VI). Відомо, що частота та напруга генератора залежить від частоти обертів дизеля та напруги збудження генератора. В свою чергу, стабільність роботи дизеля забезпечується регулюванням подачі палива. Таким чином, досягнення економічно найвигіднішого режиму роботи електроенергетичної системи з урахуванням вимог енергобезпеки, диктує необхідність організації якісної регульованої роботи силових агрегатів.*

*Моделювання мікропроцесорної системи розподілу активної потужності між генераторами суднової електроенергетичної системи проводилось за результатами аналізу процесу розподілу активної потужності між паралельно працюючими генераторами за наступними параметрами. Навантаження мережі складало активний та активно-індуктивний характер потужністю 200 кВт і 100 кВт і 200 кВт. Потужність кожного генератора 315 кВт.*

*Для дослідження перехідних процесів, які протікають в мережі після моменту синхронізації генераторів при різних умовах, використовувалась модель із двох генераторів, що створена за допомогою пакету MatLab 6.5.*

*Модель системи розподілу активної потужності представлена у вигляді цифрового скінченного автомата, який формує сигнал на зміну положення паливної рейки приводного дизельного агрегата в залежності від поточного завантаження генератора. Моделювання процесу розподілу активної потужності показало, що при зменшенні періоду тактового сигналу, що подається на цифровий автомат, в системі виникають незгасаючі коливання активної потужності між генераторами.*

*Ключові слова: суднові електроенергетичні системи, активна потужність, синхронний генератор, моделювання системи розподілу активної потужності.*

S. R. SELIVERSTOVA, O. K. KOLEBANOV

Kherson State Marine Academy

## SIMULATION OF ACTIVE POWER DISTRIBUTION SYSTEM BETWEEN SHIP GENERATORS

*The review of power distribution issues between generators operating in parallel in multigenerator systems is carried out together with the analysis and elaboration of issues of increasing the fuel efficiency of the power system. In accordance with the requirements of Annexes IV, VI to the 1997 Protocol to the International Convention for the Prevention of Pollution from Ships (MARPOL) and the provisions on energy efficiency of ships, adopted by the Marine Environment Protection Committee of the International Maritime Organization (IMO MEPC), a number of avoidance requirements release of oil-containing products into the marine environment (Annex IV) and reduction of carbon dioxide emissions into the atmosphere by maritime transport facilities (Annex VI). It is known that the frequency and voltage of the generator depends on the speed of the diesel engine and the excitation voltage of the generator. In turn, the stability of the diesel engine is ensured by regulating the fuel supply. Thus, the achievement of the most economically advantageous mode of operation of the power system, taking into account the requirements of energy security, dictates the need to organize high-quality regulated operation of power units.*

*Modeling of the microprocessor system of active power distribution between the generators of the ship power system was carried out based on the results of the analysis of the process of active power distribution between the generators operating in parallel according to the following parameters. The network load was active and active-inductive in nature with a capacity of 200 kW and 100 kW and 200 kW. The power of each generator was 315 kW.*

*To study the transients that occur in the network after the synchronization of generators under different conditions, we used a model of two generators, created using the package MatLab 6.5.*

*The model of the active power distribution system is presented in the form of a digital finite automatic machine, which generates a signal to change the position of the fuel rail of the drive diesel unit depending on the current load of the generator. Simulation of the process of active power distribution showed that when the period of the clock signal supplied to the digital machine is reduced, the system has unquenchable fluctuations of active power between the generators.*

*Keywords: ship power systems, active power, synchronous generator, active power distribution system simulation.*

**С.Р.СЕЛИВЕРСТОВА, А.К.КОЛЕБАНОВ**

Херсонская государственная морская академия

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АКТИВНОЙ МОЩНОСТИ СУДОВЫХ ГЕНЕРАТОРОВ**

*Обзор вопросов распределения мощности между параллельно работающими генераторами в судовых системах проводится вместе с анализом и обработкой вопросов повышения топливной эффективности энергосистемы. В соответствии с требованиями приложений IV, VI Протокола 1997 Международной конвенции по предотвращению загрязнения с судов (МАРПОЛ) и положением энергетической эффективности морских судов, которые были приняты Комитетом по защите морской среды Международной морской организации (ИМО МЕРС), установлен ряд требований по предотвращению попадания нефтесодержащих продуктов в морскую среду (приложение IV) и снижение объема выбросов углекислого газа в атмосферу объектами морского транспорта (приложение VI). Известно, что частота и напряжение генератора зависит от частоты вращения дизеля и напряжения возбуждения генератора. В свою очередь, стабильность работы дизеля обеспечивается регулировкой подачи топлива. Таким образом, достижение экономически выгодного режима работы электроэнергетической системы с учетом требований энергобезопасности, диктует необходимость организации качественной регулируемой работы силовых агрегатов.*

*Моделирование микропроцессорной системы распределения активной мощности между генераторами судовой электроэнергетической системы проводилось по результатам анализа процесса распределения активной мощности между параллельно работающими генераторами по следующим параметрам. Нагрузка сети носила активный и активно-индуктивный характер мощностью 200 кВт и 100 кВт и 200 кВт. Мощность каждого генератора 315 кВт.*

*Для исследования переходных процессов, протекающих в сети после момента синхронизации генераторов при различных условиях, использовалась модель из двух генераторов, созданная с помощью пакета MatLab 6.5.*

*Модель системы распределения активной мощности представлена в виде цифрового конечного автомата, который формирует сигнал на изменение положения топливной рейки приводного дизельного агрегата в зависимости от текущей загрузки генератора. Моделирование процесса распределения активной мощности показало, что при уменьшении периода тактового сигнала, подаваемого на цифровой автомат, в системе возникают незатухающие колебания активной мощности между генераторами.*

*Ключевые слова: судовые электроэнергетические системы, активная мощность, синхронный генератор, моделирование системы распределения активной мощности.*

### **Постановка проблемы**

Сучасні суднові електроенергетичні системи в своєму складі мають декілька генераторних агрегатів. Якісне розподілення потужності між паралельно працюючими генераторами неможливе без підвищення паливної ефективності енергосистеми. Характер розподілення активної та реактивної потужностей є наслідком якості параметрів електроенергії, що виробляється генераторними агрегатами. Частота та напруга генератора залежить від частоти обертів дизеля та напруги збудження генератора. В свою чергу, стабільність роботи дизеля забезпечується регулюванням подачі палива. Таким чином, досягнення економічно найвигіднішого режиму роботи електроенергетичної системи диктує необхідність організації регульованої паралельної роботи силових агрегатів.



### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Генераторні агрегати в судновій електроенергетичній системі об'єднані на паралельну роботу електричними мережами [1, 3]. Економічність режиму роботи суднової електроенергетичної системи визначається не тільки сумарною витратою палива, але й втратами потужності у електричних мережах [4]. Судновим електроенергетичним системам притаманні ряд відмінностей, порівняно з автономними наземними електростанціями. Порівняно невелика довжина кабельних мереж зумовлює зростання швидкодії плинності процесів передачі, зміни, відгуків, перешкод, коротких замикань у ланцюгах судових мереж. Ці відмінності впливають на характер статичних та динамічних процесів, що спостерігаються в електроенергетичній системі [1, 2]. Разом з тим, короткі кабельні лінії силової суднової мережі не обмежують максимальні значення струмів та електромагнітних моментів в перехідних процесах, що відбуваються в електроенергетичних установках. Розподілення активного та реактивного навантаження між паралельно працюючими генераторами при підключенні судових споживачів великої потужності до розподільчих мереж багатогенераторної системи призводять до більш складних перехідних процесів з ризиком знеструмлення електроенергетичної системи [3, 5].

У наукових працях, які присвячені дослідженню вказаних процесів в судових електроенергетичних системах, виконуються розрахунки процесів в різних експлуатаційних та аварійних режимах. Визначаються струми, моменти в елементах електроенергетичної системи, напруга та частота мережі, тривалість динамічних процесів та умови стійкості і надійності системи, розраховуються налагоджувальні параметри систем регулювання та захисту [4, 8].

Одним із способів вирішення цих складних завдань є використання методів математичного моделювання, які дозволяють розраховувати характеристики електроустановок в перехідних та сталих режимах [6].

### Мета дослідження

Метою роботи є дослідження процесу розподілу активної потужності між генераторами та моделювання мікропроцесорної системи, яка в умовах роботи суднової електроенергетичної системи виконує функції розподілу активної потужності між генераторами.

### Викладення основного матеріалу дослідження

Для дослідження перехідних процесів, які протікають в мережі після моменту синхронізації генераторів при різних умовах, використана модель із двох генераторів, що створена за допомогою пакету MatLab 6.5. Її вигляд приводиться на рис.1.

Модуль 3-Phase Breaker моделює роботу автомата, що підключає один генератор до другого. Навантаження мережі складає активний та активно-індуктивний характер потужністю 200 кВт і 100 кВт і 200 кВт. Потужність кожного генератора дорівнює 315 кВт. Після процесу автоматичної точної синхронізації генераторів в роботу вступає система розподілення активної потужності, що представляє собою цифровий скінченний автомат.

Якщо включення синхронної машини в мережу відбувається в той момент, коли стала частота її обертання менше синхронної, то машина буде працювати відразу ж після включення в режимі синхронного двигуна, споживаючи з мережі активну потужність.

Якщо включення синхронної машини в мережу відбувається при частоті обертання вище синхронної, то вона буде працювати в режимі синхронного генератора, віддаючи активну потужність у мережу. У тому та іншому випадку активна потужність, що віддається або споживається синхронною машиною, визначається ступенем

нерівномірності автоматичного регулятора частоти обертання первинного двигуна й співвідношенням частот генераторів, що синхронізуються. На першому циклі коливань агрегат з більшою частотою обертання приймає на себе основну частину активного навантаження системи, розвантажуючи генератор, що працює на зміщеній вниз статичній частотній характеристиці. Процес перерозподілу навантажень закінчується протягом 0,2-0,3 с. Починаючи з деякої вихідної різниці частот, (близько 2,5% при нахилі частотних характеристик 3%), у системі з меншою вихідною частотою обертання спостерігається перехід генератора в режим двигуна. Відповідно до цього, при підвищенні різниці частот спостерігається збільшення провалів частоти на стороні генератора, що має більшу вихідну частоту обертання.

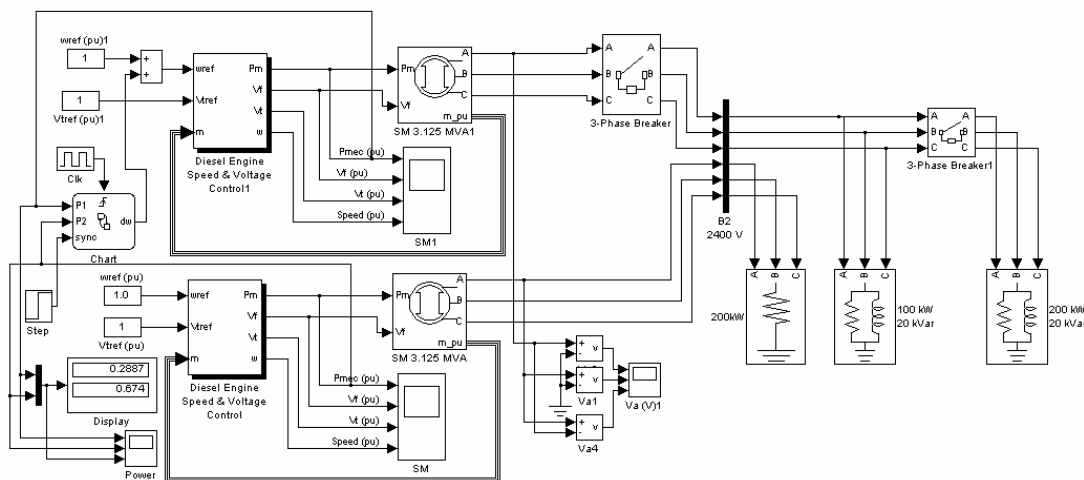


Рис. 1 – Модель електростанції з двома синхронними генераторами (моделювання у MatLab)

Вхідними параметрами блоку, що моделює синхронний генератор, є механічна потужність, що розвиває приводний дизель, та напруга збудження. Роботу дизель-генератора та системи збудження генератора моделює блок Diesel Engine. Його структурна схема приводиться на рис.2.

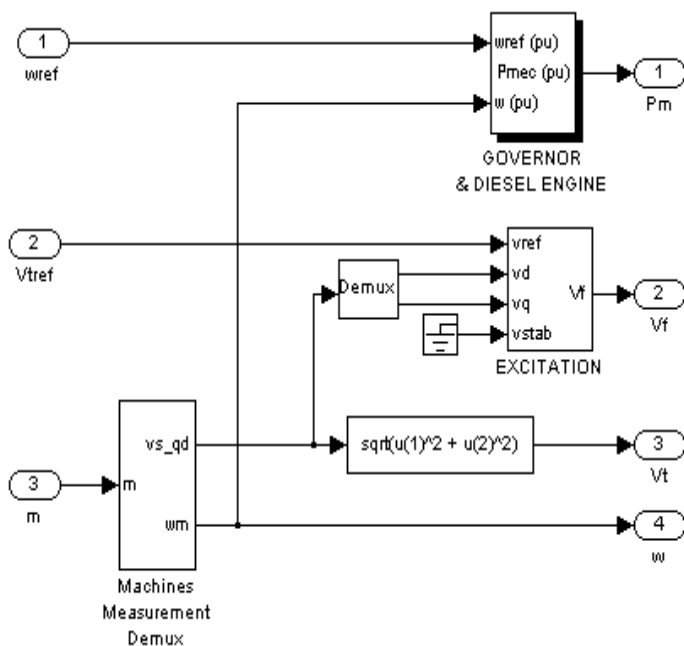


Рис. 2 – Структурна схема блоку Diesel Engine

Цей блок складається з моделі дизеля та його системи керування (Governor & Diesel Engine), блоку збудження генератора (Excitation), блоку вимірювання параметрів синхронного генератора (Machines Measurement Demux). Вхідними параметрами цього блоку є сигнал, що задає швидкість дизеля, напругу збудження, напругу статора та поточну швидкість обертання генератора. В регуляторі швидкості дизеля задаються такі параметри, як коефіцієнт підсилення (40), постійні часу, які враховуються в передаточній функції генератора, мінімальний та максимальний вихідний сигнали, час затримки регулятора. Передаточна функція системи керування приводом має вигляд:

$$W_p(s) = 40 \cdot \frac{(1 + 0.2s)}{(1 + 0.01s + 0.02s^2)} \quad (1)$$

Передаточна функція приводу має вигляд:

$$W_n(s) = 40 \cdot \frac{(1 + 0.25s)}{s \cdot (1 + 0.009s)(1 + 0.0384s)} \quad (2)$$

Коефіцієнт підсилення та постійна часу регулятора збудження дорівнюють відповідно 200 та 0,02с.

### Результати моделювання

Суднова електроенергетична установка й система розподілу активної потужності, що використовується в ній, відноситься до гібридних систем. Всі ці системи складаються з аналогових та дискретних компонентів. Тому гібридні системи – це системи зі складною взаємодією дискретної та безперервної динаміки. Вони характеризуються не тільки безперервною зміною стану системи, але й стрибкоподібними варіаціями відповідно до режиму роботи (комутація навантаження, зміна кількості генераторів, що працюють).

У тому випадку, коли логіка роботи керуючої підсистеми є незмінною, а зовнішні умови відносно стабільні, говорять про трансформаційні системи. Для таких систем фази одержання інформації, її обробки та видачі вихідних сигналів чітко розмежовані. На момент звертання до системи всі вхідні сигнали визначені. Сигнали на виходах встановляться після деякого періоду обчислень. Обчислення виконуються по деякому алгоритму, що трансформує (перетворює) вхідний набір даних у вихідний. У протилежному випадку систему відносять до класу керованих подіями або реактивних. Реактивна – це така динамічна система, що сприймає зовнішні дискретні впливи й відповідає своїми реакціями на ці впливи. Причому реакції системи різні й залежать як від впливів, так і від стану, у якому система перебуває. Основна відмінність реактивних систем від трансформаційних – у принциповій непередбачуваності моментів надходження тих або інших сигналів. Ця непередбачуваність – наслідок зміни умов, у яких такі системи працюють.

Розглянута система розподілу активної потужності в складі суднової електроенергетичної установки відноситься до реактивних систем. Моделювання енергетичних процесів (безперервна складова поведінки системи) доповнюється моделюванням логіки роботи керуючих ними пристроїв (дискретний компонент). Математичний апарат опису в цьому випадку – це система рівнянь, але не диференціальних, а алгебраїчно-логічних. Для моделювання дискретної динаміки реактивних систем широко використовується запропонований Д. Харелом візуальний формалізм – Statechart (діаграми станів і переходів) [7]. Основні неграфічні компоненти таких діаграм – це подія і дія, основні графічні компоненти – стан і перехід. На основі діаграми станів можлива реалізація керуючої програми для мікроконтролера системи

розподілу активної потужності (РАП). Таким чином, представлення системи РАП у вигляді цифрового скінченного автомата дозволяє виконати моделювання роботи системи РАП у складі електроенергетичної системи, а також розробити програму для керуючого мікроконтролера.

На рис. 3 представлені осцилограми зміни активної потужності в електроенергетичній системі при відключеному пристрої розподілу активної потужності, після синхронізації генераторів при роботі на загальне навантаження потужністю 300 кВт.

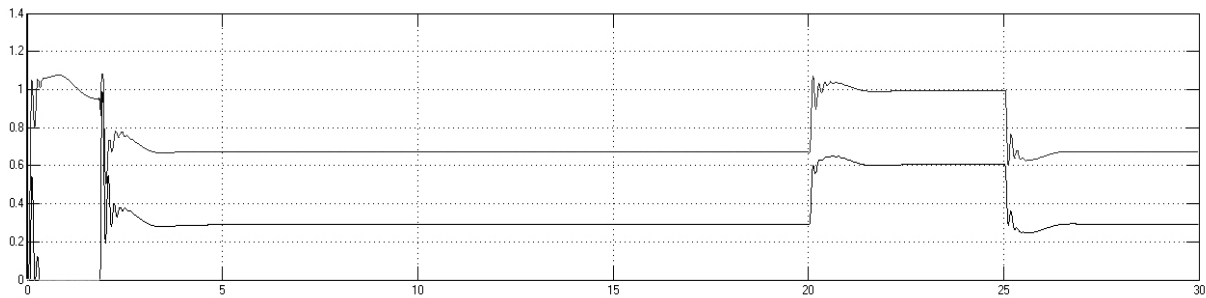


Рис. - 3. Осцилограми зміни активної потужності без роботи системи розподілення активної потужності

Після включення генераторів на паралельну роботу активна потужність між ними розподіляється нерівномірно й цей розподіл залежить від умов синхронізації (різниця фаз, частот і напруг у момент замикання контактів автоматичного вимикача) які, як правило, є випадковими. Як видно з рис. 3, після синхронізації генераторів перший генератор завантажений на 29%, другий на 67%. У момент часу  $t=20$ с відбувається підключення споживача електроенергії потужністю 200 кВт. При цьому завантаження кожного з генераторів дорівнює відповідно 61% й 103%. Таким чином, моделювання показало, що при відсутності пристрою розподілу активної потужності завантаження генераторів відбувається випадковим чином, при цьому можлива ситуація, коли один з генераторів буде перевантажений, незважаючи на те, що в системі є резерв потужності, що генерується. Для забезпечення пропорційного розподілу потужності між генераторами розроблений цифровий автомат, що моделює роботу системи РАП. На рис. 4 представлений граф переходів розробленого автомата.

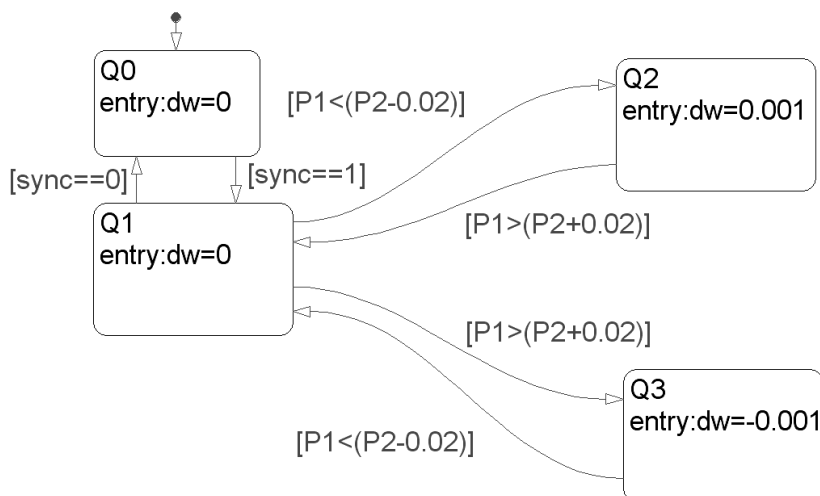


Рис. 4. - Граф переходів автомата, що моделює систему

У стані  $Q0$  автомат перебуває доти, поки не виконається синхронізація автомата. Сигнал на замикання автоматичного вимикача є подією, що викликає перехід автомата зі стану  $Q0$  у стан  $Q1$ . У стані  $Q2$  автомат формує на виході  $dw$  сигнал зміни положення паливної рейки, що відповідає збільшенню подачі палива, і, як наслідок, набір активної потужності. У стані  $Q3$  автомат формує на виході  $dw$  сигнал зміни положення паливної рейки, що відповідає зменшенню подачі палива, і, як наслідок, скидання активної потужності. Автомат буде перебувати в одному зі станів ( $Q2$  або  $Q3$ ) доти, поки активні потужності кожного з генераторів не стануть рівними, або не будуть лежати в деякому діапазоні, що відповідає припустимій нерівномірності розподілу активної потужності між генераторами. Автомат є синхронним, оскільки це відповідає реальній роботі пристрою розподілу активної потужності, а вихідні сигнали керування – це імпульсні сигнали на збільшення/зменшення обертів дизеля. На рис. 5 представлені осцилограми зміни активної потужності між генераторами при роботі пристрою.

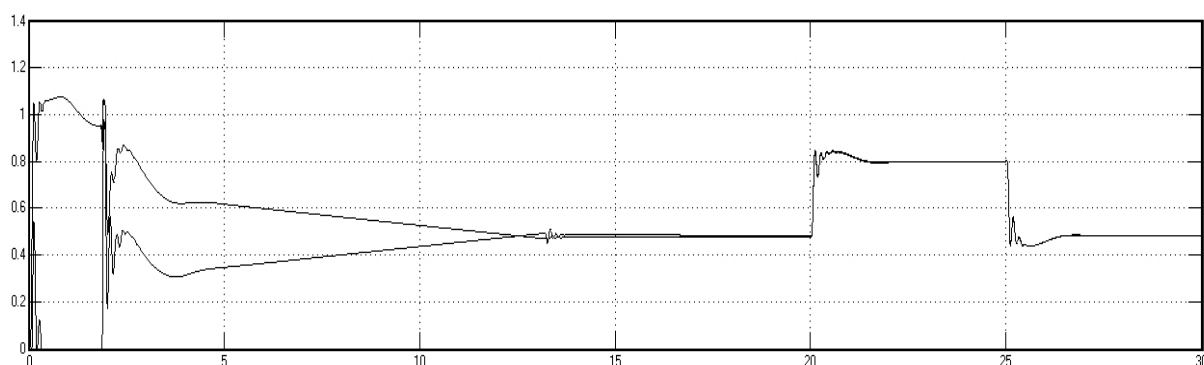


Рис. - 5. Осцилограми зміни активної потужності при роботі системи розподілення активної потужності

При зменшенні періоду тактового сигналу цифрового автомата пристрою РАП в енергосистемі виникають коливання активної потужності при паралельній роботі генераторів, тобто система стає нестійкою. На рис. 6 представлені осцилограми коливань активної потужності між генераторами.

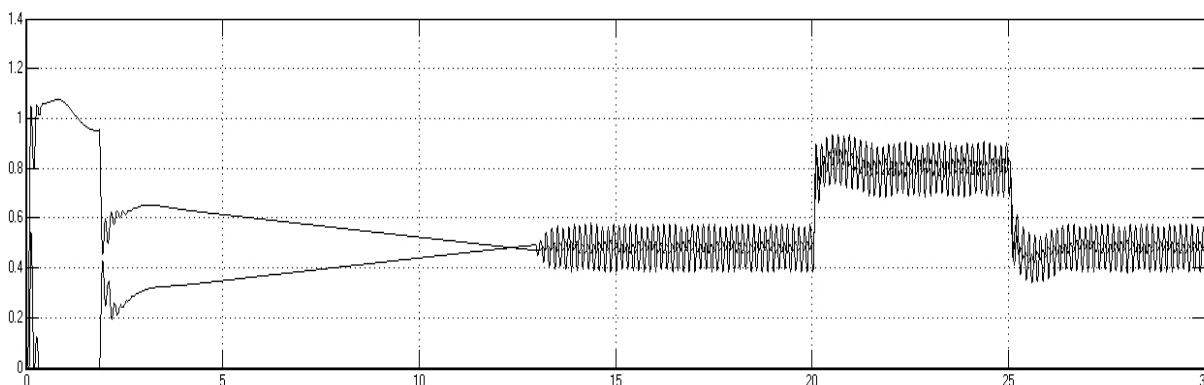


Рис. 6 – Осцилограми зміни активної потужності при роботі системи розподілення активної потужності при зменшенні періоду тактового сигналу автомата

### Висновки

У роботі виконано розробку моделі електроенергетичної системи для моделювання процесу розподілу активної потужності між генераторами. Модель системи розподілу активної потужності представлена у вигляді цифрового скінченного автомата, який формує сигнал на зміну положення паливної рейки приводного

дизельного агрегата в залежності від поточного завантаження генератора. Представлення системи розподілу активної потужності у вигляді автомата дозволяє розробити програмне забезпечення для мікроконтролера з використанням switch-технології. Моделювання процесу розподілу активної потужності показало, що при зменшенні періоду тактового сигналу, що подається на цифровий автомат, в системі виникають незгасаючі коливання активної потужності між генераторами.

#### Список використаної літератури

1. Вишнеvский Л.В. Тумольский А.П.Согласованное управление автономной электроэнергетической установкой. *Электротехнические и компьютерные системы*. 2015. № 19 (95). С.150–153.
2. Баранов А. П. Судовые автоматизированные электроэнергетические системы. Санкт Петербург: Судостроение, 2005. 528 с.
3. Woud H.K., Stapersma D. Design of propulsion and electric power generation systems. London: IMarEST Publications, 2003. 494 p.
4. Юшков Є.О. Моделювання режимів роботи суднової енергетичної установки комбінованого пропульсивного комплексу із системою керування на основі електронних регуляторів. *Електротехніка і електромеханіка*. 2016. № 6. С.39–44.
5. Вишнеvский Л. В., Веретенник А. М., Войтецкий И. Е. Выбор критерия для оценки процесса включения генераторов на параллельную работу. *Автоматика. Автоматизация. Электротехнические комплексы и системы*. Херсон. 2007. №2. С. 136–139.
6. Муха Н.И. Перспективная компоновка судовых автономных электроэнергетических систем. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»*. 2017. №27 (1249). С.285–288.
7. D.Harel Statecharts. A visual formalism for complex systems. *Science of computer programming*. 1987. 8. P. 231–274.
8. Дранкова А. О., Муха Н. И., Шестака А. И. Лаборатория микроконтроллерного управления и моделирования электромеханических систем. *Электротехнические и компьютерные системы. Научно-технический журнал*. – Київ: Техніка, 2014. №15(91). С. 435–440.

#### References

1. Vishnevskij, L.V., & Tumolskij, A.P. (2015). Soglasovannoe upravlenie avtonomnoj elektroenergeticheskoj ustanovkoj. *Elektrotekhnicheskie i kompyuternye sistemy*. **19** (95), 150–153.
2. Baranov, A. P. (2005). Sudovye avtomatizirovannye elektroenergeticheskie sistemy. Sankt Peterburg: Sudostroenie.
3. Woud, H.K., & Stapersma, D. (2003). Design of propulsion and electric power generation systems. London: IMarEST Publications.
4. Yushkov, Ye.O. (2016). Modelyuvannya rezhimiv roboti sudnovoyi energetichnoyi ustanovki kombinovanogo propulsivnogo kompleksu iz sistemoyu keruvannya na osnovi elektronnikh regulyatoriv. *Elektrotekhnika i elektromekhanika*. **6**, 39–44.
5. Vishnevskij, L. V., Veretennik, A. M., & Vojteczkij, I. E. (2007). Vy`bor kriteriya dlya ocenki proczessa vklyucheniya generatorov na parallel`nuyu rabotu. *Avtomatika. Avtomatizacziya. E`lektrotekhnicheskie komplekсы` i sistemy`*. Kherson. **2**, 136–139.
6. Mukha, N.I. (2017). Perspektivnaya komponovka sudovykh avtonomnykh elektroenergeticheskikh system. *Visnik Naczionalnogo tekhnichnogo universitetu «Kharkivskij politekhnichnij institut»*. **27**(1249), 285–288.

7. D.Harel (1987). Statecharts: A visual formalism for complex systems. *Science of computer programming*, **8**, .231–274.
8. Drankova, A.O., Mukha, N. I., & Shestaka A. I. (2014). Laboratoriya mikrokontrollernogo upravleniya i modelirovaniya elektromekhanicheskikh sistem. *Elektrotekhnicheskie i kompyuternye sistemy. Nauchno-tekhnicheskij zhurnal*. Kiyiv: Tekhnika. **15**(91), 435–440.

Селіверстова Світлана Ростиславівна - к.т.н., доцент, доцент кафедри експлуатації суднового електрообладнання і засобів автоматики Херсонської державної морської академії, e-mail: [ussr28031972@gmail.com](mailto:ussr28031972@gmail.com), ORCID: 0000-0003-1015-1593.

Колебанов Олександр Костянтинович - к.т.н., доцент, доцент кафедри експлуатації суднового електрообладнання і засобів автоматики Херсонської державної морської академії, e-mail: [kolebanovkak@gmail.com](mailto:kolebanovkak@gmail.com), ORCID: 0000-0002-9618-9105.

УДК 621.3+608+51.7

В.Ю. СКОСАР, С.В. БУРИЛОВ, В.О. ДЗЕНЗЕРСЬКИЙ  
Інститут транспортних систем і технологій НАН України

## МОДЕЛЮВАННЯ ВИНАХІДНИЦЬКОГО ПРОЦЕСУ НА ПРИКЛАДІ ЛІТІЙ-ІОННИХ АКУМУЛЯТОРІВ

*Моделювання винахідницького процесу розробки літій-іонних акумуляторів є актуальним напрямком досліджень, оскільки таке моделювання дозволяє краще бачити шляхи пошуку сильних винахідницьких рішень. Крім того, таке моделювання допомагає винахіднику подолати психологічну інерцію, підвищити ефективність наукових досліджень і конструкторсько-технологічних розробок, дозволяє зменшити тривалість винахідницького процесу. У роботі проведено ретроспективний аналіз винахідницького процесу розробки літій-іонних акумуляторів з позиції теорії розв'язання винахідницьких завдань. Запропоновано якісні моделі досліджуваної технічної системи, а також процесу її модернізації. Виявлено технічні протиріччя, які стимулювали винахідницьку роботу розробників перших літій-іонних акумуляторів, а також способи подолання цих протиріч. Відзначено, що вибір літію в якості активного металу відповідав прагненню до ідеального кінцевого результату, відповідно до теорії розв'язання винахідницьких завдань. Отримані якісні математичні моделі представлені у вигляді традиційних діаграм, відповідно до теорії розв'язання винахідницьких завдань. На основі якісних моделей виділені технічні протиріччя в сучасних літій-іонних акумуляторах. Запропоновано спосіб подолання зазначених технічних протиріч, зокрема, запропоновано формальне рішення задачі підвищення безпеки літій-іонних акумуляторів і здатності їх швидко заряджатися. Зазначене формальне рішення помітно скоротило пошук конкретного технічного рішення - зміна структури сепаратора і модернізація активних мас анода і катода шляхом механоактивації вихідних порошкових матеріалів. Це дозволило підвищити безпеку лабораторних зразків літій-іонних акумуляторів, а також їх здатність швидко заряджатися. Зроблено висновок, що моделювання винахідницького процесу дозволяє направити творчий пошук в потрібне русло, скоротити тривалість винахідницького процесу, домогтися сильних винахідницьких рішень. При цьому, звичайно, формальне рішення, отримане за допомогою моделювання, не замінить конкретного технічного рішення, що передбачає використання конструкторсько-технологічних інновацій.*

*Ключові слова: якісна математична модель винахідницького процесу, теорія вирішення винахідницьких задач, розробка літій-іонного акумулятора.*

В.Ю. СКОСАРЬ, С.В. БУРЫЛОВ, В.А. ДЗЕНЗЕРСКИЙ  
Институт транспортных систем и технологий НАН Украины

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗОБРЕТАТЕЛЬСКОГО ПРОЦЕССА НА ПРИМЕРЕ ЛИТИЙ-ИОННЫХ АККУМУЛЯТОРОВ

*Моделирование изобретательского процесса разработки литий-ионных аккумуляторов является актуальным направлением исследований, поскольку такое моделирование позволяет лучше видеть пути поиска сильных изобретательских решений. Кроме того, такое моделирование помогает изобретателю преодолеть психологическую инерцию, повысит эффективность научных исследований и конструкторско-технологических разработок, позволяет сократить продолжительность изобретательского процесса. В работе проведен ретроспективный анализ изобретательского процесса разработки литий-ионных аккумуляторов с позиции теории решения изобретательских задач. Предложены качественные модели исследуемой технической системы, а также процесса ее модернизации. Выявлены технические противоречия, которые стимулировали изобретательскую работу разработчиков первых литий-ионных аккумуляторов, а также способы преодоления этих противоречий. Отмечено, что выбор лития в качестве активного металла соответствовал стремлению к идеальному конечному результату, согласно теории решения изобретательских задач. Полученные качественные математические модели представлены в виде традиционных диаграмм, согласно теории решения изобретательских задач. На основе качественных моделей выделены технические противоречия в современных литий-ионных аккумуляторах. Предложен способ преодоления указанных технических противоречий, в частности, предложено формальное решение задачи повышения безопасности литий-ионных аккумуляторов и способности их быстро заряжаться. Указанное формальное решение заметно сократило поиск конкретного технического решения – изменение структуры сепаратора и модернизация активных масс анода и катода путем*



*механоактивации исходных порошковых материалов. Это позволило повысить безопасность лабораторных образцов литий-ионных аккумуляторов, а также их способность быстро заряжаться. Сделан вывод, что моделирование изобретательского процесса позволяет направить творческий поиск в нужное русло, сократить продолжительность изобретательского процесса, добиться сильных изобретательских решений. При этом, конечно, формальное решение, полученное с помощью моделирования, не заменит конкретного технического решения, предусматривающего использование конструкторско-технологических инноваций.*

*Ключевые слова: качественная математическая модель изобретательского процесса, теория решения изобретательских задач, разработка литий-ионного аккумулятора.*

V.Yu. SKOSAR, S.V. BURYLOV, V.O. DZENZERSKIY  
Institute of Transport Systems and Technologies of the  
National Academy of Sciences of Ukraine

## **SIMULATION OF THE INVENTION PROCESS ON THE EXAMPLE OF LITHIUM-ION BATTERIES**

*Modeling the inventive process of developing lithium-ion batteries is an urgent area of research. This kind of modeling allows you to better see the ways to find strong inventive solutions. In addition, such modeling helps the inventor to overcome psychological inertia, increase the efficiency of scientific research and design and technological development. Such modeling allows to reduce the duration of the inventive process. The paper presents a retrospective analysis of the inventive process of developing lithium-ion batteries from the standpoint of the theory of inventive problem solving. Qualitative models of the studied technical system, as well as the process of its modernization, are proposed. The article identifies the technical contradictions that stimulated the inventive work of the developers of the first lithium-ion batteries, as well as the ways to overcome these contradictions. It is noted that the choice of lithium as an active metal corresponded to the desire for an ideal final result, according to the theory of inventive problem solving. The obtained qualitative mathematical models are presented in the form of traditional diagrams, according to the theory of inventive problem solving. On the basis of qualitative models, technical contradictions in modern lithium-ion batteries are highlighted. A method for overcoming these technical contradictions is proposed, in particular, a formal solution to the problem of increasing the safety of lithium-ion batteries and their ability to quickly charge is proposed. This formal solution significantly reduced the search for a specific technical solution - changing the structure of the separator and modernizing the active masses of the anode and cathode by mechanically activating the original powder materials. This has improved the safety of laboratory samples of lithium-ion batteries, as well as their ability to quickly charge. It is concluded that the modeling of the inventive process allows you to direct the creative search in the right direction, reduce the duration of the inventive process, and achieve strong inventive solutions. At the same time, of course, a formal solution obtained with the help of modeling will not replace a specific technical solution involving the use of design and technological innovations.*

*Keywords: qualitative mathematical model of the inventive process, theory of inventive problem solving, development of a lithium-ion battery.*

### **Постановка проблеми**

Розробки літій-іонних акумуляторів інтенсивно ведуться кілька десятиків років, але ще є чимало можливостей для удосконалення активних матеріалів електродів і електроліту. В активних матеріалах електродів можуть використовуватися такі хімічні елементи: літій, кобальт, нікель, залізо, марганець, кисень, фосфор, карбон. Так активний матеріал катоду містить оксиди літію-кобальту-нікелю-марганцю або фосфат літію-заліза. Активний матеріал аноду містить карбон спеціальної структури. Для електроліту можуть використовуватися розчини солей літію в органічних розчинниках. Інтеркаляція і деінтеркаляція іонів літію в активних матеріалах забезпечує високу питому енергію акумуляторів, тому літій-іонні акумулятори найбільш ефективні в багатьох галузях господарства. Але сучасна техніка потребує підвищення безпеки акумуляторів і їх здатності швидко заряджатися. Можливість швидкого заряджання дуже важлива для користувачів електромобілів, на яких розташовані літій-іонні акумулятори.

Процес розробки і вдосконалення літій-іонних акумуляторів дуже складний і потребує врахування багатьох факторів, тому такі роботи потребують багато інтелектуальних ресурсів і часу. Тем не менш ця винахідницька діяльність може бути інтенсифікована шляхом формалізації і моделювання в руслі теорії вирішення винахідницьких задач.

Тому моделювання винахідницького процесу розробки літій-іонних акумуляторів задля підвищення ефективності розробки і покращення конкретних технічних характеристик акумуляторів є актуальною науково-практичною задачею.

### **Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Дослідники вже давно робили спроби розробити акумулятори на основі активного лужного металу літію, тому що літій характеризується високою хімічною активністю і дає можливість акумулювати значну кількість електричної енергії. Перші фундаментальні дослідження в галузі літій-іонних акумуляторів (1912 р.) зв'язані з ім'ям відомого американського фізико-хіміка Гілберта Л'юїса [1-2]. Перші працюючі літій-іонні акумулятори були розроблені на початку 1970-х років британсько-американським хіміком Стенлі Віттінгхемом. Анод – металевий літій, катод – сульфід титану, електроліт – перхлорат літію (розчинник – диоксолан). Акумулятори характеризувалися напругою 2 В і питомою енергією 45 Вт·год/кг. Було розпочато серійне виробництво таких акумуляторів, але потім воно було зупинено, оскільки акумулятори були небезпечні, стали відомі випадки загорянь і вибухів. Це зумовлено нестійкістю хімічно активного металевого літію, ростом дендритів металевого літію, що провокувало короткі замикання і вибухи. В 1980 р. германсько-американський хімік Джон Гуденаф розробив літій-іонний акумулятор, в якому на катоді сульфід титану замінив на оксид літію-кобальту. Це дозволило підвищити напругу на акумуляторі до більш 4 В і, відповідно, підвищити питому енергію (більш 90 Вт·год/кг). Але металевий літійовий анод остався недоліком літій-іонного акумулятору, тому що не вирішено проблему безпеки [2-3]. І тільки в 1985 р. японський дослідник в галузі матеріалознавства і хімії Акіра Єсіно розробив перший комерційний літій-іонний акумулятор, котрий стала виробляти компанія Sony. Він замінив на аноді металевий літій на графітоподібний кокс, котрий є продуктом термічної обробки нафти. В результаті літій-іонні акумулятори Sony характеризувалися напругою 4,1 В і питомою енергією 80 Вт·год/кг або 200 Вт·год/літр. Ще до Акіри Єсіно хіміки робили спроби зробити графітовий анод, але графіт зменшував питому енергію і довговічність акумулятора, оскільки він руйнувався в розчинах електроліту. Пізніше Джон Гуденаф розробив літій-залізо-фосфатний катод, як альтернативу оксиду літію-кобальту [2-3]. Як відомо, за розробку літій-іонних акумуляторів в 2019 р. було присуджено нобелівську премію по хімії Джону Гуденафу, Стенлі Віттінгхему і Акіри Єсіно. Це є скорочена історія розробки літій-іонного акумулятора. Але історія розробки і вдосконалення цього акумулятора ще не закінчена. Продовжуються дослідження з метою вдосконалення літій-залізо-фосфатного катода [4-5], продовжуються розробки катода з оксиду літію-марганцю [6]. Крім того, ведуться активні розробки електролітних систем для літій-іонних акумуляторів – сюди включаються солі літію, органічні розчинники і добавки. В зв'язку з цим можна сподіватися на нові досягнення в покращенні технічних характеристик літій-іонних акумуляторів [7]. Сучасні літій-іонні акумулятори характеризуються питомою енергією 110-250 Вт·год/кг, що є фактично максимальною зі всіх акумуляторів, які серійно виробляються [1]. Але, не зважаючи на всі досягнення, до сьогоднішнього часу існує необхідність в підвищенні безпеки літій-іонних акумуляторів і їх здатності швидко заряджатися.

Процес розробки і вдосконалення літій-іонних акумуляторів дуже складний і реалізується завдяки наявності в розвинених країнах сучасних науково-дослідних лабораторій, які оснащені найкращим обладнанням, і наявності високо кваліфікованого наукового та інженерного персоналу. І при цьому дослідні та конструкторські роботи потребують багато інтелектуальних ресурсів і часу. Тем не менш, ця винахідницька діяльність може бути інтенсифікована шляхом формалізації і моделювання згідно теорії вирішення винахідницьких задач [8]. При цьому винахідницький процес може бути представлено у вигляді діаграм, котрі відображають якісну модель, яка досліджує об'єкт-систему, згідно класифікації математичних моделей, наведеної в [9].

### Мета дослідження

Метою даного дослідження є моделювання винахідницького процесу розробки літій-іонних акумуляторів, а також, за допомогою моделювання, вирішення завдання підвищення безпеки акумуляторів і їх здатності швидко заряджатися.

### Викладення основного матеріалу дослідження

Розглянемо процес розробки Стенлі Віттінгхемом перших працюючих літій-іонних акумуляторів. На рис.1 проілюструємо якісну модель акумулятора, наприклад, свинцево-кислотного.

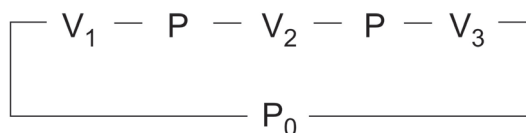


Рис. 1. Якісна модель акумулятора, яка відображає його структуру

На діаграмі (рис. 1) «речовина»  $V_1$  взаємодіє з «полем»  $P$ , ця взаємодія зображено лінією. «Поле»  $P$  взаємодіє з «речовиною»  $V_2$ , що також зображено лінією. «Поле»  $P$  взаємодіє також з «речовиною»  $V_3$ . Якщо акумулятор підключено до зовнішньої навантаженні, то «речовини»  $V_1$  і  $V_3$  взаємодіють також з «полем»  $P_0$ . Розшифруємо. Згідно [8], під «речовинами»  $V_1$ ,  $V_2$  і  $V_3$  в даному випадку означені анод, сепаратор і катод. «Речовиною» може бути любий об'єкт, або елемент технічної системи. «Полем» може бути як фізичне поле (електромагнітне, гравітаційне), так і поле фізичних параметрів речовини (акустичне поле, теплове поле, поле деформацій та інше). В даному випадку ми розповсюджуємо поняття «поле» на електроліт акумулятора, оскільки в ньому проходять потоки іонів і других частинок, що аналогічно потоку тепла в тепловому полі. До речі, в електроліті також проходять потоки тепла. Поняття «поле» треба також приложити до потоку електричних зарядів крізь зовнішнє навантаження. Тому  $P$ ,  $P_0$  в даному випадку означені електроліт акумулятора і електричний струм крізь зовнішнє навантаження.

Якщо ми розглядаємо свинцево-кислотний акумулятор, котрий гарно відомий, то треба розуміти, що ключовим металом в ньому є свинець. Атом свинцю на одному електроді може віддати два електрона, а на другому електроді ці два електрона прийняти, забезпечивши протікання струму [10]. Але свинець характеризується великою молярною масою – 207 г/моль. Протікання електричного заряду  $2e$  забезпечено наявністю двох атомів свинцю в акумуляторі, тобто маємо відношення заряду до маси –  $2e/207$ . На практиці це означає, що свинцево-кислотні акумулятори мають велику вагу, тобто на одиницю маси мають малу енергію (25-40 Вт·год/кг), яка є практично мінімальною зі всіх серійних акумуляторів [1].

Для підвищення питомої енергії акумулятора необхідно вирішити «технічне протиріччя», згідно [8]: між здатністю металу свинцю віддавати і прийняти електрони і

великою молярною масою свинцю. Якщо довести наше протиріччя до крайнього ступеню, то ми отримаємо «фізичне протиріччя», згідно [8]: метал повинен бути в акумуляторі і... не повинен бути, щоб не добавляти ваги. Тобто винахіднику треба досягти «ідеального кінцевого результату», згідно [8], коли метал здатен віддавати і приймати електрони, причому такої метал не має маси (ваги). Зі всіх металів найкращий, який наближається до «ідеального кінцевого результату», є літій. Тому що іон літію здатен забезпечити протікання електричного заряду  $e$ , але має мінімальну молярну масу зі всіх металів – 7 г, тобто маємо відношення заряду до маси –  $e/7$ . Як бачимо, це відношення для літію приблизно в 15 разів більше, ніж для свинцю ( $2e/207$ ).

Тому Стенлі Віттінгхем зробив те, що схематично зображено на рис. 2, і отримав перший літій-іонний акумулятор, в котрому свинець замінено на літій, а також зроблені інші важливі зміни.

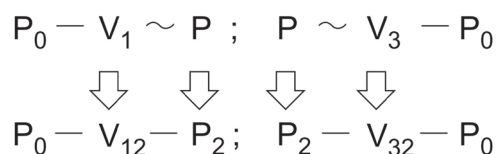


Рис. 2. Якісна модель розробки літій-іонного акумулятора, згідно принципам «вепольного аналізу»

На діаграмі (рис. 2) у верхньому рядку наведені «веполі», згідно [8], які відповідають головним елементам технічної системи, які потребують модернізації. Ми беремо першу діаграму (рис. 1) і переносимо на рис. 2 наступні елементи: «веполь» - електричний струм ( $P_0$ ) від аноду, анод ( $V_1$ ), електроліт ( $P$ ), а також «веполь» - електроліт ( $P$ ), катод ( $V_3$ ), електричний струм ( $P_0$ ) до катоду. Тоді як інші елементи з першої діаграми (рис. 1) нас не цікавлять, оскільки сепаратор ( $V_2$ ) виконує в даному випадку другорядну функцію. Згідно принципам «вепольного аналізу» треба призвести, наприклад, заміну тих «речовин» і «полів», які не забезпечують задовільну взаємодію. Така взаємодія означено хвилястими лініями. «Поле»  $P_0$ , яке означає перенос електричних зарядів назовні від акумулятора, в першому приближенні задовільно взаємодіє з анодом ( $V_1$ ) і катодом ( $V_3$ ) акумулятора. Зміни проведено для аноду ( $V_1$ ), катоду ( $V_3$ ) і електроліту ( $P$ ). Результат змін наведено у нижньому рядку діаграми (рис. 2), де хвилясті лінії тепер змінено на прямі лінії. Новий анод, електроліт і катод означено, як  $V_{12}$ ,  $P_2$  і  $V_{32}$ . Як відомо, в акумуляторі Стенлі Віттінгхема анод був у вигляді металевого літію, а катод – сульфиду титану, котрий здатен забезпечити інтеркаляцію і деінтеркаляцію іонів літію (прийом і віддачу) в пустоти своєї кристалічної структури.

Аналогічно були зроблені зміни в матеріалах катоду і аноду другими винахідниками - Джон Гуденафом і Акіра Єсіно, відповідно. В результаті карбоновий анод сучасного літій-іонного акумулятору, як і катод, також здатен забезпечити інтеркаляцію і деінтеркаляцію іонів літію в пустоти своєї кристалічної структури.

Але потреби сучасної техніки диктують нові вдосконалення літій-іонного акумулятору. Рівень безпеки літій-іонних акумуляторів ще не задовольняє користувачів, також не задовольняє повільна зарядка акумуляторів, що погіршує умови експлуатації електромобілів, де розміщено такі акумулятори. Тому автори цієї роботи проводили дослідження в напрямку, який означено на третьої діаграмі (рис. 3). Ми беремо за основу першу діаграму (рис. 1) і переносимо на рис. 3 практично всю якісну модель літій-іонного акумулятора, за винятком зовнішнього навантаження і взаємодії з «полем»  $P_0$ , які нам зараз не цікаві. Верхній рядок рис. 3 демонструє наступне: анод і катод акумулятора є «речовини»  $V_1$  і  $V_3$ , сепаратор акумулятора – «речовина»  $V_2$ , електроліт акумулятора «поле»  $P$ , тому що він забезпечує потік іонів літію і других

частинок. Взаємодія між анодом  $V_1$  і електролітом  $P$  означено, як хвиляста лінія, бо така взаємодія нас не задовольняє. Аналогічна ситуація з  $V_3$  і  $P$ . Взаємодія, з боку аноду, між електролітом  $P$  і сепаратором  $V_2$  також нас не задовольняє, тому означено, як хвиляста лінія. І тільки взаємодія, з боку катода, між електролітом  $P$  і сепаратором  $V_2$  є задовільною, тому означено, як пряма лінія (див. рис 3, верхній рядок).

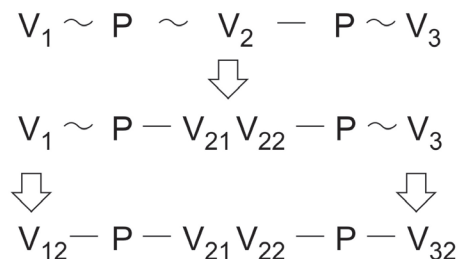


Рис. 3. Якісна модель вдосконалення літій-іонного акумулятора

В нас є перше технічне протиріччя: «речовина»  $V_2$  повинна бути «прозорою» для «поля»  $P$  і, одночасно, не повинна бути «прозорою». Вся згадана термінологія, згідно теорії вирішення винахідницьких задач.

Розшифруємо. Сепаратор ( $V_2$ ) повинен задовільно пропускати іони літію, але не повинен пропускати групи атомів літію з боку аноду, інакше від анода крізь сепаратор ростуть дендрити металевого літію, що веде до короткого замикання і, навіть, до спалаху і вибуху акумулятора. Якісна модель на діаграмі (рис. 3) підказує, що ми можемо зробити задовільною взаємодію, з боку аноду, електроліту ( $P$ ) з сепаратором ( $V_2$ ). Це можливо зробити, згідно [8], шляхом заміни «речовини»  $V_2$  за структурою на дві «речовини»  $V_{21} V_{22}$  (див. рис 3, середній рядок). Вкажемо конкретно. Сепаратор ( $V_2$ ) буде виконано з двох шарів ( $V_{21}$  і  $V_{22}$ ), в даному випадку пористість одного шару ( $V_{21}$ ) буде меншою (30-40%), а пористість другого шару ( $V_{22}$ ) буде більшою (60-80%). Причому товщина першого шару ( $V_{21}$ ) буде, як правило, меншою (30-50 мкм), а товщина другого шару ( $V_{22}$ ), відповідно, буде більшою (40-70 мкм), а сумарна товщина двох шарів сепаратору ( $V_{21} V_{22}$ ) повинна бути в конкретному діапазоні (90-100 мкм). Завдяки зменшеній пористості першого шару ( $V_{21}$ ), котрий розташовано щільно до аноду ( $V_1$ ), сепаратор практично не пропускає групи атомів літію від аноду, тобто не дає росту металевим дендритам. Але, завдяки зменшеній товщині першого шару ( $V_{21}$ ), сепаратор задовільно пропускає іони літію.

В нас є друге технічне протиріччя: «речовини»  $V_1$  і  $V_3$  повинні активно взаємодіяти з «полем»  $P$  задля забезпечення швидкого заряджання, і, одночасно, не повинні активно взаємодіяти, щоб призупинити деградацію електродів. Розшифруємо. Анод ( $V_1$ ) і катод ( $V_3$ ) акумулятора повинні забезпечити інтеркаляцію і деінтеркаляцію іонів літію з електроліту ( $P$ ) в активних матеріалах, але анод і катод не повинні піддаватися деградації в електроліті  $P$ . Якісна модель на діаграмі (рис. 3) підказує, що ми можемо зробити задовільною взаємодію аноду ( $V_1$ ) з електролітом ( $P$ ) і катода ( $V_3$ ) з електролітом ( $P$ ). Це можливо зробити, згідно [8], шляхом заміни «речовин»  $V_1$  і  $V_3$  на «речовини»  $V_{12}$  і  $V_{32}$ , відповідно (див. рис 3, нижній рядок). Вкажемо конкретно. Активні матеріали аноду і катода будуть модифіковані шляхом змін в технологіях виготовлення активних матеріалів. З метою спрощення ми не будемо тут розглядати подробиці технологічних змін. Скажемо лише, що модифікації активних матеріалів для аноду ( $V_1$ ) і катода ( $V_3$ ) зроблені шляхом механоактивації порошоків активних матеріалів у розмельних пристроях.

Попередні випробування літій-іонних комірок, які виготовлено за новою технологією і конструкцією, демонструють перспективність означеної вище розробки.

Нові літій-іонні акумулятори повинні характеризуватися підвищенням безпеки експлуатації і здатністю акумуляторів швидко заряджатися, наприклад, на електротранспорті: електромобілях, гібридних автомобілях, метрополітені, тролейбусах, трамваях, електропоїздах. Такий результат винахідницького процесу, можливо, може бути досягнуто інтуїтивним пошуком і перебором багатьох варіантів, але використання якісної математичної моделі в даному випадку суттєво спростило дослідження і скоротило їх час.

### Висновки

Запропонована математична модель винахідницького процесу скоротила час пошуку винахідницького рішення, яке зняло низку технічних протиріч (в даному випадку для спрощення вказано лише два технічних протиріччя). Це продемонстровано на прикладі літій-іонних акумуляторів, на яких вдалося досягти підвищення безпеки експлуатації і швидкості заряджання (згідно попереднім випробуванням).

Моделювання винахідницького процесу направляє творчий пошук в таке русло, де діяльність винахідника стає більш ефективною. Використання методів теорії вирішення винахідницьких задач допомагає подолати психологічну інерцію. Це не означає, що формальні моделі можуть повністю замінити собою діяльність живих людей, котрі вирішують складні конструкторські та технологічні завдання. Також це не означає, що формальні методи зняття технічних протиріч можуть повністю замінити пошук реальних конструктивних і технологічних рішень. Але користь такого моделювання не повинна визивати сумнівів. Математична модель винахідницького процесу в перспективі може застосовуватися в системах штучного інтелекту.

### Список використаної літератури

1. Кулова Т.Л., Николаев И.И., Фатеев В.Н., Алиев А.Ш. Современные электрохимические системы аккумуляирования энергии. *Kimya Problemleri (Chemical Problems)*, 2018. №1. С. 9-34
2. Жданова Е. Зарядились до «Нобеля». Сайт «За науку». URL: <https://zanauku.mipt.ru/2019/12/12/zaryadilis-do-nobelya>. (дата звернення: 31.05.2021).
3. Королев В. Заряженный «Нобель». Долгожданная премия за аккумуляторы, которые есть в каждом доме. URL: <https://nplus1.ru/material/2019/10/09/nobelch>. (дата звернення: 31.05.2021).
4. Бурмистрова Н.А., Сычева В.О., Чуриков А.В., Иванищева И.А. Фосфат лития-железа  $\text{LiFePO}_4$  как катодный материал для литий-ионного аккумулятора. *Электрохимическая энергетика*, 2009. Т.9, №4. С. 188-198.
5. Потапенко А.В., Панов Э.В., Диамант В.А. Синтез и электрохимические характеристики композита  $\text{LiFePO}_4/\text{C}$  в электролите на основе  $\text{LiBOB}$ . *Укр. Хим. Журн.*, 2014. Т.80, №7. С. 52-56.
6. Сычева В.О., Чуриков А.В.. Литий-марганцевые шпинели: пути повышения стабильности и энергоемкости. *Электрохимическая энергетика*, 2009. Т.9, №4. С. 175-187.
7. Ярмоленко О.В., Юдина А.В., Игнатова А.А. Современное состояние и перспективы развития жидких электролитных систем для литий-ионных аккумуляторов. *Электрохимическая энергетика*, 2016. Т.16, №4. С. 155-195.
8. Альтшуллер Г.С. Творчество как точная наука. 2 изд., дополн. Петрозаводск: Скандинавия, 2004. 208 с.
9. Звонарев С.В. Основы математического моделирования. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2019. 112 с.

10. Багоцкий В.С., Скундин А.М. Химические источники тока. Москва: Энергоиздат, 1981. 360 с.

#### References

1. Kulova, T.L., Nikolaev, I.I., Fateev, V.N. & Aliev, A.Sh. (2018). Sovremennyye elektrohimiicheskie sistemyi akkumulirovaniya energii. *Kimya Problemleri (Chemical Problems)*. **1**, 9-34.
2. Zhdanova, E. (2021). Zaryadilis do «Nobelya». Sayt «Za nauku». URL: <https://zanauku.mipt.ru/2019/12/12/zaryadilis-do-nobelya>. (data zvernennya: 31.05.2021).
3. Korolev, V. (2021). Zaryazhennyiy «Nobel». Dolgozhdannaya premiya za akkumulyatoryi, kotoryie est v kazhdom dome. URL: <https://nplus1.ru/material/2019/10/09/nobelch>. (data zvernennya: 31.05.2021).
4. Burmistrova, N.A., Syicheva, V.O., Churikov, A.V. & Ivanischeva, I.A. (2009). Fosfat litiya-zheleza  $\text{LiFePO}_4$  kak katodnyiy material dlya litiy-ionnogo akkumulyatora. *Elektrohimiicheskaya energetika*. **9**, 4, 188-198.
5. Potapenko, A.V., Panov, E.V. & Diamant, V.A. (2014). Sintez i elektrohimiicheskie harakteristiki kompozita  $\text{LiFePO}_4/\text{C}$  v elektrolite na osnove LiBOB. *Ukr. Him. Zhurn.* **80**, 7, 52-56.
6. Syicheva, V.O. & Churikov, A.V. (2009). Litiy-margantsevyie shpineli: puti povyisheniya stabilnosti i energoemkosti. *Elektrohimiicheskaya energetika*. **9**, 4, 175-187.
7. Yarmolenko, O.V., Yudina, A.V. & Ignatova, A.A. (2016). Sovremennoe sostoyanie i perspektivy razvitiya zhidkih elektrolitnyih sistem dlya litiy-ionnyih akkumulyatorov. *Elektrohimiicheskaya energetika*. **16**, 4, 155-195.
8. Altshuller, G.S. (2004). Tvorchestvo kak tochnaya nauka. 2 izd., dopoln. Petrozavodsk: Skandnaviya.
9. Zvonarev, S.V. (2019). Osnovy matematicheskogo modelirovaniya. Ekaterinburg: Izd-vo Ural. un-ta.
10. Bagotskiy, V.S. & Skundin, A.M. (1981). Himicheskie istochniki toka. Moskva: Energoizdat.

Скосар Вячеслав Юрійович – к.ф.-м.н., с.н.с. відділу №6 «Електротехнічних комплексів і хімічних джерел струму транспортного призначення» Інституту транспортних систем і технологій НАН України, e-mail: [skosarslava@gmail.com](mailto:skosarslava@gmail.com), ORCID: 0000-0002-2151-3417.

Бурилов Сергій Володимирович - к.ф.-м.н., с.н.с., завідувач відділом №6 «Електротехнічних комплексів і хімічних джерел струму транспортного призначення» Інституту транспортних систем і технологій НАН України, e-mail: [S.Burylov@nas.gov.ua](mailto:S.Burylov@nas.gov.ua), ORCID: 0000-0001-8070-6764.

Дзензерський Віктор Олександрович – д.т.н., директор Інституту транспортних систем і технологій НАН України, e-mail: [itst@westa-inter.com](mailto:itst@westa-inter.com), ORCID: 0000-0002-5504-4524.

УДК 519.816

Н.К. ТИМОФІЄВА

Міжнародний науково-навчальний центр  
інформаційних технологій та систем НАН та МОН України

## МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА ПІДХОДИ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

*До оптимізаційних задач штучного інтелекту відносять задачі розпізнавання (образів, мовлення), задача клінічної діагностики, порівняння текстів на плагіат, автоматичний переклад текстів з однієї мови на іншу, класифікація тощо. Для реалізації цих задач автоматизованим способом необхідно адекватно сформулювати їхню математичну модель. Незважаючи на те, що цій проблемі присвячено багато робіт, точної математичної постановки, яка б дала змогу розробляти ефективні для їхнього розв'язання алгоритми, ще не розроблено. Також для них не змодельовано цільової функції в явному вигляді. До того ж одержаний глобальний розв'язок за розробленою цільовою функцією не завжди збігається з метою дослідження. Це пов'язано з тим, що характерною особливістю цих задач є наявність ситуації невизначеності, що ускладнює як їхнє моделювання, так і розв'язання.*

*Для моделювання задач цього класу використовують різні підходи, зокрема стохастичні, логіко-лінгвістичні методи, моделі Маркова, лінійне цілочислове програмування, теорію розпізнавання образів, нейронні мережі. Для їхнього вирішення використовують швидкий метод розповсюдження обмежень, евристичні методи. Під евристичними алгоритмами, як правило, розуміють способи прийняття рішень подібні до того, як це робить людина, та побудовані на інтуїтивних міркуваннях, що спираються на попередній досвід. Використання евристичних алгоритмів поширене в задачах розпізнавання різної природи. Для багатьох практичних проблем ці алгоритми чи не єдиною можливий шлях для отримання задовільного рішення в реальному часі.*

*Значна частина прикладних задач штучного інтелекту в процесі їхнього розв'язання потребують перебору варіантів, що вказує на їхню комбінаторну природу. Тому ці задачі зводяться до задач комбінаторної оптимізації. Відомі методи моделювання не завжди пояснюють перебірну природу задач штучного інтелекту. У даній роботі для деяких задач цього класу побудовано математичні моделі з використанням теорії комбінаторної оптимізації. Показано, що аргументом цільової функції є комбінаторні конфігурації різних типів.*

*Ключові слова: задачі штучного інтелекту, розпізнавання мовлення, класифікація, задача клінічної діагностики, задачі із семантики.*

Н.К. ТИМОФЕЕВА

Международный научно-учебный центр  
информационных технологий и систем НАН и МОН Украины

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

*К оптимизационным задачам искусственного интеллекта относят задачи распознавания (образов, речи), задача клинической диагностики, сравнение текстов на плагат, автоматический перевод текстов с одного языка на другой, классификация и т. д. Для реализации этих задач автоматизированным способом необходимо адекватно сформулировать их математическую модель. Несмотря на то, что этой проблеме посвящено много работ, точной математической постановки, которая бы позволила разрабатывать эффективные для их решения алгоритмы, еще не разработано. Также для них не смоделирована целевая функция в явном виде. К тому же полученное глобальное решение с использованием разработанной целевой функции не всегда совпадает с целью исследования. Это связано с тем, что характерной особенностью данных задач является наличие ситуации неопределенности, что затрудняет как их моделирование, так и решение.*

*Для моделирования задач этого класса используют различные подходы, в частности, стохастические, логико-лингвистические методы, модели Маркова, линейное целочисленное программирование, теория распознавания образов, нейронные сети. Для их решения используются быстрый метод распространения ограничений, эвристические методы. Под эвристическими алгоритмами, как правило, понимают способы принятия решений подобные тому, как это делает человек, и построенные на интуитивных рассуждениях, опирающихся на предыдущий опыт. Использование эвристических алгоритмов распространено в задачах распознавания различной природы.*



Для многих практических проблем эти алгоритмы являются единственно возможные для получения удовлетворительного решения в реальном времени.

Значительная часть прикладных задач искусственного интеллекта в процессе их решения требуют перебора вариантов, что указывает на их комбинаторную природу. Поэтому эти задачи сводятся к задачам комбинаторной оптимизации. Известные методы моделирования не всегда объясняют переборную природу задач искусственного интеллекта. В данной работе для некоторых задач этого класса построены математические модели с использованием теории комбинаторной оптимизации. Показано, что аргументом целевой функции являются комбинаторные конфигурации различных типов.

Ключевые слова: задачи искусственного интеллекта, распознавание речи, классификация, задача клинической диагностики, задачи семантики.

N.K. TYMOFIJEVA  
International Scientific Training Centre  
for Information Technologies and Systems

## MATHEMATICAL MODELS AND APPROACHES TO SOLVING OPTIMIZATION PROBLEMS OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE

*The optimization problems of artificial intelligence include the problems of recognition (images, speech), the problems of clinical diagnosis, comparison of texts on plagiarism, automatic translation of texts from one language to another, classification and more. To implement problems in an automated way, it is necessary to adequately formulate their mathematical model. Although many papers have been devoted to this problem, a precise mathematical formulation that would allow algorithms to be developed that are effective in solving them has not yet been developed. Also, the objective function is not simulated explicitly for them. In addition, the resulting global solution for the modeled objective function does not always coincide with the purpose of the study. This is due to the fact that characteristic feature these problems is the presence of a situation of uncertainty, which complicates both their modeling and resolution.*

*Various approaches are used to model problems of this class, in particular stochastic, logical-linguistic methods, Markov models, linear integer programming, pattern recognition theory, neural networks. To solve them, a fast method of spreading constraints and heuristic methods are used. Heuristic algorithms are usually understood as ways of making decisions similar to how a person does it, and built on intuitive reasoning based on previous experience. The use of heuristic algorithms is widespread in problems of recognition of different nature. For many practical problems, these algorithms are almost the only possible way to obtain a satisfactory solution in real time.*

*Much of the applied problems of artificial intelligence in the process of solving them require a search for options, which indicates their combinatorial nature. Therefore, these problems are reduced to the problems of combinatorial optimization. Known modeling methods do not always explain combinatorial nature of artificial intelligence problems. In this paper, mathematical models using combinatorial optimization theory are constructed for some problems of this class. It is shown that the argument of the objective function are combinatorial configurations of various types.*

*Key words: artificial intelligence problems, speech recognition, classification, clinical diagnostics problem, semantics problems.*

### Постановка задачі

До оптимізаційних задач штучного інтелекту відносяться задачі розпізнавання (образів [1], мовлення [2]), задачі з медицини [3], порівняння текстів на плагіат, автоматичний переклад текстів з однієї мови на іншу, класифікація тощо. Задачі цього класу складні за своєю природою та не завжди піддаються формалізації.

Але багато прикладних задач штучного інтелекту в процесі їхнього розв'язання потребують перебору варіантів, що вказує на їхню комбінаторну природу. Відомі методи моделювання не завжди пояснюють перебірну природу задач штучного інтелекту. Використання для їхнього моделювання теорії комбінаторної оптимізації дозволяє визначити аргумент цільової функції, яким є комбінаторні конфігурації різних типів, в деяких випадках змоделювати цільову функцію в явному вигляді, а для їхнього розв'язання використовувати підходи, які розроблено в дискретній математиці.

### Аналіз останніх досліджень та публікацій

Моделюванню та розв'язанню задач штучного інтелекту присвячено багато робіт. Для моделювання задач цього класу використовують різні підходи: стохастичні, логіко-лінгвістичні методи, моделі Маркова, лінійне цілочислове програмування, теорію розпізнавання образів, нейронні мережі [1-4]. Відомі методи моделювання не завжди дозволяють сформулювати цільову функцію в явному вигляді. В задачах штучного інтелекту при прийнятті оптимального рішення досить часто використовуються методи, які класифікують як евристичні [5]. Під евристичними алгоритмами, як правило, розуміють способи прийняття рішень подібні до того, як це робить людина, та побудовані на інтуїтивних міркуваннях, що спираються на попередній досвід. До них відносять підходи, які складно формалізувати та неможливо довести їхню точність. Використання евристичних алгоритмів дуже поширене в задачах розпізнавання різної природи. Для багатьох практичних проблем ці алгоритми чи не єдино можливий шлях для отримання задовільного рішення в реальному часі. Іноді такий алгоритм може бути точним, тобто він знаходить дійсно найкраще рішення, але його називають евристичним із-за неможливості довести їхню точність. Ці методи ефективні за швидкістю, але досить часто результат, одержаний за їхньою допомогою, далекий від оптимального.

У штучному інтелекті використовують метаевристики, які розширюють можливості евристик, комбінуючи евристичні методи (процедури) на основі певної високорівневої стратегії [6]. До них відносяться генетичні, еволюційні алгоритми (детерміновані еволюційні метаевристики), роєві метаевристики. Виділяють роєві біологічні метаевристики та роєві фізичні метаевристики. До роєвих біологічних метаевристик відносяться: оптимізація рою часток, алгоритм зграї риб, зозулін пошук, алгоритм кажанів, оптимізація зграї кішок, алгоритм імітації стрибаючих жаб, мурашкові алгоритми, світлякові алгоритми, оптимізація рою жуків-світляків, алгоритм рою бджіл, оптимізація колонії ос, алгоритм імітації поведінки бактерій, алгоритм розповсюдження бур'янів. Роєві метаевристики імітують інтелект рою, що є колективною поведінкою децентралізованих та самоорганізованих агентів в популяції або рою.

Відомі методи моделювання не пояснюють перебірну природу задач штучного інтелекту. При моделюванні цільової функції за її аргумент, як правило, приймають вхідні дані. Системний аналіз задач цього класу показує, що аргументом цільової функції в них є комбінаторні конфігурації різних типів. Використання теорії комбінаторної оптимізації для їхнього моделювання дозволяє встановити їхню комбінаторну природу, сформулювати цільову функцію в явному вигляді, виявити характерні ознаки, за якими встановлюється подібність задач як комбінаторної оптимізації, так і штучного інтелекту. Також такий підхід дозволяє визначати для їхнього розв'язання підходи, які розроблено в дискретній математиці.

### Мета дослідження

Для пояснення перебіркої природи задач штучного інтелекту необхідно їх змоделювати в рамках теорії комбінаторної оптимізації. Перш за все необхідно визначити її вид (статична чи динамічна), визначити аргумент цільової функції (комбінаторну конфігурацію), змоделювати цільову функцію. В явному вигляді останню не завжди можна сформулювати із-за невизначеності, яка має місце при розв'язанні задач цього класу.

### Викладення основного матеріалу дослідження

#### Підходи, що використовуються для розв'язання оптимізаційних задач штучного інтелекту

Для розв'язання задач із класів задач комбінаторної оптимізації виділимо такі основні підходи:

- а) ітераційні методи та алгоритми, що ґрунтуються на частковому переборі варіантів;
- б) методи та алгоритми, що ґрунтуються на розпізнаванні структури вхідної інформації [7].

Метод найближчого сусіда, "жадібний" алгоритм, метод північно-західного кута, деякі алгоритми розв'язання задач із штучного інтелекту, в яких використано розповсюдження обмежень, ґрунтуються на розпізнаванні структури вхідних даних. До цього напряму відноситься проблема знаходження підкласів розв'язних задач [7]. В оговорених підходах шляхом розпізнавання структури вхідної інформації визначається аргумент, для якого цільова функція набуває оптимального значення.

Як правило, відомі методи та алгоритми, що ґрунтуються на розпізнаванні структури вхідної інформації, ефективні за швидкодією, але результат розв'язання при цьому може бути далекий від оптимального. З цієї причини другому підходу, незважаючи на те, що саме їхнє використання ефективне при розв'язанні задач штучного інтелекту, в літературі достатньої уваги не приділяють. Але підходи, які ґрунтуються на розпізнаванні структури вхідної інформації, відносяться до методів штучного інтелекту. Як правило, їх називають евристичними, такими, в яких моделюються правила вибору оптимального рішення людини в ручному режимі та неявно моделюється функція зору людини. Вони характеризуються великою швидкодією і з використанням правил оброблення вхідної інформації, в яких ураховано певні властивості прикладних задач, дозволяють знаходити глобальний або наближений до нього розв'язок.

#### Задачі, аргументом цільової функції в яких є розбиття $n$ -елементної базової множини на підмножини

До задач розбиття відносяться кластеризація та класифікація. Вони виникають при розв'язанні задач клінічної діагностики, розпізнаванні мовлення, семантики тощо.

Розглянемо задачу *кластеризації*, в якій аргументом цільової функції є розбиття  $n$ -елементної базової множини  $A$  на  $\eta$  підмножин [7]. Назвемо множину підмножин (кластерів)  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_\eta)$  таку, що  $\rho_1 \cup \dots \cup \rho_\eta = A$ ,  $\rho_p \cap \rho_l = \emptyset$ ,  $p \neq l$ ,  $\rho_p \neq \emptyset$ ,  $p, l \in \{1, \dots, \eta\}$ . Непуста підмножина  $\rho_p = \{a_1, \dots, a_{\xi_p}\}$ ,  $a_s \in A$ ,  $s \in \{1, \dots, \xi_p\}$ , може мати від 1 до  $n$  елементів ( $\xi_p \in \{1, \dots, n\}$ ). Кількість підмножин  $\rho_p$  у розбитті  $\rho$  може бути від 1 до  $n$  ( $\eta \in \{1, \dots, n\}$ ). Їхню множину позначимо  $\Theta$ .

Два розбиття  $\rho^k$  і  $\rho^i$  назвемо ізоморфними, якщо кількість їхніх підмножин однакова, і для будь-якої підмножини  $\rho_p^k \subset \rho^k$  можна знайти у множині  $\rho^i$  підмножину  $\rho_p^i$ , яка не відрізняється від  $\rho_p^k$  кількістю елементів, а відрізняється самими елементами;  $k, i \in \{1, \dots, q\}$  – порядкові номери  $\rho^k$  та  $\rho^i$  у  $\Theta$ ,  $q$  – їхня кількість у  $\Theta$ .

Підмножину  $\Theta_\eta \subset \Theta$  назвемо підмножиною ізоморфних комбінаторних конфігурацій, якщо її елементи – ізоморфні комбінаторні конфігурації.

Для моделювання цільової функції в задачі кластеризації необхідно а) урахувати множину ознак заданих елементів  $a_i \in A$ ; б) для визначення подібності елементів  $a_i \in A$  увести міру подібності; в) визначити спосіб оцінки кластера.

Використаємо такі способи оцінки кластера: 1) оптимізацію проводимо так, щоб сумарне значення ваг між елементами одного кластера було найбільшим; 2) оптимізацію проводимо так, щоб середнє значення ваг між елементами одного кластера було найбільшим.

Оскільки множина розбиттів  $\Theta$  складається з підмножин ізоморфних розбиттів  $\Theta_\eta \subset \Theta$ , то при розв'язанні задачі кластеризації з'являється ситуація невизначеності, пов'язана із структурою аргументу цільової функції. Для її вирішення вводяться змінні критерії, які ураховують подібність між кластерами, з наступним зведенням їх до зваженого критерію (лінійної згортки).

З вищевикладеного випливає, що для задачі кластеризації розбиття  $n$ -елементної множини  $A$  на  $\eta$  підмножин та оцінка результату за змодельованою цільовою функцією проводиться одночасно, тобто вона є статичною.

Задача кластеризації полягає в розбитті елементів заданої множини  $A$  на кластери так, щоб змодельована цільова функція набувала оптимального значення. Оптимізація проводиться за критерієм найбільшої подібності між ознаками, якими покривається певний об'єкт.

Розглянемо задачу класифікації. Для неї виділимо такі підзадачі:

а) задано скінченну базову множину  $A$ . Класи можуть бути як задано, так і не задано. Необхідно розподілити елементи базової множини по класах так, щоб останні не перетиналися. Ця задача зводиться до задачі кластеризації;

б) задано скінченну базову множину  $A$ . Класи можуть бути як задано, так і не задано. Елементи множини  $A$  розподіляються так, що один елемент може належати різним класам. В даному разі аргументом цільової функції є розбиття  $n$ -елементної множини  $A$  на  $\eta$  підмножин з повтореннями;

в) задано нескінченну базову множину, частина елементів якої відома, а частина визначається в процесі розв'язання задачі, тобто інформація поступає в процесі розв'язання задачі і змінюється в часі. Аргументом цільової функції в ній є часткове розбиття нескінченної множини  $A$  на  $\eta$  підмножин з повтореннями. В цьому разі вводиться часткова цільова функція і часткове розбиття.

Оскільки для перших двох задач розбиття утворюється із елементів скінченної множини, яке характерне для задачі кластеризації, розглянемо третю задачу. Уведемо базову нескінченну множину  $\tilde{A}$ , в якій елементи  $\tilde{a}_s$  для  $s = \overline{1, n}$  задано, а для  $s > n$  визначаються в процесі розв'язання задачі. З відомих елементів  $\tilde{a}_r \in \tilde{A}$ ,  $r = \overline{1, \tilde{q}}$ , утворюємо часткове розбиття множини  $\tilde{A}$  на  $\eta$  підмножин (блоків)  $\tilde{\rho} = (\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_\eta)$ ,  $\tilde{q}$  – кількість відомих елементів. Тоді множина підмножин  $\tilde{\rho} = (\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_\eta)$  має такі характеристики:  $\tilde{\rho}_1 \cup \dots \cup \tilde{\rho}_\eta = \tilde{A}$ ,  $\tilde{\rho}_p \cap \tilde{\rho}_l = \emptyset$  або  $\tilde{\rho}_p \cap \tilde{\rho}_l \neq \emptyset$ ,  $p \neq l$ ,  $\tilde{\rho}_p \neq \emptyset$ ,  $p, l \in \{1, \dots, \eta\}$ . Непуста підмножина  $\tilde{\rho}_p = \{\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{\xi_p}\}$  може мати від 1 до  $q'$  елементів ( $\xi_p \in \{1, \dots, q'\}$ ),  $\eta \in \{1, \dots, \tilde{q}\}$ ,  $q' > \tilde{q}$ ,  $\tilde{a}_r = \tilde{a}_s$  або  $\tilde{a}_r \neq \tilde{a}_s$ ,  $\tilde{a}_r, \tilde{a}_s \in \rho_p$ ,  $r, s \in \{1, \dots, \xi_p\}$ .

Як правило, при моделюванні задачі класифікації аргументом цільової функції вважають вхідні дані. Але в цій задачі оцінка результату проводиться за частковими цільовими функціями, аргументом якої є часткове розбиття нескінченної множини на підмножини з повтореннями  $\tilde{\rho}^k$ .

Для розв'язання задачі класифікації часто використовують метод опорних векторів. Якщо проаналізувати роботу цього методу, то можна побачити, що він ґрунтується на розпізнаванні структури вхідної інформації.

### **Задачі штучного інтелекту, в яких використано задачу кластеризації**

Прикладні задачі складні за своєю природою і основна задача, як правило, розділяється на підзадачі, а цільова функція, за якою оцінюється оптимальний розв'язок, залежить від кількох змінних, якими є комбінаторні конфігурації різних типів. Якщо побудувати математичні моделі задач розпізнавання мовленнєвих сигналів та клінічної діагностики з використанням теорії комбінаторної оптимізації, то можна побачити, що вони розділяються на три підзадачі, тобто ці задачі за аргументом цільової функції – подібні.

Задача розпізнавання мовлення полягає у знаходженні для вхідного сигналу найбільш правдоподібного еталонного з усіх можливих еталонних сигналів. Для розв'язання цієї задачі необхідно провести пошук певного еталону в бібліотеці і порівняти його із вхідним сигналом [2].

Задача клінічної діагностики полягає у знаходженні для вхідної інформації, яка містить множину ознак певного захворювання найбільш правдоподібного одного або кількох еталонів із множини захворювань, тобто за вхідними ознаками устанавлюється одне або кілька захворювань. Як і в розпізнаванні мовлення, необхідно провести пошук певного еталону в бібліотеці і порівняти його із вхідним сигналом.

Аналіз цих задач показує, що задача клінічної діагностики і розпізнавання мовлення розділяються на три підзадачі: структуризація бібліотеки еталонів; пошук у бібліотеці еталонної інформації; порівняння еталонної і вхідної інформації. Для обох класів задач аргументом цільової функції в першій підзадачі є розбиття  $n$ -елементної множини на підмножини, в другій підзадачі – розміщення без повторень, а в третій – сполучення без повторень.

Структуризація бібліотеки еталонних сигналів проводиться один раз. Для пошуку у бібліотеці еталонної інформації та порівняння еталонної та вхідної інформації розроблено гібридний алгоритм, який працює в ітераційному режимі.

Задачі семантики належать до задач розпізнавання і полягають в тому, що необхідно встановити суть певного об'єкта. До цієї проблеми належать порівняння текстів з метою встановлення плагіату, криптографія, дешифрування забутих писемностей, автоматичний переклад текстів з однієї мови на іншу та багато інших. При семантичному моделюванні виникає задача максимального його покриття заданого об'єкта певними ознаками, які його характеризують. Змоделювавши цю задачу в рамках теорії комбінаторної оптимізації, можна побачити, що вона належить до задач розбиття, аргументом цільової функції в якій є розбиття  $n$ -елементної множини  $A$  на підмножини, як з повтореннями, так і без повторень. Відповідно, в цьому разі необхідно розв'язувати задачу кластеризації або класифікації.

### **Висновки**

Отже, багато задач із штучного інтелекту мають перебірну природу та зводяться до задач комбінаторної оптимізації. Використання теорії комбінаторної оптимізації для їхнього моделювання дозволяє встановити їхню комбінаторну природу, сформулювати цільову функцію в явному вигляді, виявити характерні ознаки, за якими встановлюється подібність задач як комбінаторної оптимізації так і штучного інтелекту. Ці задачі досить складні за своєю природою і за аргументом цільової функції можуть розділятися на підзадачі. Для їхньої реалізації розроблено гібридні алгоритми, які працюють в ітераційному режимі. Кожна з таких підзадач може розв'язуватися

алгоритмами, які реалізовано на основі різних методів. Оскільки задачі штучного інтелекту зводяться до задач комбінаторної оптимізації, то для їхнього розв'язання можна використовувати підходи, які розроблено в дискретній математиці, а також ті, які ґрунтуються на розпізнаванні структури вхідної інформації. Їх називають евристичними та досить часто використовують у штучному інтелекті. Вони характеризуються великою швидкістю і з урахуванням певних властивостей прикладних задач дозволяють знаходити глобальний або наближений до нього розв'язок.

#### Список використаної літератури

1. Шлезингер М.И., Главач В. Десять лекций по статистическому и структурному распознаванию. Киев: Наукова думка, 2004. 546 с.
2. Винцюк Т.К. Анализ, распознавание и интерпретация речевых сигналов. Киев: Наукова думка, 1987. 262 с.
3. Мисик А. В. Аналіз одновимірних та двовимірних діагностичних даних методами штучних нейронних мереж: автореф. дис... канд. фіз.-мат. наук: 03.00.04. Харків, 2004. 19с.
4. Савин А.Н., Тимофеева Н.Е., Гераськин А.С., Мавлютова Ю.А. Разработка системы распознавания речи на основе скрытых марковских моделей отдельных слов. *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2017. Т. 17. вып. 4. С. 452–464.
5. Тимофієва Н.К. Про методи комбінаторної оптимізації, що ґрунтуються на розпізнаванні вхідної інформації, евристичні алгоритми та обчислювальний інтелект. *Вісник Вінницького політехнічного інституту*. 2015. № 2. С. 106–111.
6. Скобцов Ю.А., Федоров Е.Е. Метаэвристики. Донецк: Ноулидж, 2013. 426 с.
7. Тимофієва Н.К. Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації: автореф. дис... докт. техн. наук: 01.05.02. Київ, 2007. 32 с.

#### References

1. Chlezinger, M.I., & Glavath, V. (2004). Desjat leksi'j po statisticheskomu i strukturnomu raspoznavaniju. Kiev: Naukova dumka.
2. Vintsuk, T.K. (1987). Analiz, raspoznavanije i interpretatsija rethevyx signalov. Kiev: Naukova dumka.
3. Mysyk, A.V. (2004). Analiz odnovymirnyx ta dvovymirnyx diagnostychnyx danyx metodamy shtuchnyx nejronnyx merezh. (Extended abstract of Ph.D thesis). Xarkiv.
4. Savin, A. N., Timofeeva, N.E., Geraskin, A.S., & Mavljutova, JU.A. (2017). Razrabotka sistemy raspoznavanija rethi na osnove skrytyx markovskix modelej ot delnyx slov. *Izv. Sarat. un-ma. Nov. ser. Ser. Matematika. Mexanika. Informatika*. 17, 4, 452–464.
5. Tymofieeva, N.K. (2015). Pro metody kombinatornoji optymizathiji, tho gruntujutsja na rozpiznavanni vxidnoji informathiji, evrystychni algorytmy ta obthysljuvalny'j intelekt. *Visnyk Vinnythkogo politexnichnogo instytutu*. 2, 106–111.
6. Skobthov, Ju.A., & Fedorov, E.E. (2013). Metaevristiky: monografija. Donethk: Noulidzj.
7. Tymofieeva, N.K. (2007). Teoretyko-chyslovi metody rozviazannia zadach kombinatornoji optymizatsii. (Extended abstract of Doctor's thesis). Kyiv.

Тимофієва Надія Костянтинівна — д.т.н., ст. наук. співр., пров. наук. співр. Міжнародного науково-навчального центру інформаційних технологій та систем НАН та МОН України, Київ, e-mail Tymnad@gmail.com, ORCID: 0000-0002-0312-1153.

УДК 519.711-519.6

А. В. УСОВ, М. В. КУНІЩИН, Ю. І. ЗАЙЧИК  
Державний університет «Одеська політехніка»

## МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ МОЖЛИВОСТЕЙ ПО ЗАБЕЗПЕЧЕННЮ ЯКІСНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОВЕРХНЕВОГО ШАРУ КОНІЧНИХ ВИРОБІВ НА ФІНІШНИХ ОПЕРАЦІЯХ

*У роботі розглядається модель температурного поля, яке формується у поверхневому шарі конічних виробів при обробці їх на фінішних операціях. Із застосуванням цих операцій пов'язана поява у поверхневому шарі виробів дефектів типу припиків, тріщин, розтягуючих напружень, що значно впливає на надійність і довговічність цих деталей в процесі їх експлуатації. Ці дефекти, будучи локальними концентраторами напружень, в експлуатаційних умовах призводять до передчасного виходу виробів з ладу, попри те, що навантаження на них формує напруження, величина яких не перевищує граничних значень. Модель будується на основі розв'язку початково-крайової задачі теплопровідності для виробу у вигляді усіченого кругового конуса. Отримані на підставі моделі функціональні зв'язки технологічних параметрів з температурою шліфування відображають стан оброблених поверхонь для виробів конічної форми і дозволяють за допомогою відповідних прийомів усувати припикі на оброблюваних поверхнях виробів. Дослідження умов підвищення якості оброблюваних поверхонь шляхом усунення дефектів типу тріщин і припиків проводилося, в основному, на рівні виявлення зв'язків температурних полів, що формуються, з технологічними параметрами, фізико-механічними властивостями шліфованих матеріалів і геометрією виробів. Встановлено, що при шліфуванні конічних виробів від більшого радіусу у напрямі до меншого, температура збільшувалася пропорційно куту нахилу оброблюваної поверхні. Адекватність побудованої моделі перевірялася на прикладі шліфування конічних виробів із сталі з відомими фізико-механічними характеристиками, вибором інструменту і призначенням режимів обробки. Аналіз результатів моделювання показує, що температура оброблюваної поверхні зростає по мірі наближення обробляючого інструменту до конічної поверхні до меншого діаметру. Саме ця область оброблюваної поверхні конічних виробів найбільше схильна до дефектоутворення на фінішних операціях. Тому при призначенні режимів обробки таких поверхонь, їх слід призначати за умови, що при наближенні обробляючого інструменту до частини конічної поверхні меншого діаметру температура, що формується на ній, не повинна перевищувати допустимих значень, які забезпечують необхідну якість. Аналіз результатів чисельних розрахунків температурних полів показав достатню точність за граничними умовами моделювання.*

*Ключові слова: конічні вироби, модель температурного поля, дефекти, якість поверхневого шару, фінішні операції, адекватність.*

А. В. УСОВ, М. В. КУНИЩИН, Ю. И. ЗАЙЧИК  
Государственный университет «Одесская политехника»

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПО ОБЕСПЕЧЕНИЮ КАЧЕСТВЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОВЕРХНОСТНОГО СЛОЯ КОНИЧЕСКИХ ИЗДЕЛИЙ НА ФИНИШНЫХ ОПЕРАЦИЯХ

*В работе рассматривается модель температурного поля, которое формируется в поверхностном слое конических изделий при обработке их на финишных операциях. С применением этих операций связано появление в поверхностном слое изделий дефектов типа прижогов, трещин, растягивающих напряжений, которые значительно влияют на надежность и долговечность этих деталей в процессе их эксплуатации. Эти дефекты, будучи локальными концентраторами напряжений, в эксплуатационных условиях приводят к преждевременному выходу изделий из строя, несмотря на то, что нагрузка на них формирует напряжения, величина которых не превышает предельных значений. Модель строится на основе решения начально-краевой задачи теплопроводности для изделия в виде усеченного кругового конуса. Полученные на основании модели функциональные связи технологических параметров с температурой шлифования отражают состояние обработанных поверхностей для изделий конической формы и позволяют с помощью соответствующих приемов устранять прижоги на обрабатываемых поверхностях изделий. Исследование условий повышения качества обрабатываемых поверхностей путем устранения дефектов типа трещин и прижогов проводилось, в основном, на уровне выявления связей температурных полей с технологическими параметрами, физико-механическими свойствами шлифованных материалов и геометрией изделий. Установлено, что при шлифовании*

конических изделий от большого радиуса в направлении меньшего, температура увеличивалась пропорционально углу наклона обрабатываемой поверхности. Адекватность построенной модели проверялась на примере шлифовки конических изделий из стали с известными физико-механическими характеристиками, выбором инструмента и назначением режимов обработки. Анализ результатов моделирования показывает, что температура обрабатываемой поверхности возрастает по мере приближения обрабатывающего инструмента по конической поверхности до меньшего диаметра. Именно эта область обрабатываемой поверхности конических изделий больше всего подвержена дефектообразованию на финишных операциях. Поэтому, при назначении режимов обработки таких поверхностей, их следует назначать из условия, что при приближении обрабатывающего инструмента к части конической поверхности меньшего диаметра температура, которая формируется на ней, не должна превышать допустимых значений, обеспечивающих необходимое качество. Анализ результатов численных расчетов температурных полей показал достаточную точность с граничными условиями моделирования.

Ключевые слова: конические изделия, модель температурного поля, дефекты, качество поверхностного слоя, финишные операции, адекватность.

A. V. USOV, M. V. KUNITSYN, Y. I. ZAYCHIK  
Odessa Polytechnic State University

## **DESIGN OF TECHNOLOGICAL POSSIBILITIES ON PROVIDING OF QUALITY DESCRIPTIONS OF SUPERFICIAL LAYER OF CONICAL WARES ON FINISH OPERATIONS**

*The paper considers a temperature field model that forms in the surface layer of conical products during their processing at finishing operations. These operations are associated with the appearance in the surface layers of defects such as burns, cracks, tensile stresses. Which significantly affects the reliability and durability of these parts during their operation. Being local stress concentrators under operating conditions, these defects lead to premature failure of products, even though the load on them forms stresses, the magnitude of which does not exceed the limiting values. The model is based on the initial boundary thermal conductivity problem for a product in a truncated circular cone. The functional connections of technological parameters with the grinding temperature obtained based on the model reflect the condition of the treated surfaces for conical products and eliminate burns on the treated surfaces of the products through appropriate techniques. The study of the conditions for improving the quality of treated surfaces by eliminating defects such as cracks and scorching was carried out mainly at identifying the relationship of the formed temperature fields with technological parameters, physical and mechanical properties of polished materials, and product geometry. It was found that when grinding conical products from a larger radius to a smaller one, the temperature increased in proportion to the angle of inclination of the treated surface. The adequacy of the constructed model was checked on the example of grinding conical steel products, with known physical and mechanical characteristics, the choice of tool, and the purpose of processing modes. Analysis of the simulation results shows that the temperature of the machined surface increases as the machining tool approaches the conical surface to a smaller diameter. This area of the machined surface of conical products is most prone to defect formation at the finishing operations. Therefore, when assigning modes of processing of such surfaces, they should be assigned on the condition that when approaching the machining tool to a part of a conical surface of smaller diameter, the temperature formed on it should not exceed the allowable values that provide the required quality. Analysis of the numerical calculations of temperature fields showed sufficient accuracy under the boundary conditions of modeling.*

*Keywords: conical products, temperature field model, defects, surface layer quality, finishing operations, adequacy.*

### **Постановка проблеми**

Відомо, що при обробці конічних виробів в поверхневому шарі формуються спадкові технологічні дефекти типу припиків і мікротріщин [1]. Ці дефекти, будучи локальними концентраторами напружень, в експлуатаційних умовах призводять до передчасного виходу виробів з ладу, незважаючи на те, що навантаження на них формують напруження, величина яких не перевищує граничних значень [2]. Насправді, при формоутворенні необхідних геометричних розмірів конічних виробів в оброблюваних поверхнях формуються стохастично розташовані мікронеоднорідності і



мікрodefекти [3]. Робочий шар конічних виробів при цьому розглядається як середовище, ослаблене випадковими дефектами, параметри яких є випадковими величинами з відомими законами їх розподілу.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Статистичний підхід в оцінці несучої здатності виробів має певні переваги в тому, що він дає можливість урахування впливу на міцність відразу всіх дефектів та неоднорідностей, незалежно від їх фізичної природи, величини, форми, розташування [4]. Але, з іншого боку, цей підхід не дозволяє оцінити роль дефекту в елементарному акті руйнування, зниження міцності поверхневого шару, що містить зазначені дефекти та їх появи від технології обробки [5]. На утворення дефектів у поверхневому шарі оброблюваних виробів впливає їх геометрія [6]. Особливо це стосується до фінішних методів обробки конічних виробів. Найбільш поширеним методом остаточної обробки є шліфування, що забезпечує високу точність і високу продуктивність виготовлення деталей [7]. Але з застосуванням шліфування пов'язана поява в поверхневих шарах деталей дефектів типу припиків, тріщин, що значно впливає на надійність і довговічність цих деталей в процесі їх експлуатації. Наявні функціональні зв'язки технологічних параметрів з температурою шліфування [8] дозволяють за допомогою відповідних прийомів усувати припики на оброблюваних поверхнях виробів, що не містять конструкторських, технологічних неоднорідностей, і матеріал яких не містить суттєвих відхилень [9].

Однак відсутність досліджень щодо особливостей процесу зародження шліфувальних дефектів, їх вплив на зниження працездатності в залежності від конструктивних, технологічних і структурних неоднорідностей матеріалу виробів не дозволяють однозначно користуватися наявними рекомендаціями щодо усунення даних дефектів.

**Метою даних досліджень** є побудова моделі термомеханічних процесів, що супроводжують фінішну обробку конічних виробів, під дією яких формуються дефекти в поверхневому шарі, що призводить до втрати несучої здатності цих виробів у процесі їх експлуатації.

### Викладення основного матеріалу дослідження

Розглянемо наступну початково-крайову задачу теплопровідності для виробу у вигляді усіченого кругового конуса (рис. 1).

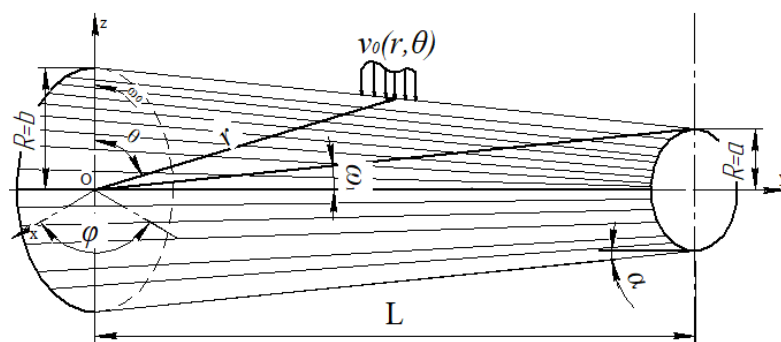


Рис. 1. Розрахункова схема для моделювання температурного поля, що формується в конічних виробках на фінішних операціях

$$\begin{aligned} \Delta v(r, \theta, \varphi, t) &= \frac{1}{a^*} \frac{\partial v(r, \theta, \varphi, t)}{\partial t}, a < r < b, \omega_0 < \theta < \omega_1, t > 0, \\ v(r, \theta, \varphi, t) &= f(r, \theta, \varphi), v(a, \theta, \varphi, t) = v(b, \theta, \varphi, t) = 0, |\varphi| < \pi, \\ a) v(r, \omega_j, \varphi, t) &= g^j(r, \varphi, t), \\ b) v(r, \omega_j, \varphi, t) + h_j v(r, \omega_j, \varphi, r) &= g^j(r, \varphi, t), \\ c) v(r, \omega_j, \varphi, t) &= g^j(r, \varphi, t); j = 0, 1, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\Delta$  – оператор Лапласа в сферичній системі координат, постійні  $a^*$  і  $h$  – теплофізичні константи матеріалу виробу.

Граничні умови на конічних поверхнях  $r = a$  і  $r = b$  можуть бути трьох типів, і теж неоднорідними. Зазначені умови обрані заради скорочення записів. Як і вище, похідна по змінній  $\theta$  відзначена точкою, а похідна по змінній  $r$  – штрихом. Від заданих шуканих функцій загадаємо, щоб для них були справедливі інтегральні перетворення формули обернення [10].

Послідовно застосовуючи до (1) інтегральне перетворення Лапласа за часом:

$$v_p(r, \theta, \varphi) = \int_0^\infty v(r, \theta, \varphi, t) e^{-pt} dt \quad (2)$$

і перетворення Фур'є по куту  $\varphi$ :

$$v_{pn}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_p(r, \theta, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3)$$

замість (1) отримуємо:

$$\begin{aligned} [r^2 v_{pn}(r, \theta)]' - \nabla_n v_{pn}(r, \theta) - s^2 r^2 v_{pn}(r, \theta) &= f_n(r, \theta), \\ v_{pn}(a, \theta) = 0, v_{pn}(b, \theta) = 0, \omega_0 < \theta < \omega_1, a < r < b, \\ a) v_{pn}(r, \omega_j) &= g_{pn}^j(r), \\ b) v_{pn}(r, \omega_j) + h v_{pn}(r, \omega_j) &= g_{pn}^j(r), \\ c) v_{pn}(r, \omega_j) &= g_{pn}^j(r), j = 0, 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут введені наступні позначення:

$$-\nabla_n f(r, \theta) = \frac{[\sin\theta f'(r, \theta)]}{\sin\theta} - \frac{n^2 f(r, \theta)}{\sin^2\theta}, s^2 = \frac{p}{k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Застосуємо до крайової задачі (4) інтегральне перетворення, позначивши відповідну трансформанту шуканої функції у вигляді:

$$v_{pnk}(r) = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \sin\theta \varphi_1(\theta, v_k) v_{pn}(r, \theta) d\theta, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

і аналогічні трансформанти заданих функцій.

В результаті крайова задача (4) набуває вигляду:

$$L_s v_{pnk} \equiv [r^2 v_{pnk}(r)]' - v_k(v_k + 1)v_{pnk}(r) - r^2 s^2 v_{pnk}(r) = f_{pnk}(r) - S_k(r, \omega),$$

$$a < r < b, v_{pnk}(a) = v_{pnk}(b) = 0, \tag{6}$$

$$S_k(r, \omega) = [\varphi_1(\theta, v_k) \sin \theta v_{pn}(r, \theta)]_{\omega_0}^{\omega_1} - [\varphi_1(\theta, v_k) \sin \theta v_{pn}(r, \theta)]_{\omega_0}^{\omega_1}.$$

При цьому вираз для  $S_k(r, \omega)$  розшифровується в залежності від типу граничних умов а), б) і с) у (4). Від цього залежить, із якого рівняння слід знаходити  $v_k$  і вид функції  $\varphi_1(\theta, v_k)$ . Так, у випадку граничної умови а) замість  $\varphi_1(\theta, v_k)$  в (4) слід використовувати функцію  $\varphi_a(\theta, v_k)$ , що визначається формулою (7):

$$\varphi_a(\theta, V_k) = P_{V_k}^m(\cos \theta) Q_{V_k}^m(\cos \omega_1) - P_{V_k}^m(\cos \omega_1) Q_{V_k}^m(\cos \theta), \tag{7}$$

де  $P_{V_k}^m(\cos \theta)$ ,  $Q_{V_k}^m(\cos \theta)$  – лінійно незалежні розв’язки диференціального рівняння крайової задачі Штурма-Ліувілля [10], а числа  $V_k$  знаходяться з рівняння:

$$\varphi''(\theta, V_k) + \text{ctg} \theta \cdot \varphi'(\theta, V_k) + [V_k(V_k + 1) - m^2 \text{cosec}^2 \theta] \varphi(\theta, V_k) = 0, \tag{8}$$

причому вираз  $S_k(r, \omega)$  з (6) перетворюється на наступне:

$$S_k^a(r, \omega) = \sum_{j=0}^1 \sin \sigma_j \varphi_a(\omega_j, v_k) g_{pn}^j(r).$$

У випадку граничних умов б) і с) замість функцій  $\varphi_1(\theta, v_k)$  в (5) слід використовувати функції  $\varphi_b(\theta, v_k)$  і  $\varphi_c(\theta, v_k)$ , які визначаються відповідно формулами:

$$\varphi_b(\theta, V_k) = P_{V_k}^m(\cos \theta) l_1^h Q_{V_k}^m - Q_{V_k}^m(\cos \theta) l_1^h Q_{V_1}^m. \tag{9}$$

Ця власна функція крайової задачі Штурма-Ліувілля [10]:

$$\ddot{T}(\theta) + \text{ctg} \theta \cdot \dot{T}(\theta) - \left[ \lambda + \frac{1}{4} + \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] T(\theta) = 0, \quad \omega_0 < \theta < \omega_1,$$

буде задовольняти граничним умовам:

$$\dot{\varphi}_b(\omega_j, V_k) + h_j \varphi_b(\omega_j, V_k) = 0, j = 0, 1.$$

При  $h_j = 0, j = 0, 1$  власну функцію  $\varphi_c(\theta, V_k)$  крайової задачі отримаємо в наступному вигляді:

$$\varphi_c(\theta, V_k) = P_{V_k}^m(\cos \theta) \frac{dQ_{V_k}^m(\cos \omega_1)}{d\omega_1} - Q_{V_k}^m(\cos \theta) \frac{dP_{V_k}^m(\cos \omega_1)}{d\omega_1}. \tag{10}$$

Вона задовольняє граничній умові  $\dot{\varphi}_c(\omega_j, V_k) = 0, j = 0, 1$ , а числа  $V_k$  слід знаходити з рівняння:

$$\Delta_k^m \equiv \Omega_{V_k,0}^m(\omega_0, \omega_1) = 0, k = 0,1,2, \dots \tag{11}$$

Інтегральні перетворення, що базуються на задачі Штурма-Ліувілля, визначаються наступними виразами [10,11]:

$$g_k^m = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \sin\theta \cdot \varphi_e(\theta, V_k)g(\theta)d\omega, \quad e = a, b, c;$$

$$g(\omega) = -\frac{g_k^m \varphi_e(\theta, V_k)}{\sigma_{mk}^e(\omega_0, \omega_1)}, \quad \omega_0 \leq \theta \leq \omega_1.$$

Асимптотична формула для знаходження  $V_k$  має вигляд:

$$V_k = \gamma k - \frac{3}{2}, \quad \gamma = \pi(\omega_1 - \omega_0)^{-1}.$$

Формулу для  $S_k(r, \omega)$  потрібно замінити наступними виразами:

$$\left\| \begin{matrix} S_k^b(r, \omega) \\ S_k^c(r, \omega) \end{matrix} \right\| = - \sum_{j=0}^1 \left\| \begin{matrix} \varphi_b(\omega_j v_k) \\ \varphi_c(\omega_j v_k) \end{matrix} \right\| g_{pn}^j(r) \sin\omega_j.$$

Таким чином, у всіх трьох випадках граничних умов  $S_k(r, \omega)$  в (6) є відомою функцією, і розв'язання початково-крайової задачі (1) зведено до розв'язання одновимірної самоспряженої крайової задачі (6). Щоб вирішити останню, слід побудувати функцію Гріна  $G_n(r, \rho)$  крайової задачі (6). Це можна зробити за допомогою прийому, викладеного в [10,11], враховуючи, що фундаментальною системою розв'язків  $y_0(r)$  і  $y_1(r)$  диференціального рівняння (6) є модифіковані функції Бесселя:

$$y_0(r) = r^{-1/2}I_{\nu+1/2}(rs), y_1(r) = r^{-1/2}K_{\nu+1/2}(rs), \tag{12}$$

визначник Вронського яких  $W(y_0, y_1) = -r^2$  згідно з формулою [12].

Виконавши операції, передбачені згаданим прийомом, знайдемо

$$G_N(r, \rho) = \frac{\sqrt{ab}}{\Delta_N(a, b)} \begin{cases} \psi_0(\rho)\psi_1(r), r \leq \rho; \\ \psi_0(r)\psi_1(\rho), r \geq \rho, \end{cases} \tag{13}$$

де

$$\Delta_S(a, b) = I_{\nu+1/2}(as)K_{\nu+1/2}(bs) - I_{\nu+1/2}(bs)K_{\nu+1/2}(as);$$

$$\sqrt{br}\psi_0(r) = K_{\nu+1/2}(bs)I_{\nu+1/2}(rs) - I_{\nu+1/2}(bs)K_{\nu+1/2}(rs);$$

$$\sqrt{br}\psi_1(r) = I_{\nu+1/2}(as)K_{\nu+1/2}(rs) - K_{\nu+1/2}(as)I_{\nu+1/2}(rs).$$

Тут  $\nu$  слід замінити на  $\nu_k$ . Використовуючи побудовану функцію Гріна (13), можемо знайти трансформанту, причому вона буде мати різні назви в залежності від граничної умови в (4):

$$\left\| \begin{matrix} v_{pnk}^a(r) \\ v_{pnk}^{b,c}(r) \end{matrix} \right\| = \int_a^b G_N(r, \rho) \left[ f_{pnk}(\rho) - \sum_{j=0}^1 \sin \omega_j \left\| \begin{matrix} \varphi_a(\omega_j, \nu_k) \\ \varphi_a(\omega_j, \nu_k) \end{matrix} \right\| g_{pn}^j(\rho) \right] d\rho.$$

Звернувши знайдені трансформанти, знайдемо розв’язок крайових задач (4) за формулою (14):

$$v_{pn}^e(r, \theta) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_{pnk}^c(r) \varphi_c(\theta, \nu_k)}{\sigma_{mk}^c(\omega_0, \omega_1)}, \quad e = a, b, c. \quad (14)$$

Щоб отримати розв’язок вихідних початково-крайових задач (1), слід знайдені трансформанти Фур’є (3) і Лапласа (2) звернути за відомими формулами перетворення, врахувавши при цьому, що  $m = |n|$ .

Перевірку адекватності побудованої моделі щодо забезпечення якісних характеристик поверхневого шару розглянемо на прикладі шліфування конічних виробів із сталі 12Х2Н4ВА, робочий шар яких піддається термообробці. Фізико-механічні характеристики сталі:  $G=6,13 \times 10^9$  н/м<sup>2</sup>—модуль зсуву;  $\nu = 0,27$  —коefficient Пуассона;  $\alpha_t = 11,6 \times 10^{-6}$  — температурний coefficient лінійного розширення;  $a_c = 16 \times 10^5$  Вт/м<sup>2</sup>×град — coefficient температуропровідності;  $\lambda=22,2$  Вт/м×град — coefficient теплопровідності. Інструмент — коло суцільний 24А25 СМ18К5 ПП 250×75×20. Режими обробки:  $V_d= 16$  м/хв— швидкість деталі;  $P_z = 27$  Н;  $V_{kp} = 30$  м/с — швидкість шліфувального круга;  $L_k=2l = 1,58 \times 10^{-3}$  м — довжина дуги контакту інструменту з оброблюваною поверхнею;  $t_{ш} = 0,01$  мм — глибина шліфування;  $S_n = 31,6 \times 10^{-6}$  м<sup>2</sup>— площа контакту інструменту з оброблюваною поверхнею. Геометрія конічних виробів:  $r = a = 0,03$  м,  $r = b = 0,06$  м,  $L = 0,09$  м. Розрахунок контактної температури здійснювався за формулою (14). На рис. 2 показано температурне поле, яке формується при шліфуванні робочої поверхні конічних виробів. Аналіз результатів моделювання показує, що температура оброблюваної поверхні зростає по мірі наближення обробляючого інструменту по конічній поверхні до меншого діаметру. Цей результат пояснюється тим, що відбувається стік тепла в більш вузьку частину конічної поверхні.

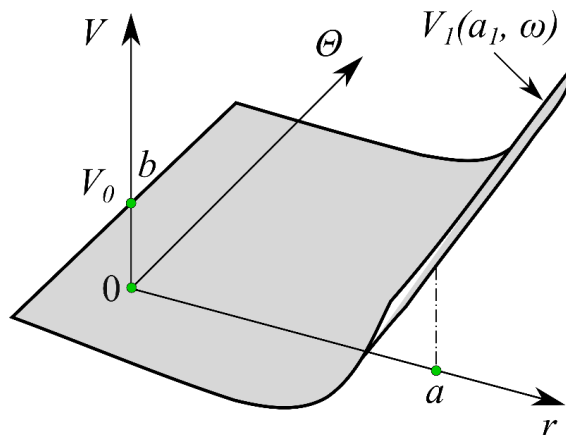


Рис. 2 Розподіл температури шліфування по поверхні конічного виробу при русі інструмента від більшого діаметра до меншого

Саме ця область оброблюваної поверхні конічних виробів найбільше схильна до дефектоутворення на фінішних операціях. Тому, при призначенні режимів обробки таких поверхонь, їх слід призначати за умови, що при наближенні оброблюючого інструменту до більш вузької частини конічної поверхні температура, яка формується на ній, не повинна перевищувати допустимих значень, які забезпечують необхідну якість.

### Висновки

Розроблено модель по визначенню температурного поля, що формується в поверхневому шарі конічних виробів на фінішних операціях, яка дозволяє за рахунок функціональних зв'язків з технологічними параметрами забезпечити необхідний рівень температур на оброблюваній поверхні, щоб уникнути утворення на ній дефектів типу припиків і тріщин. Аналіз результатів моделювання показує, що температура на оброблюваній поверхні зростає по мірі наближення оброблюючого інструменту по конічній поверхні до меншого діаметру. Саме ця область оброблюваної поверхні конічних виробів найбільше схильна до дефектоутворення на фінішних операціях. Тому, при призначенні режимів обробки таких поверхонь, слід їх призначати за умови, що при наближенні оброблюючого інструменту до більш вузької частини конічної поверхні, формується температура, яка не повинна перевищувати допустимих значень, що забезпечують необхідну якість.

### Список використаної літератури

1. Якимов А. В., Слободяник П. Т., Усов А. В. Теплофизика механической обработки. Киев-Одесса: Лыбидь, 1991. 240 с.
2. Kunitsyn M. V., Usov A. V. The Possibilities of Increasing the Reliability and Durability of a Cylindrical Group by Technological Methods. *Odeskyi Politechnichniy Universytet Pratsi*. 2018. Т. 1 (54). С. 26–35.
3. Altenbach H., Altenbach J., Kissing W. Mechanics of Composite Structural Elements. Singapore : Springer, 2018. 518 с.
4. Cogswell F. N. Thermoplastic Aromatic Polymer Composites: A Study of the Structure, Processing and Properties of Carbon Fibre Reinforced Polyetheretherketone and Related Materials. Elsevier Science, 2013. 288 с.
5. Kim K. T., Kim D. W., Kim S. H. et al. Synthesis and improved explosion behaviors of aluminum powders coated with nano-sized nickel film. *Applied Surface Science*. 2017. Vol. 415. P. 104–108.
6. Kunitsyn M., Usov A. Development of Quality Criteria for the Surface Layer of Cylinders with Wear-Resistant Coatings. *Advanced Manufacturing Processes*. 2020. P. 137–147.
7. Hao Nan Li, Tian Biao Yu, Li Da Zhu, Wan Shan Wang. Analytical modeling of ground surface topography in monocrystalline silicon grinding considering the ductile-regime effect. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. 2017. Vol. 17, no. 4. P. 880–893.
8. Zhenyu Han, Hongyu Jin, Maoyue Li, Hongya Fu. An open modular architecture controller based online chatter suppression system for CNC milling. *Mathematical problems in Engineering*. 2015. Vol. 2015. P. 89-99.
9. Оборский Г. А., Дащенко А. Ф., Усов А. В., Дмитришин Д. В. Моделирование систем : монография. Одесса : Астропринт, 2013. 664 с.
10. Попов Г. Я. Избранные труды. Том. 1. Одесса: ВМВ, 2007.
11. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов тонких включений и подкреплений. Москва: Наука, 1982. 342 с.

12. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: функции Бесселя, ортогональные многочлены. Москва: Наука, 1966. 295 с.

### References

1. Yakimov, A. V., Slobodyanik, P. T., & Usov, A. V. (1991). *Teplofizika mekhanicheskoy obrabotki*. Kiyev-Odessa : Lybid'.
2. Kunitsyn, M. V., & Usov, A. V. (2018). The Possibilities of Increasing the Reliability and Durability of a Cylindrical Group by Technological Methods. *Odeskyi Politechnichnyi Universytet Pratsi*, **1** (54). 26–35.
3. Altenbach, H., Altenbach, J., & Kissing, W. (2018). *Mechanics of Composite Structural Elements*. Singapore : Springer.
4. Cogswell, F. N. (2013). *Thermoplastic Aromatic Polymer Composites: A Study of the Structure, Processing and Properties of Carbon Fibre Reinforced Polyetheretherketone and Related Materials*. Elsevier Science.
5. Kim, K. T., Kim, D. W., Kim, S. H. et al. (2017). Synthesis and improved explosion behaviors of aluminum powders coated with nano-sized nickel film. *Applied Surface Science*. **415**, 104–108.
6. Kunitsyn, M., & Usov, A. (2020). Development of Quality Criteria for the Surface Layer of Cylinders with Wear-Resistant Coatings. *Advanced Manufacturing Processes*. pp. 137–147.
7. Hao Nan Li, Tian Biao Yu, Li Da Zhu, & Wan Shan Wang. (2017). Analytical modeling of ground surface topography in monocrystalline silicon grinding considering the ductile-regime effect. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. **17**, 4, 880–893.
8. Zhenyu Han, Hongyu Jin, Maoyue Li, & Hongya Fu. (2015). An open modular architecture controller based online chatter suppression system for CNC milling. *Mathematical problems in Engineering*. **Vol. 2015**. pp. 89-99.
9. Oborskiy, G. A., Dashchenko, A. F., Usov, A. V., & Dmitrishin, D. V. (2013). *Modelirovaniye sistem*. Odessa : Astroprint.
10. Popov, G. YA. (2007). *Izbrannyye trudy*. Tom. 1. Odessa: VMV.
11. Popov, G.YA. (1982). *Kontsentratsiya uprugikh napryazheniy voze shtampov, razrezov tonkikh vklyucheniye i podkrepleniye*. Moskva : Nauka.
12. Beytmen, G., & Erdeyi, A. (1966). *Vysshiyе transtsendentnyye funktsii: funktsii Besselya, ortogonal'nyye mnogochleny*. Moskva : Nauka.

Усов Анатолій Васильович – д. т. н., професор, завідувач кафедри вищої математики та моделювання систем Державного університету «Одеська політехніка», e-mail: [usov\\_a\\_v@opu.ua](mailto:usov_a_v@opu.ua), ORCID: 0000-0002-3965-7611.

Куніцин Максим Володимирович –к. т. н., старший викладач кафедри вищої математики та моделювання систем, Державного університету «Одеська політехніка», e-mail: [m.v.kunitsyn@opu.ua](mailto:m.v.kunitsyn@opu.ua) ORCID: 0000-0003-1764-8922.

Зайчик Юрій Ігоревич –аспірант кафедри вищої математики та моделювання систем Державного університету «Одеська політехніка», e-mail: [yuriy.zaichik@gmail.com](mailto:yuriy.zaichik@gmail.com) ORCID: 0000-0002-8577-1095

УДК 519.711-519.6

А. В. УСОВ, М. В. КУНІЦІН, Ю. Є. СІКІРАШ  
Державний університет «Одеська політехніка»**МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ГЕТЕРОГЕННОЇ СТРУКТУРИ СПЛАВІВ НА ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ЯКІСНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОВЕРХНЕВОГО ШАРУ НА ФІНІШНИХ ОПЕРАЦІЯХ**

*У роботі запропоновано моделювання термомеханічних явищ, які формуються у виробках на фінішних операціях і впливають на якість поверхневого шару з урахуванням спадкових неоднорідностей, сформованих на попередніх технологічних операціях, встановлення впливу їх на тріцино- і припікоутворення на основі кількісного аналізу теплового і напруженого стану і з урахуванням гетерогенності матеріалу виробів. Коефіцієнти інтенсивності напружень  $K_I$ ,  $K_{II}$  і  $K_{III}$  служать мірою сингулярності напружень біля вершини тріциноподібного дефекту. Коли навантаження призводить до того, що інтенсивність напружень стає рівною критичній, то тріциноподібний дефект перетворюється в магістральну тріцину. В умовах нерівномірного нагріву в поверхневому шарі виникають напруження, які при наявності в тілі тріциноподібних дефектів можуть привести до їх розповсюдження навіть при відсутності зовнішніх механічних навантажень. Встановлено, що на величину коефіцієнтів інтенсивності напружень для дефектів типу тріцин впливають розміри і орієнтація цих дефектів, глибина їх залягання і взаємне розташування в поверхневому шарі, величина теплового потоку, який діє на оброблювану поверхню. Для будь-яких коефіцієнтів теплопровідності, лінійного температурного розширення і модулів зсуву матриці і включення показано зміни коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН), якщо тепловий потік спрямований перпендикулярно тріцині, яка знаходиться у включенні, і навпаки, якщо паралельно тріцині. Розглянуті геометрія і властивості включень, які можуть створювати умови, як для гальмування так і для розвитку шліфувальних тріцин. Якщо тепловий потік направлений паралельно більшій осі еліптичного включення і прямолінійній термоізолюваній тріцині, то при температурному коефіцієнті лінійного розширення (ТКЛР) включення більшому, ніж в основному матеріалі виробу, збільшення жорсткості включення призводить до зростання коефіцієнтів інтенсивності напружень для різних коефіцієнтів теплопровідності складових матеріалу. Це призводить до розвитку мікротріцини. І навпаки, якщо ТКЛР включення менше, ніж у основного матеріалу, зменшення жорсткості включення призводить до зниження коефіцієнтів інтенсивності напружень  $K_I$  ( $K_{II} = 0$ ) для тих же коефіцієнтів теплопровідності, тобто є сприятливі умови для нерозповсюдження мікротріцин.*

*Ключові слова: моделювання, термомеханічні процеси, дефекти, коефіцієнт інтенсивності напружень, утворення тріцин, поверхневий шар, неоднорідність.*

А. В. УСОВ, М. В. КУНИЦЫН, Ю. Е. СИКИРАШ  
Государственный университет «Одесская политехника»**МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ГЕТЕРОГЕННОЙ СТРУКТУРЫ СПЛАВОВ НА ОБЕСПЕЧЕНИЕ КАЧЕСТВЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОВЕРХНОСТНОГО СЛОЯ НА ФИНИШНЫХ ОПЕРАЦИЯХ**

*В работе предложено моделирование термомеханических явлений, формирующихся в изделиях на финишных операциях и влияющих на качество поверхностного слоя с учетом наследственных неоднородностей, сформированных на предшествующих технологических операциях, установление влияния их на трещино- и прижогаобразование на основе количественного анализа теплового и напряженного состояния и с учетом гетерогенности материала изделий. Коэффициенты интенсивности напряжений  $K_I$ ,  $K_{II}$  и  $K_{III}$  служат мерой сингулярности напряжений у вершины трещиноподобного дефекта. Когда нагрузка приводит к тому, что интенсивность напряжений становится равной критической, то трещиноподобный дефект превращается в магистральную трещину. В условиях неравномерного нагрева в поверхностном слое возникают напряжения, которые при наличии в теле трещиноподобных дефектов могут привести к их распространению даже при отсутствии внешних механических нагрузок. Установлено, что на величину коэффициентов интенсивности напряжений для дефектов типа трещин оказывают влияние размеры и ориентация этих дефектов, глубина их залегания и взаимное расположение в поверхностном слое, величина теплового потока, действующего на обрабатываемую поверхность. Для любых коэффициентов теплопроводности, линейного температурного расширения и модулей сдвига матрицы и включения*



показаны изменения коэффициентов интенсивности напряжений (КИН), если тепловой поток направлен перпендикулярно трещине, находящейся во включении, и наоборот, если параллельно трещине. Рассмотрены геометрия и свойства включений, которые могут создавать условия как для торможения, так и для развития шлифовочных трещин. Если тепловой поток направлен параллельно большей оси эллиптического включения и прямолинейной термоизолированной трещине, то при температурном коэффициенте линейного расширения (ТКЛР) включения больше, чем у матрицы, увеличение жесткости включения приводит к возрастанию коэффициентов интенсивности напряжений для различных отношений коэффициентов теплопроводности составляющих материала. Это приводит к развитию микротрещины. И наоборот, если ТКЛР включения меньше, чем у матрицы, уменьшение жесткости включения приводит к снижению коэффициентов интенсивности напряжений  $K_I$  ( $K_{II} = 0$ ) для тех же отношений коэффициентов теплопроводности, т.е. имеются благоприятные условия для нераспространения микротрещин.

Ключевые слова: моделирование, термомеханические процессы, дефекты, коэффициент интенсивности напряжений, трещинообразование поверхностный слой, неоднородность.

A. V. USOV, M. V. KUNITSYN, Y. E. SIKIRASH  
Odessa Polytechnic State University

## MODELING THE INFLUENCE OF THE HETEROGENEOUS STRUCTURE OF ALLOYS ON PROVIDING QUALITATIVE CHARACTERISTICS OF THE SURFACE LAYER IN FINISHING OPERATIONS

The paper proposes modeling thermomechanical phenomena that form in products at finishing operations and affecting the quality of the surface layer, taking into account hereditary inhomogeneities formed in previous technological operations, establishing their influence on cracking and scallop formation based on a quantitative analysis of the thermal and stress state and taking into account heterogeneity material of products. The stress intensity coefficients  $K_I$ ,  $K_{II}$  i  $K_{III}$  serve as a measure of the stress singularity at the apex of the crack-like defect. When the load leads to the fact that the stress intensity becomes equal to the critical, the crack-like defect turns into the main crack. Under conditions of uneven heating in the surface layer, there are stresses, which in the presence of cracked defects in the body can lead to their spread even in the absence of external mechanical loads. It was found that the size and orientation of these defects, the depth of their occurrence and their relative position in the surface layer, and the magnitude of the heat flux acting on the treated surface affect the value of the stress intensity factors for defects such as cracks. For any coefficients of thermal conductivity, linear thermal expansion, and shear moduli of the matrix and inclusion, changes in stress intensity factors (SIF) are shown if the heat flux is directed perpendicular to the crack in the inclusion, and vice versa, if parallel to the crack. The geometry and properties of inclusions, which can create conditions for retardation and the development of grinding cracks, are considered. Suppose the heat flux is directed parallel to the greater axis of the elliptical inclusion and a rectilinear thermally insulated crack. In that case, when the temperature coefficient of linear expansion (TCLE) of the inclusion is greater than that of the matrix, an increase in the stiffness of the inclusion leads to an increase in the stress intensity factors for different ratios of the thermal conductivity coefficients of the material constituents. It leads to the development of microcracks. Furthermore, vice versa, if the TLEC of the inclusion is less than that of the matrix, a decrease in the stiffness of the inclusion leads to a decrease in the stress intensity factors  $K_I$  ( $K_{II} = 0$ ) for the exact ratios of the thermal conductivity coefficients, i.e., there are favorable conditions for the non-proliferation of microcracks. The presence of a rigid inclusion in the case of a power load leads to an increase, and in the case of a thermal one, to a decrease in the  $K_I$  value.

Keywords: modeling, thermomechanical processes, defects, stress intensity factor, cracking surface layer, heterogeneity.

### Постановка проблеми

Встановлення зв'язків між найважливішими експлуатаційними властивостями деталей (зносостійкість, втомна і тривала міцність, контактна жорсткість, магнітні властивості та ін.) і технологічними параметрами — мікрорельєфом обробленої поверхні, мікротвердістю, наявністю микротріщин, відколів, глибиною поширення зміцненого шару є однією з найважливіших задач технології машинобудування [1], [2], [3], [4].

Вивчення впливу тільки механічної обробки на експлуатаційні властивості виробів є недостатнім, так як попередні види обробок (термічна, термомеханічна,

хіміко-термічна й ін.) і, особливо, способи отримання заготовок, вносять істотний внесок у зміну властивостей поверхневого шару, що піддається надалі механічній обробці [5, 6].

Розробка моделей технологічної спадковості є основою нового наукового і практичного спрямування в технології машинобудування, що має на меті підвищення експлуатаційних якостей деталей машин технологічними методами в самому процесі виготовлення деталей.

Складність процесів, що протікають у металі приповерхневого шару, схильного до тріщиноутворення при механічній обробці, а також при експлуатації цих деталей, робить необхідним розгляд проблеми технологічної спадковості тільки на операції кінцевої обробки.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Найбільш поширеним методом кінцевої обробки є шліфування, що забезпечує високу точність і високу продуктивність виготовлення деталей [7, 8].

Але із застосуванням шліфування пов'язана поява в поверхневих шарах деталей припиків, тріщин, розтягуючих напружень, які значно впливають на надійність і довговічність цих деталей у процесі їх експлуатації [9, 10].

Методи, що використовуються при існуючій технології виготовлення, в тому числі, й у зв'язку з появою композиційних матеріалів, не дозволяють повністю виключити дефекти, що виникають у поверхневому шарі. Цьому сприяють: неминучі коливання припуску від похибок попередніх операцій механічної обробки; макронеоднорідність самого матеріалу, що характеризується величиною зерна, дефектами упаковки, дислокаціями і структурними перетвореннями, порушенням прецизійності деталей при термічній і їй подібній обробці, недостатньо вивчені термомеханічні явища, які супроводжують процес шліфування і внаслідок яких на оброблюваних поверхнях з'являються припики, мікротріщини, структурні перетворення, залишкові напруження.

Висока теплова напруженість процесів алмазно-абразивної обробки призводить до того, що теплофізика цих процесів часто є домінуючою у формуванні якісних характеристик обробленої поверхні [11-12].

Відсутність досліджень щодо особливостей процесу зародження шліфувальних тріщин, їх формуванні в магістральні залежно від конструктивних, технологічних параметрів і структурних неоднорідностей матеріалу виробів не дозволяють однозначно користуватися наявними рекомендаціями щодо усунення розглянутих дефектів.

**Метою даної роботи** є моделювання термомеханічних явищ, які формуються у виробках на фінішних операціях і впливають на якість поверхневого шару з урахуванням попередніх видів обробки виробів і спадкових неоднорідностей, сформованих на попередніх технологічних операціях, встановлення впливу їх на тріщино- і припікоутворення на основі кількісного аналізу теплового й напруженого стану і з урахуванням гетерогенності матеріалу виробів.

### Основний зміст роботи

Коефіцієнти інтенсивності напружень  $K_I$ ,  $K_{II}$  і  $K_{III}$  служать мірою сингулярності напружень біля вершини тріщиноподібного дефекту. Критичне значення інтенсивності напружень  $K_c$  є характеристикою матеріалу. Коли навантаження призводить до того, що інтенсивність напружень стає рівною критичній, то тріщиноподібний дефект перетворюється в магістральну тріщину. Критичне напруження обернено пропорційне квадратному кореню з початкової довжини тріщиноподібного дефекту [13]:

$$\sigma_c = \frac{K_1 c}{\sqrt{\pi l}}, \quad (1)$$

де  $l$  – початкова довжина тріщиноподібного дефекту, а індекс 1 – означає перший тип руйнування.

Розглянемо задачу про визначення напружено-деформованого стану кусково-однорідного виробу, верхній шар якого містить тонкі вclusions і тріщиноподібні дефекти. На ділянці  $(-a, a)$  оброблюваної поверхні виділяється тепловий потік, а за її межею реалізується тепловий обмін за законом Ньютона.

В умовах нерівномірного нагріву в поверхневому шарі виникають напруження, які при наявності в тілі тріщиноподібних дефектів можуть привести до їх розповсюдження, навіть при відсутності зовнішніх механічних навантажень.

Нехай у поверхневому шарі виробів на лініях  $\tilde{x}_1 = 0, \tilde{x}_2 = 0, \dots, \tilde{x}_k = 0$  є дефекти  $|\tilde{y}_1| < l_1, |\tilde{y}_2| < l_2, \dots, |y_k| < l_k$ , при переході через які виникають розриви поля зміщень і напружень. Надалі будемо розглядати систему дефектів із 2-х тріщин ( $k = 1, 2$ ), розташованих у локальних координатах відповідно  $\tilde{x}_1 o_1 \tilde{y}_1$  ( $k = 1$ ) і  $\tilde{x}_2 o_2 \tilde{y}_2$  ( $k = 2$ ). На рис. 1 представлена розрахункова схема для визначення впливу дефектів на утворення тріщин при термічному навантаженні.

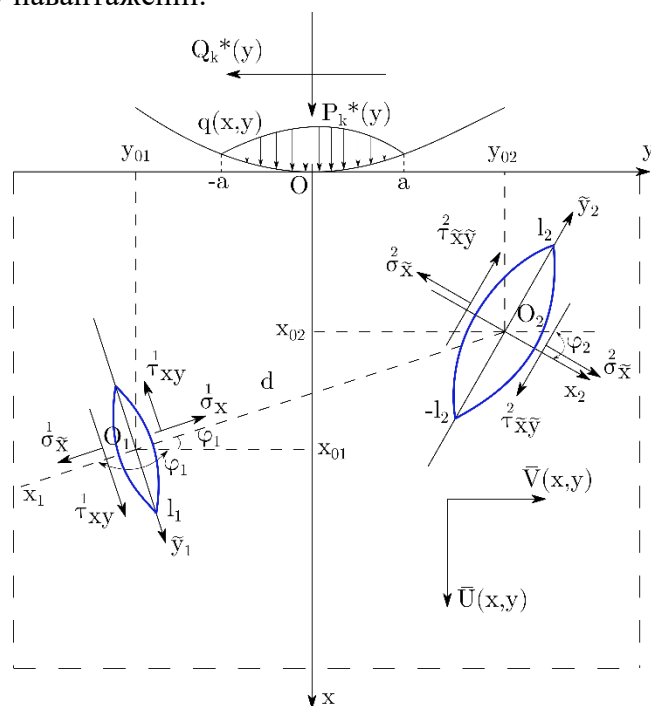


Рис. 1. Розрахункова схема для визначення взаємного впливу дефектів на інтенсивність утворення тріщин оброблюваної поверхні від термомеханічного навантаження, що формується при шліфуванні

Введемо в розгляд скачки зсувів і напружень на дефектах:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{V}_k(\tilde{y}) \rangle &= \tilde{V}_k(-0, \tilde{y}) - \tilde{V}_k(+0, \tilde{y}); \langle \sigma_x^k(\tilde{y}) \rangle = \sigma_x^k(-0, \tilde{y}) - \sigma_x^k(+0, \tilde{y}); \\ \langle \tilde{U}_k(\tilde{y}) \rangle &= \tilde{U}_k(-0, \tilde{y}) - \tilde{U}_k(+0, \tilde{y}); \langle \tau_{xy}^k(\tilde{y}) \rangle = \tau_{xy}^k(-0, \tilde{y}) - \tau_{xy}^k(+0, \tilde{y}). \end{aligned} \quad (2)$$

За умовами (2) на дефектах типу тріщин скачки нормальних і дотичних напружень дорівнюють нулю, тобто  $\langle \sigma_r^k(y) \rangle = 0, \langle \tau_{xy}^k(y) \rangle = 0$ . Переміщення  $\tilde{U}_k(\tilde{x}, \tilde{y}), V_k(\tilde{x}, \tilde{y}), \theta_k(\tilde{x}, \tilde{y})$  повинні задовольняти рівнянням Ламе [13]:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\theta}'}{1-2\mu} + \Delta\tilde{U}_k &= b^T T', \\ \frac{\tilde{\theta}'}{1-2\mu} + \Delta\tilde{V}_k &= b^T T', \\ \theta_k = \tilde{U}'_k + \tilde{V}'_k, b^T &= \frac{4G(1+\mu)dt}{1-2\mu}. \end{aligned} \tag{3}$$

Використовуючи перетворення Треффца [13] в трансформанті Фур'є за змінною у зміщення  $\theta_k(\tilde{x}, \tilde{y})$ ,  $\tilde{V}_{\beta k}(\tilde{x})$ , і напруження  $\sigma_{\tilde{x}\beta}^k(\tilde{x}), \tau_{\tilde{x}\beta}^k(\tilde{x}), \sigma_{\tilde{x}\beta}^k(\tilde{x}) = \sigma_{y\beta}^k(\tilde{x})\tilde{y}$  можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{\beta,k}(\tilde{x}) &= \Psi'_{1\beta}{}^k + \tilde{x}\Psi'_{0\beta}{}^k = \langle \Psi'_{1\beta}{}^k \rangle \Phi_{\beta}(\tilde{x}) + \langle \Psi'_{1\beta}{}^k \rangle \Phi'_{\beta}(\tilde{x}) + \tilde{x}\Psi'_{0\beta}{}^k = \\ &= \frac{(3-4\mu)\langle \sigma_{x\beta}^k \rangle - (1-2\mu)i\beta}{2(1-\mu)} \Phi_{\beta}(\tilde{x}) + \langle \tilde{U}_{\beta,k} \rangle \Phi'_{\beta}(\tilde{x}) + \tilde{x}\Psi'_{0\beta}{}^k; \\ \sigma_{x\beta}^k(\tilde{x}) &= (1-2\mu) \left[ \langle \Psi'_{1\beta}{}^k \rangle \Phi'_{\beta}(\tilde{x}) + \langle \Psi'_{0\beta}{}^k \rangle \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \Phi_{\beta}(\tilde{x}) \right] + \langle \Psi'_{1\beta}{}^k \rangle \Phi'_{\beta}(\tilde{x}) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[ \langle \Psi'_{1\beta}{}^k \rangle \Phi'_{\beta}(\tilde{x}) \right] + \tilde{x} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \left[ \langle \Psi'_{1\beta}{}^k \rangle \Phi_{\beta}(\tilde{x}) + \langle \Psi'_{0\beta}{}^k \rangle \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \Phi'_{\beta}(\tilde{x}) \right]; \\ \tilde{U}_{\beta,k}(\tilde{x}) &= \Psi'_{2\beta}{}^k - i\beta\tilde{x}\Psi'_{0\beta}{}^k = \langle \Psi'_{2\beta}{}^k \rangle \Phi_{\beta}(\tilde{x}) + \langle \Psi'_{2\beta}{}^k \rangle \Phi'_{\beta}(\tilde{x}) - i\beta\tilde{x}\Psi'_{0\beta}{}^k = \\ &= \frac{(3-4\mu)\langle \tau_{\beta}^k \rangle - i\beta(1-2\mu)\langle \tilde{U}_{\beta,k} \rangle}{2(1-\mu)} \Phi_{\beta}(\tilde{x}) + \langle \tilde{V}_{\beta,k} \rangle \Phi'_{\beta}(\tilde{x}) + i\beta\tilde{x}\Psi'_{0\beta}{}^k; \\ \tau_{x\beta}^k(\tilde{x}) &= \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} i\beta \langle \sigma_{\tilde{x}\beta}^k \rangle \Phi'_{\beta}(\tilde{x}) + \\ + \frac{\tilde{x}}{2(1-\mu)} &\left[ \beta^2 \langle \tilde{V}_{k,\beta} \rangle \Phi'_{\beta}(\tilde{x}) + i\beta \langle \sigma_{\beta}^k \rangle \Phi'_{\beta}(\tilde{x}) + i\beta \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} (\langle \tilde{U}_{k,\beta} \rangle \Phi_{\beta}(\tilde{x})) + \beta \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} (\langle \sigma_{\tilde{x}\beta}^k \rangle \Phi_{\beta}(\tilde{x})) \right] + \\ &+ \langle \tau_{\tilde{x}\beta}^k \rangle \Phi'_{\beta}(\tilde{x}) + \frac{\langle \tilde{V}_{k,\beta} \rangle}{2(1-\mu)} \beta^2 \Phi_{\beta}(\tilde{x}); \\ \sigma_{\beta}^k(\tilde{x}) &= \frac{-\mu i\beta}{1-\mu} \langle \tilde{V}_{k,\beta} \rangle \Phi'_{\beta}(\tilde{x}) + \frac{\mu}{1-\mu} \langle \sigma_{\beta}^k \rangle \Phi'_{\beta}(\tilde{x}) + \\ + \frac{\mu}{1-\mu} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} &[\langle U_{k,\beta} \rangle \Phi'_{\beta}(\tilde{x})] - \frac{\mu i}{1-\mu} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} [\langle \tau_{\tilde{x}\beta}^k \rangle \Phi'_{\beta}(\tilde{x})] - \frac{i\beta(\tau-\mu)}{2(1-\mu)} \langle \tau_{\beta}^k \rangle \Phi_{\beta}(\tilde{x}) + \\ + \frac{\beta^2(1-2\mu)}{2(1-\mu)} &\langle \tilde{U}_{k,\beta} \rangle \Phi_{\beta}(\tilde{x}) - i\beta \langle \tilde{V}_{k,\beta} \rangle \Phi'_{\beta}(\tilde{x}) - \frac{\beta^2 \tilde{x} i\beta}{2(1-\mu)} \langle \tilde{U}_{k,\beta} \rangle \Phi_{\beta}(\tilde{x}) + \\ + \frac{\beta^2 \tilde{x}}{2(1-\mu)} &\langle \sigma_{\tilde{x}\beta}^k \rangle \Phi_{\beta}(\tilde{x}) + \frac{\beta^2 \tilde{x}}{2(1-\mu)} \langle \tilde{U}_{k,\beta} \rangle \Phi'_{\beta}(\tilde{x}) - \frac{i\beta \tilde{x}}{2(1-\mu)} \langle \tau_{\tilde{x}\beta}^k \rangle \Phi'_{\beta}(\tilde{x}). \end{aligned} \tag{5}$$

У наведених виразах  $\Phi_\beta(\tilde{x}) = \frac{1}{2n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2} d\alpha = \frac{e^{-|\beta x|}}{2|\beta|}$  – фундаментальна функція.

Повертаючись до оригіналів, розривні розв’язки для напружень в локальних координатах  $\tilde{x}_K O_K \tilde{y}_K$  через похідні стрибків зміщення  $\langle \tilde{U}'_k(\tilde{y}) \rangle$  й  $\langle \tilde{V}'_k(\tilde{y}) \rangle$  будуть мати вигляд:

$$\sigma_{\tilde{x}}^k(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{1}{4\pi(1-\mu)} \int_{-e_k}^{e_k} \langle \tilde{U}'_k(r) \rangle \frac{(\tilde{y}-r)[(4\mu-3)((\tilde{y}-r)^2 + \tilde{x}^2) - \tilde{x}^2]}{[(\tilde{y}-r)^2 + \tilde{x}^2]^2} dr - \frac{\tilde{x}}{4\pi(1-\mu)} \int_{-e_k}^{e_k} \langle \tilde{V}'_k(r) \rangle \frac{((\tilde{y}-r)^2 - \tilde{x}^2)}{[(\tilde{y}-r)^2 + \tilde{x}^2]^2} dr; \tag{6}$$

$$\tau_{\tilde{x}}^k(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{-\tilde{x}}{4\pi(1-\mu)} \int_{-e_k}^{e_k} \langle \tilde{U}'_k(r) \rangle \frac{((\tilde{y}-r)^2 - \tilde{x}^2)}{[(\tilde{y}-r)^2 + \tilde{x}^2]^2} dr - \frac{1}{4\pi(1-\mu)} \int_{-e_k}^{e_k} \langle \tilde{V}'_k(r) \rangle \frac{(\tilde{y}-r)^3}{[(\tilde{y}-r)^2 + \tilde{x}^2]^2} dr;$$

$$\sigma_y^k(\tilde{x}, \tilde{y}) = \int_{-e_k}^{e_k} \langle \tilde{U}'_k(r) \rangle \left\{ \frac{(\tilde{y}-r)}{4\pi[(\tilde{y}-r)^2 + \tilde{x}^2]^2} \left( 1 + \frac{\tilde{x}^2}{(1-\mu)[(\tilde{y}-r)^2 + \tilde{x}^2]} \right) \right\} dr + \frac{1}{2\pi(1-\mu)} \int_{-e_k}^{e_k} \langle \tilde{V}'_k(r) \rangle \left\{ (1+\mu)\tilde{x}l_n[(\tilde{y}-r)^2 + \tilde{x}^2] + \frac{\tilde{x}[\tilde{x}^2 + (\tilde{y}-r)^2]^2}{2[\tilde{x}^2 + (\tilde{y}-r)^2]^2} \right\} dr.$$

Компенсуючі напруження знайдемо наступним чином. Розривні розв’язки (1)-(4) представимо в глобальних координатах і, вважаючи  $x = 0$ , знайдемо напруження на границі.

Вони будуть дорівнювати:

$$\sigma_x^k(0, y) = \int_{-e_k}^{e_k} \left[ \langle \tilde{U}'_k(r) \rangle R_1^k(y, r) + \langle \tilde{V}'_k(r) \rangle N_1^k(y, r) \right] dr = P_k^*(y); \tag{7}$$

$$\tau_{xy}^k(0, y) = \int_{-e_k}^{e_k} \left[ \langle \tilde{U}'_k(r) \rangle R_2^k(y, r) + \langle \tilde{V}'_k(r) \rangle N_2^k(y, r) \right] dr = q_k^*(y). \tag{8}$$

Тут  $R_j^k(x, y)$ ,  $N_j^k(y, z)$  ядра ( $k = 1, 2$ ) характеризують заміну координат (локальні  $\tilde{x}_K O_K \tilde{y}_K$  в глобальні  $XOY$  і вирази компонент напружень у глобальних координатах. Беручи в якості граничних ( $x = 0$ ) умови:

$$\sum_{k=1}^2 \sigma_x^k(0, y) = -P_k^*(y) = \sigma_x(0, y), \tag{9}$$

$$\sum_{k=1}^2 \tau_{xy}^k(0, y) = -q_k^*(y) = \tau_{xy}(0, y), \tag{10}$$

можна знайти напружений стан поверхневого шару.

Термопружні напруження, що формуються в оброблюваному виробі від дії теплового потоку  $q(y, t)$ , що діють на границі  $x = 0$ , у зоні контакту  $|y| < a$  і теплообміном за законом Ньютона-Рихмана  $\lambda \delta T / \delta x + \gamma T = 0$ , поза цією зоною, тобто  $|y| > a$  знайдемо з розв'язку завдання (1) (окремий випадок  $k = 0$ ,  $0 \leq x < \Delta$ ). У глобальних координатах ці напруження подаються у вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{III}(x, y) = & \frac{2\alpha_1(x^2 - y^2)}{\pi[x^2 + y^2]^2} - \frac{2\alpha_2 y(3x^2 - y^2)}{\pi[x^2 + y^2]^3} + \frac{(\alpha_3 - x\alpha_4) 2x(x^2 - 3y^2)}{\pi [x^2 + y^2]^3} - \\ & - \frac{x\alpha_5}{\pi} \frac{\Gamma(4)\cos\left(\frac{4x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)}{[x^2 + y^2]^2} + \frac{b^T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-i\beta y} [T''_{\beta}(\xi)\Phi_{\beta}(x - \xi) + \\ & + T'_{\beta}(\xi)\Phi'_{\beta}(x - \xi) - \lambda^2 \beta^2 T_{\beta}(\xi)\Phi_{\beta}(x - \xi)] d\xi d\beta; \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^{III}(x, y) = & \frac{\gamma_1 2xy}{\pi[x^2 + y^2]^2} - \frac{\gamma_2 x(x^2 - 3y^2)}{\pi[x^2 + y^2]^3} + \frac{\gamma_3 y(3x^2 - y^2)}{\pi [x^2 + y^2]^3} - \\ & - \frac{\gamma_4 x}{\pi} \frac{\Gamma(4)\sin\left(\frac{4x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)}{[x^2 + y^2]^2} - \\ & - \frac{b^T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-i\beta y} [2T'_{\beta}(\xi)\Phi_{\beta}(x - \xi) + T_{\beta}(\xi)\Phi'_{\beta}(x - \xi)] d\xi d\beta; \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^{III}(x, y) = & \frac{b_1}{\pi} \frac{x^2 - y^2}{[x^2 + y^2]^2} - \frac{b_2 + b_3 x x(x^2 - 3y^2)}{\pi [x^2 + y^2]^3} + \frac{b_4 x \Gamma(4)\cos\left(\frac{4x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)}{[x^2 + y^2]^2} - \\ & - \frac{b^T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \beta^2 e^{-i\beta y} T_{\beta}(\xi)\Phi_{\beta}(x - \xi) d\xi d\beta. \end{aligned} \tag{13}$$

У знайдених розв'язках для нормальних  $\sigma_x^{II}(x, y)$ ,  $\sigma_x^{III}(x, y)$  і дотичних  $\tau_{xy}^{II}(x, y)$ ,  $\tau_{xy}^{III}(x, y)$  напружень в локальних координатах використаємо очевидні умови:

$$\begin{aligned} \lim_{\tilde{x} \rightarrow 0} \left[ \sigma_{\tilde{x}}^I(\tilde{x}, \tilde{y}) + \sigma_{\tilde{x}}^{II}(\tilde{x}, \tilde{y}) + \sigma_{\tilde{x}}^{III}(\tilde{x}, \tilde{y}) \right] &= 0, \\ \lim_{\tilde{x} \rightarrow 0} \left[ \tau_{\tilde{x}y}^I(\tilde{x}, \tilde{y}) + \tau_{\tilde{x}y}^{II}(\tilde{x}, \tilde{y}) + \tau_{\tilde{x}y}^{III}(\tilde{x}, \tilde{y}) \right] &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Із системи інтегральних рівнянь (15) знаходимо стрибки напружень  $\langle \sigma_x^K(y) \rangle$  і  $\langle \tau_x^K(y) \rangle$  ( $K = 1, 2$ ), якщо в якості дефектів розглядаються два включення, фізичні

властивості яких відрізняються від властивостей матриці, мають різні пружні постійні  $E_i$ ,  $\mu_i$  і температурні коефіцієнти лінійного розширення  $\alpha_i^t$ ):

$$\int_{-l_1}^{l_1} \frac{\langle \sigma_x^1(r) \rangle}{y-r} dr + \sum_{k=1}^2 \int_{-l_k}^{l_k} [\langle \sigma_x^k(r) \rangle L_k^{(1)}(d^*, y-r) + \langle \tau_{xy}^k(r) \rangle N_k^{(1)}(d^*, y-r)] dr = F_1^*;$$

$$\int_{-l_1}^{l_1} \frac{\langle \tau_{xy}^1(r) \rangle}{y-r} dr + \sum_{k=1}^2 \int_{-l_k}^{l_k} [\langle \sigma_x^k(r) \rangle L_k^{(2)}(d^*, y-r) + \langle \tau_{xy}^k(r) \rangle N_k^{(2)}(d^*, y-r)] dr = F_2^*;$$

$$\int_{-l_1}^{l_1} \frac{\langle \sigma_x^2(r) \rangle}{y-r} dr + \sum_{k=1}^2 \int_{-l_k}^{l_k} [\langle \sigma_x^k(r) \rangle L_k^{(1)}(d^*, y-r) + \langle \tau_{xy}^k(r) \rangle N_k^{(1)}(d^*, y-r)] dr = F_3^*;$$

$$\int_{-l_1}^{l_1} \frac{\langle \tau_{xy}^2(r) \rangle}{y-r} dr + \sum_{k=1}^2 \int_{-l_k}^{l_k} [\langle \sigma_x^k(r) \rangle L_k^{(2)}(d^*, y-r) + \langle \tau_{xy}^k(r) \rangle N_k^{(2)}(d^*, y-r)] dr = F_4^*.$$
(15)

Тут  $d^*$  – параметр, що характеризує теплофізичні й механічні властивості матриці та включень.

Розв’язок сингулярних інтегралів із ядрами Коші зводиться методом ортогональних многочленів до розв’язку систем алгебраїчних рівнянь. Остаточно розв’язки систем (17)-(18) щодо стрибків зміщень і напружень матимуть вигляд:

$$\| \langle \tilde{U}' \rangle, \langle \tilde{V}' \rangle, \langle \sigma_x \rangle, \langle \tau_{xy} \rangle \| = \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \left[ \Gamma_k + \frac{2}{N} \sum_{m=1}^{N-1} T_m(t) \sum_{v=1}^N g_{kv}^* T_m(\tau_v) \right], \quad (16)$$

де  $T(t)$  – многочлени Чебишева.

Для фіксованих параметрів нашої задачі кількість вузлів  $N$  вибираємо непарним, так як у цьому випадку середній вузол є нерухомим і аналіз значень шуканих функцій у цьому вузлі дасть додаткову інформацію про збіжність процесу [13].

Отже, скачки (16) знайдені, і поля напружень і зсувів у поверхневому шарі виробів можна визначати за формулами:

$$\| \sigma_x, \tau_{xy}, U', V' \| = \sum_{i=1}^n \int_{-l_i}^{l_i} \| R_i^{(m)}(x-\xi, y) \| P^{(i)}(\xi) d\xi;$$

$$\begin{aligned}
 R_i^m(x, y) &= -(\alpha_i)^m V_i^{(m)} \left[ K_n^{(S_i-m)} \right], m = 0, 1; \\
 K_n^{(1)}(x, y) &= \frac{(-sgny)^n x}{4\pi(x^2 + y^2)} \left[ \frac{2y^2}{x^2 + y^2} - (n - 1) \right]; \\
 K_n^{(0)}(x, y) &= \frac{(-sgny)^n |y|}{4\pi(x^2 + y^2)} \left[ \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - (n - 1) \right], n = 0, 1, 2 \dots \\
 (\alpha_i)^m R_i^m(x, y) &= C_i V_i^{(m)} \left[ K_n^{(S_i-m)} \right] - [C_i + \alpha_i(C_i + d)] V_i^{(m-2)} \left[ K_n^{(S_i-m)} \right]; \\
 S_i &= \sin^2 \frac{1}{2k\pi}; C_i = \frac{1 - \mu_i^2}{E_i}; d_i = \frac{\mu_i (1 + \mu_i)}{E_i}; \\
 P^{(0)}(y) &= \langle \sigma_x(0, y) \rangle, P^{(1)}(y) = \langle \tau_{xy}(0, y) \rangle, -P^{(2)}(y) = \langle \tilde{U}'(0, y) \rangle; \\
 -P^{(3)}(y) &= \langle \tilde{V}'(0, y) \rangle, P^{(j)}(x) \equiv 0, |y| > l_k, j = \overline{0, 3}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Найбільший інтерес представляє поведінка напружень  $\sigma x(o, y) + i\tau xy(o, y)$  при  $y \rightarrow lK \pm o$ . Ці напруження і визначають характер коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН):  $K_I - iK_{II}$ .

Розглянемо випадок дефекту типу тріщини довжиною  $2l$ , що розміщена в поверхневому шарі товщиною  $2h$  і довільно орієнтованого. Напружений стан поверхневого шару обумовлено збуренням близько тріщини заданого температурного поля  $Tq(x, y, \tau)$ . Якщо температурне поле описується функцією  $To(x, y, \tau) = q(\tau)(y \cos \beta + x \sin \beta)$ , то для визначення КІН маємо формулу:

$$\begin{aligned}
 K_I^\pm - iK_{II}^\pm &= \mp i \frac{\sqrt{\pi l} H q l}{\lambda} \sin(\beta - \phi) \left[ 1 - \frac{\delta^2}{2} (\alpha_1 - N_{11}) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\delta^4}{4} \left[ d_2 + \frac{3}{2} d_3 - d_1 N_{11} - N_{11}^2 + N_{31} \right] + 0(\delta^6) \right],
 \end{aligned} \tag{18}$$

де  $\beta$  – кут між напрямком теплового потоку і віссю  $Oy$ ;  $\phi$  – кут між віссю дефекту і віссю  $Ox$ ;  $\delta = \frac{l}{h}$  – безрозмірна ширина смуги:

$$\begin{aligned}
 d_1 &= -(i \sin 2\phi + e^{-4i\phi}) I_1 - \frac{1}{2} e^{-2i\phi} \mathfrak{S}_1 - (1 - 2e^{-2i\phi} - e^{-4i\phi}) A_2 - 4e^{-4i\phi} E_4; \\
 d_2 &= \frac{1}{8} [1 - \cos 4\phi + 8 \sin^2 \phi + 5 i \sin \phi (e^{-5i\phi} - 2e^{-i\phi})] \mathfrak{S}_1 + \\
 &+ \frac{1}{2} (\cos 4\phi - 5 i \sin \phi e^{-5i\phi}) I_3 + \mathfrak{S}_{3/4} + 2e^{-i\phi} E_6 + [i \sin \phi (3e^{-i\phi} - 2e^{-i\phi}) - e^{-2i\phi}] + \\
 &+ \frac{1}{2} [2i(3e^{i\phi} - 3e^{-i\phi} - 2e^{-i\phi} + e^{3i\phi}) \sin \phi + e^{2i\phi} - 2e^{-2i\phi} - 16 \sin^2 \phi e^{-4i\phi}] E_4; \\
 d_3 &= \frac{1}{6} \left[ (\sin 4\phi - 2e^{-4i\phi} + 2e^{-6i\phi}) I_3 + \frac{1}{2} e^{-4i\phi} \mathfrak{S}_3 + \right. \\
 &\quad \left. + (4e^{-2i\phi} - e^{-4i\phi} - 4e^{-4i\phi} - e^{-6i\phi}) \right] A_4 - 4e^{-6i\phi} E_6;
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_n &= 4 \int_0^{\infty} y^{n+2} \operatorname{sh} 2y e(y) dy; I_n = \int_0^{\infty} y^n [(1 - e^{-2y}) \operatorname{sh} 2y - 4y^2] e(y) dy; \\ A_n &= \int_0^{\infty} y^n (\operatorname{ch} 2y - 1) e(y) dy; E_n = \int_0^{\infty} y^n e(y) dy; e(y) = \frac{1}{4y^2 - \operatorname{sh}^2 2y}; \\ N_{11} &= \frac{\pi^2}{48} (\cos 2\phi \pm 3); N_{31} = \frac{\pi^4}{256} (\cos 4\phi / 15 \pm \cos 2\phi); N_{33} = \frac{N_{31}}{3}. \end{aligned}$$

Тут і далі верхній знак відповідає правому кінцю дефекту, а нижній – лівому.

На рис. 2 і 3 наведені залежності  $K_I^* = \lambda K_I / \sqrt{\pi l} H q l$  і  $K_{II}^* = \lambda K_{II} / \sqrt{\pi l} H q l$  від кута повороту тріщини  $\phi$  при  $l/h = \delta = 0,1$  (1 і 2 – криві відповідні граничним умовам задачі теплопровідності, якщо задана на кордоні температура – 1), якщо тепловий потік і умови теплообміну – 2), коли тепловий потік перпендикулярний до  $OY$ , суцільні лінії відповідають правому кінцю тріщини, пунктирні – лівому;  $H = \alpha t E / 2$ .

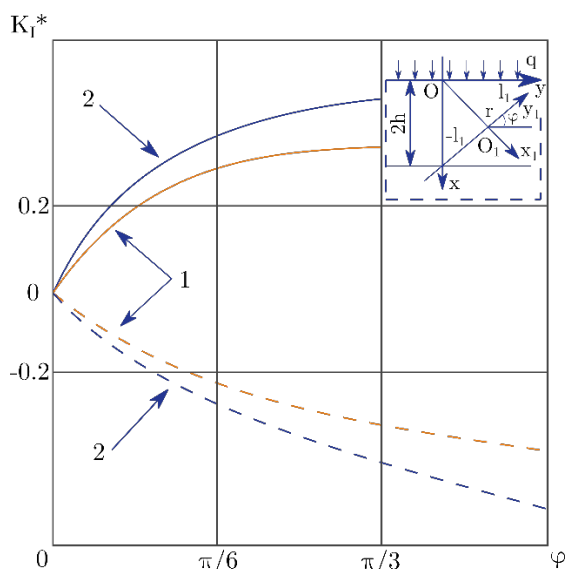


Рис. 2. Залежність  $K_I^* = \lambda K_I / \sqrt{\pi l} H q l = f(\phi)$  від кута повороту тріщини при  $\delta = l/h = 0,1$ ; 1 - коли задана на границі температура; 2 - задані тепловий потік і умови теплообміну; суцільні лінії 1, 2 - правий, пунктирні - лівий кінці тріщини

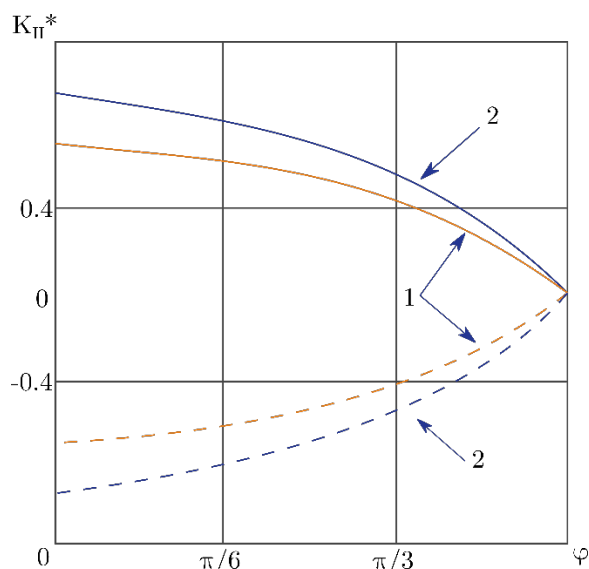


Рис. 3. Залежність  $K_{II}^* = \lambda K_{II} / \sqrt{\pi l} H q l = f(\phi)$  від кута повороту тріщини при  $\delta = l/h = 0,1$ ; 1 - ГУ I роду; 2 - задані тепловий потік і умови теплообміну; суцільні лінії 1, 2 - правий, пунктирні - лівий кінці тріщини

З рисунків 2 і 3 слідує, що значення  $K_I$  і  $K_{II}$  в разі теплообміну (криві 2) по абсолютній величині більші, ніж поза зоною контакту, якщо границя теплоізолювана.

Величина  $K_{II}$  досягає найбільшого значення, коли тепловий потік перпендикулярний тріщині.

Знайдемо інтенсивність напружень у вершинах тріщини, що розміщена на глибині  $\delta^*$ , коли на її берегах підтримується температура  $T_0$ , а на поверхні тіла ( $x = 0$ ) заданий тепловий потік  $q(T, y)$  спрямований перпендикулярно ( $\beta = 0$  – кут між напрямком потоку і віссю  $Ox$ ) до цієї поверхні. Термопружний стан тіла буде

визначатися тільки збуреним температурним полем. З огляду на те, що на лінії тріщини  $T_0 = 2q_{\theta^*}\delta^*$  зі співвідношень (17)-(18) знаходимо:

$$K_I^{*\pm} = \mp q_{\theta^*} H l \sqrt{\pi l}; K_{II}^{*\pm} = \pm 2HT_0 \sqrt{\frac{l}{\pi}}. \quad (19)$$

Якщо ввести в розгляд величину  $P\eta = q_{\theta^*} H l \delta^*$ , де  $P$  – зусилля розтягування, яке формується під дією температур;  $\eta$  – параметр, то можна встановити наступні важливі характеристики для поведінки дефектів. Якщо нам відомо значення коефіцієнтів інтенсивності напружень, то кут початкового поширення тріщини  $\theta^*$  від граничного значення теплового потоку для неї визначаються зі співвідношень [14]:

$$\theta^* = 2 \arctg D, D = \frac{K_I - \sqrt{K_I^2 + 8K_{II}^2}}{4K_{II}}, \quad q_{\theta^*} = \frac{\sqrt{3}\lambda K_{1C}}{Hl\sqrt{\pi l}\delta^*}. \quad (20)$$

Аналіз отриманих результатів показує, що наявність жорсткого ( $V_1 > V_2$ ) включення в разі силового навантаження призводить до збільшення, а в разі теплової – до зменшення значення  $K_I$ . При цьому істотний вплив на характер зміни КІН мають коефіцієнти теплового лінійного розширення композиту. Наприклад, при  $\alpha_{t1} < \alpha_{t2}$ ,  $K_I > 0$ , а при  $\alpha_{t1} > \alpha_{t2}$ ,  $K_I < 0$ . Коефіцієнти теплопровідності 1 і 2 якісно не впливають на  $K_I$  і  $K_{II}$ , а змінюють їх лише кількісно.

Розглянутий вище приклад показує, які фактори впливають на поведінку тріщини і початок її розповсюдження, в залежності від умов теплообміну, а також напружений стан матеріалу, що містить зазначені неоднорідності.

Таким чином, для бездефектної обробки сплавів необхідно враховувати їх структурну неоднорідність. Наявність тріщиноподібних дефектів, і включень сприяє тому, що при виборі режимів обробки й характеристик інструменту слід керуватися граничними значеннями теплового потоку [15].

### Висновки

Проведені теоретичні дослідження впливу структурної неоднорідності матеріалів на механізм зародження й розвитку тріщин під дією термомеханічних навантажень, що дозволяє зробити наступні висновки:

1. На величину коефіцієнтів інтенсивності напружень для дефектів типу тріщин впливають розміри й орієнтація цих дефектів, глибина їх залягання і взаємне розташування, величина теплового потоку.

2. Для будь-яких коефіцієнтів теплопровідності, лінійного температурного розширення й модулів зсуву матриці і дефекту коефіцієнти інтенсивності напружень  $K_I = 0, K_{II} \neq 0$  якщо тепловий потік спрямований перпендикулярно тріщині і, навпаки, якщо паралельно тріщині, то  $K_I \neq 0, K_{II} = 0$ .

### Список використаної літератури

1. Ящерицын П. И., Рыжов Э. В., Аверченков В. И. Технологическая наследственность в машиностроении. Минск: Наука и техника, 1977. 256 с.
2. Андриевский А. Н., Якимов А. В. О природе шлифовочных трещин. *Вестник машиностроения*. 1970. Т. 2. С. 65–67.
3. Якимов А. В., Напарьин Ю. А., Паршаков А. Н. Причины возникновения шлифовочных трещин. *Вестник машиностроения*. 1974. Т. 8. С. 46–49.
4. Якимов А. В. Оптимизация процесса шлифования. Москва: Машиностроение, 1975. 176 с.

5. Altenbach H., Altenbach J., Kissing W. *Mechanics of Composite Structural Elements*. Singapore : Springer, 2018. 518 с.
6. Bader M. G. Handbook of composite reinforcements. *International Materials Reviews*. 2012. Vol. 39. no. 3. P. 123–124.
7. Daniel G. *Composite Materials: Design and Applications*. 3rd edition. Boca Raton : CRC Press, 2014. P. 635.
8. Chawla K. K. *Composite Materials: Science and Engineering*. Materials Research and Engineering. New York : Springer, 2013. 528 с.
9. Christensen R. M. *Mechanics of Composite Materials*. Dover Civil and Mechanical Engineering. Dover Publications, 2012. 345 с.
10. Chou T. W. *Microstructural Design of Fiber Composites*. Cambridge Solid State Science Series. Cambridge University Press, 2005. 564 с.
11. Оборский Г. А., Дащенко А. Ф., Усов А. В., Дмитришин Д. В. Моделирование систем: монография. Одесса: Астропринт, 2013. 664 с.
12. Балохонов Р. Р. Поверхностные слои и внутренние границы разделов гетерогенных материалах: монография / Под ред. В. Е. Панин. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2006. 520 с.
13. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов разрезов, тонких включений и подкреплений. Москва: Наука, 1982. 344 с.
14. Кит Г.С., Кривцун М. Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами Киев: Наукова думка, 1983. 277 с.
15. Якимов А. В., Слободяник П. Т., Усов А. В. Теплофизика механической обработки. Киев–Одесса: Лыбидь, 1991. 240 с.

#### References

1. Yashcheritsyn, P. I., Ryzhov, E. V., & Averchenkov, V. I. (1977). *Tekhnologicheskaya nasledstvennost' v mashinostroyenii*. Minsk : Nauka i tekhnika.
2. Andriyevskiy, A. N., & Yakimov, A. V. (1970). O prirode shlifovochnykh treshchin. *Vestnik mashinostroyeniya*. **2**, 65–67.
3. Yakimov, A. V., Napar'in, YU. A., & Parshakov, A. N. (1974). Prichiny vznikoneniya shlifovochnykh treshchin. *Vestnik mashinostroyeniya*. **8**, 46–49.
4. Yakimov, A. V. (1975) Optimizatsiya protsessa shlifovaniya. Moskva: Mashinostroyeniye.
5. Altenbach, H., Altenbach, J., & Kissing, W. (2018). *Mechanics of Composite Structural Elements*. Singapore: Springer.
6. Bader, M. G. (2012) Handbook of composite reinforcements. *International Materials Reviews*. **39**, 3. 123–124.
7. Daniel, G. (2014) *Composite Materials: Design and Applications*. 3rd edition. Boca Raton : CRC Press.
8. Chawla, K. K. (2013). *Composite Materials: Science and Engineering*. Materials Research and Engineering. New York : Springer.
9. Christensen, R. M. (2012). *Mechanics of Composite Materials*. Dover Civil and Mechanical Engineering. Dover Publications.
10. Chou, T. W. (2005). *Microstructural Design of Fiber Composites*. Cambridge Solid State Science Series. Cambridge University Press.
11. Oborskiy, G. A., Dashchenko, A. F., Usov, A. V., & Dmitrishin, D. V. (2013). *Modelirovaniye sistem*. Odessa : Astroprint.
12. Balokhonov, R. R. (2006) *Poverkhnostnyye sloi i vnutrenniye granitsy razdelav geterogennykh materialakh : monografiya / Pod red. V. Ye. Panin*. Novosibirsk : Izd-vo SO RAN.

13. Попов, Г. YA. (1982). Kонтсентрати́я упругих напруги́х возле шта́мпов разрезов, тонких вклю́чений і подкреплени́х. Moskva : Nauka.
14. Kit, G.S. & Krivtsun, G. S. (1983). Ploskiye zadachi termouprugosti dlya tel s treshchinami. Kiev: Naukova dumka.
15. Yakimov, A. V., Slobodyanik, P. T., & Usov, A. V. (1991). Teplofizika mekhanicheskoy obrabotki. Kiyev–Odessa : Lybid'.

Усов Анато́лій Васи́льович – д. т. н., професор, завідувач кафедри вищої математики та моделювання систем Державного університету «Одеська політехніка», e-mail: usov\_a\_v@opu.ua, ORCID: 0000-0002-3965-7611.

Куніцин Макси́м Володи́мирович – к. т. н., старший викладач кафедри вищої математики та моделювання систем, Державного університету «Одеська політехніка», e-mail: m.v.kunitsyn@opu.ua ORCID: 0000-0003-1764-8922

Сікіраш Юлі́я Євге́ньєвна – асистент кафедри вищої математики та моделювання систем Державного університету «Одеська політехніка», e-mail: u.e.sikirash@opu.ua, ORCID: 0000-0003-0853-582X.

УДК 519.652

А. Н. ХОМЧЕНКО

Чорноморський національний університет ім. Петра Могили

О.І. ЛИТВИНЕНКО, С.О. КАРПОВА

Херсонська філія Національного університету кораблебудування ім. адм. Макарова

І.О. АСТІОНЕНКО

Херсонський національний технічний університет

## МОДЕЛІ КОНОЇДІВ ТА МЕТОД ПЕРЕРІЗІВ

Стаття присвячена дослідженню нових специфічних властивостей коноїдів – лінійчатих поверхонь Каталана (1843), які застосовуються в сучасному методі скінченних елементів (МСЕ). Коноїди з'явилися в МСЕ несподівано, коли у 1968 р. Ергатудіс, Айронс і Зенкевич сконструювали підбором перші серендипові скінченні елементи (СЕ): білінійний  $Q4$ , біквадратичний  $Q8$  і бікубічний  $Q12$ . Коноїди застосовуються у якості базисних функцій (функцій впливу) у всіх (без винятку) моделях стандартних серендипових СЕ, незважаючи на неприродні спектри еквівалентних вузлових навантажень (фізична неадекватність). Саме коноїди, які асоціюються з проміжними вузлами інтерполяції, спричинили появу від'ємних навантажень у кутових вузлах СЕ. Найавторитетніший фахівець проф. О. Зінкевич радив змиритися з цим недоліком. Позбутися фізичної неадекватності в кутових вузлах можна, якщо відмовитись від коноїдів в проміжних вузлах. Але такі серендипові СЕ вже належать до альтернативних моделей. Варто зауважити, що коноїди використовують не тільки в МСЕ. Технологічні та естетичні якості коноїдів давно приваблюють архітекторів і будівельників. Потрібно знайти такі коноїди, які забезпечують фізичну адекватність моделей. Треба звернути увагу на тригонометричні коноїди, які недостатньо досліджені. Попередні дослідження свідчать, що тіло, яке утворюється коноїдом і носієм, може бути сімпсоновим. Поповнення модельного ряду сімпсонових тіл – цікава самостійна задача. Але на коноїдах правило трьох перерізів (кубатура Сімпсона) не завжди дає правильну відповідь. Головне – правильно обчислити площу середнього перерізу правильно вибраної трійки перерізів. Ця задача має самостійне значення. Підібрані приклади коноїдів дають можливість порівняти прості і наочні підходи з процедурою Монте-Карло. Когнітивно-графічний аналіз – найкраща інформаційна технологія, особливо у поєднанні з комп'ютерними експериментами.

Ключові слова: коноїд; поліноміальний (стандарт) та тригонометричний (альтернатива), спектр вузлових навантажень на СЕ, фізична неадекватність стандартної моделі; площа перерізу коноїда, геометрична оцінка площі, статистична оцінка площі, напрямна коноїда, твірна коноїда.

А. Н. ХОМЧЕНКО

Чорноморский национальный университет им. Петра Могилы

Е.И. ЛИТВИНЕНКО, С.О. КАРПОВА

Херсонский филиал Национального университета кораблестроения им. адм. Макарова

И.А. АСТИОНЕНКО

Херсонский национальный технический университет

## МОДЕЛИ КОНОИДОВ И МЕТОД СЕЧЕНИЙ

Статья посвящена исследованию новых специфических свойств коноидов – линейчатых поверхностей Каталана (1843), которые применяются в современном методе конечных элементов (МКЭ). Коноиды появились в МКЭ неожиданно, когда в 1968 г. Эргатудис, Айронс и Зенкевич сконструировали подбором первые серендиповы конечные элементы (КЭ): билинейный  $Q4$ , биквадратичный  $Q8$  и бикубический  $Q12$ . Коноиды применяются в качестве базисных функций (функций влияния) во всех (без исключения) моделях стандартных серендиповых КЭ, несмотря на неестественные спектры эквивалентных узловых нагрузок (физическая неадекватность). Именно коноиды, которые ассоциируются с промежуточными узлами интерполяции, привели к появлению отрицательных нагрузок в угловых узлах КЭ. Самый авторитетный специалист проф. О. Зинкевич советовал смириться с этим недостатком. Избавиться физической неадекватности в угловых узлах можно, если отказаться от коноидов в промежуточных узлах. Но такие серендиповы КЭ уже принадлежат к альтернативным моделям. Стоит отметить, что коноиды используют не только в МКЭ. Технологические и эстетические свойства коноидов давно привлекают архитекторов и строителей. Необходимо найти такие коноиды, которые обеспечивают физическую адекватность моделей. Необходимо обратить

внимание на тригонометрические коноиды, которые недостаточно исследованы. Предыдущие исследования свидетельствуют, что тело, которое образуется коноидом и носителем, может быть симпсоновым. Пополнение модельного ряда симпсоновых тел – интересная самостоятельная задача. Но на коноидах правило трёх сечений (кубатура Симпсона) не всегда дает правильный ответ. Главное – правильно вычислить площадь среднего сечения правильно выбранной тройки сечений. Эта задача имеет самостоятельное значение. Подобранные примеры коноидов дают возможность сравнить простые и наглядные подходы с процедурой Монте-Карло. Когнитивно-графический анализ – наилучшая информационная технология, особенно в сочетании с компьютерными экспериментами.

Ключевые слова: коноид: полиномиальный (стандарт) и тригонометрический (альтернатива), спектр угловых нагрузок на КЭ, физическая неадекватность стандартной модели; площадь сечения коноида, геометрическая оценка площади, статистическая оценка площади. направляющая коноида, образующая коноида.

A. N. KHOMCHENKO

Petro Mohyla Black Sea National University

O.I. LYTUVYENKO, S.O. KARPOVA

Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Kherson branch

I.O. ASTIONENKO

Kherson National Technical University

## CONOID MODELS AND METHOD OF CROSS SECTIONS

*The article is devoted to the study of new specific properties of conoids - linear surfaces of Catalan (1843), which are used in the modern method of finite elements (MFE). Conoids appeared in the MFE unexpectedly when, in 1968, Ergatoudis, Irons, and Zienkiewicz constructed by selection the first serendipity finite elements (CEs): the bilinear Q4, the biquadratic Q8, and the bicubic Q12. Conoids are used as basic functions (influence functions) in all (without exception) models of standard serendipity FE, despite the unnatural spectra of equivalent nodal loads (physical inadequacy). It is the conoids, which are associated with the intermediate interpolation nodes, caused the negative loads in the angular nodes of the FE. The most authoritative specialist prof. O. Zienkiewicz advised to accept this flaw. It is possible to get rid of physical inadequacy in angular nodes if one refuses conoids in intermediate nodes. But such serendipity FEs belong to alternative models already. It should be noted that conoids are used not only in MFE. Technological and aesthetic qualities of conoids have long attracted architects and builders. It is necessary to find such conoids, which provide physical adequacy of models. Attention should be paid to trigonometric conoids, which are insufficiently studied. Previous studies show that the body formed by the conoid and the carrier may be Simpson one. Replenishment of the model range of Simpson bodies is an interesting independent task. However, the rule of three sections (Simpson's cubature) does not always give the correct answer on conoids. The main thing is to calculate properly the area of the middle cross-section of the correctly selected three cross-sections. This task has an independent meaning. Selected examples of conoids make it possible to compare simple and clear approaches with the Monte-Carlo procedure. Cognitive and graphical analysis is the best information technology, especially in combination with computer experiments.*

*Keywords: conoid, polynomial (standard) and trigonometric (alternative), spectrum of nodal loads on FE, physical inadequacy of standard model; area of conoid cross-section, geometric assessment of area, statistical assessment of area, conoid directing line, conoid generating line.*

### Постановка проблеми

Проблема заміни коноїдів з поліноміальними напрямними коноїдами з тригонометричними напрямними цікавить не тільки фахівців з МСЕ. Це новий підхід до задачі відновлення функцій двох аргументів, який певною мірою руйнує традиції матричної алгебри і алгебраїчних схем Паскаля. Зрозуміло, що інтерполяційна гіпотеза Лагранжа лишається, але в деяких місцях доводиться змінювати термінологію. В центрі нашої уваги буде квадрат  $Q8$  ( $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ ) та інтегральні характеристики його функцій впливу. Щоб позбутися від'ємних значень середньої аплікати “кутової” функції, треба навчитися регулювати середні значення аплікати “проміжної” функції. Фізична неадекватність зникає, коли середнє значення аплікати “проміжної” функції не перевищує 0,25. В стандартних серендипових СЕ ця вимога, як відомо, не виконується.

Прихильники механічних аналогій (учні і послідовники О. Зенкевича) припинили пошуки, а ми опинилися перед вибором: змиритися з фізичною неадекватністю серендипових моделей, або відмовитись від коноїдів. Академік Л. Мандельштам попереджав, що математична модель обов'язково помститься за ідеалізацію. Ми продовжуємо пошуки адекватних моделей, але готуємося до нових викликів.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Усі (без винятку) стандартні моделі серендипових СЕ використовують коноїди у якості базисних поверхонь [1-3]. На  $Q4$  усі базисні поверхні – коноїди, на  $Q8$  половина поверхонь – коноїди, на  $Q12$  із 12 поверхонь вісім коноїдів. Як відомо [4-5], стандартні бази реалізують фізично неадекватні спектри еквівалентних вузлових навантажень. Сьогодні існує багато нематричних методів моделювання фізично адекватних СЕ [6, 7]. Про один з таких методів йдеться в роботі [8]. Склалася думка, що фізичну адекватність серендипових СЕ можна забезпечити лише шляхом відмови від коноїдів. У цій роботі ми покажемо, що відмовлятися від коноїдів не обов'язково. Достатньо замінити поліноміальну напрямну тригонометричною. Дослідження свідчать, що переріз коноїда може суттєво відрізнятись від конічного перерізу, хоча ілюзія схожості існує. Для обчислення площі перерізу коноїда ми пропонуємо простий і наочний геометричний метод, який порівнюється з результатами процедури метода Монте-Карло. Звернутися до методу Монте-Карло надихає цікава стаття американського математика професора Каліфорнійського університету М. Шіллінга [9]. Користувачів завжди приваблювали простота, алгоритмічність і надійність метода. Дуже важлива нечутливість метода до конфігурації границь розрахункової області. Колишні недоліки метода Монте-Карло лишилися в минулому. Сучасні комп'ютери дуже швидко створюють надзвичайно велику кількість випадкових даних. Таким чином, сучасний метод Монте-Карло може бути гарантом точності обчислень, якщо реалізувати довгу серію спостережень (наприклад,  $10^6$ ).

### Мета дослідження

Мета дослідження – сконструювати на тригонометричних коноїдах математично обґрунтовані і фізично адекватні моделі  $Q8$ . Звернути увагу на геометричні аспекти фізичної неадекватності спектрів вузлових навантажень стандартних серендипових СЕ. За допомогою перерізів показати стереометричні особливості нових моделей.

### Викладення основного матеріалу дослідження

Ми розглядаємо модельний ряд коноїдів, які мають властивості базисних функцій інтерполяції і асоціюються із проміжними вузлами СЕ  $Q8$ . Носієм елемента є канонічний квадрат ( $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ ), контрольний вузол має координати  $(0, -1)$ . Вісім вузлів СЕ розташовані рівномірно на границі носія, включаючи кути [1-3]. На жаль, не всі коноїди забезпечують фізичну адекватність спектра еквівалентних вузлових навантажень. Інтегральна характеристика залежить від об'єму між поверхнею коноїда і площиною носія. Як тільки об'єм перевищує 1 куб. од., в “кутових” вузлах виникають від'ємні навантаження. Стандартний коноїд, отриманий підбором [1] і підтверджений матричним методом [2, 5] та нематричним методом [3], охоплює об'єм  $4/3$  куб. од. Якщо стискати коноїд вздовж  $Ox$ , об'єм  $V$  зменшується. Саме цю деформацію можна спостерігати на конкретних моделях:

модель 1	$f(x, y) = \frac{1}{2} \sqrt{\cos \frac{\pi x}{2}} \cdot (1 - y), \quad V > 1;$	
модель 2 (standard)	$f(x, y) = \frac{1}{2} (1 - x^2) \cdot (1 - y), \quad V > 1;$	
модель 3	$f(x, y) = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi x}{2} \cdot (1 - y), \quad V > 1;$	(1)
модель 4	$f(x, y) = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\pi x}{2} \cdot (1 - y), \quad V = 1;$	
модель 5	$f(x, y) = \frac{1}{2} \cos^4 \frac{\pi x}{2} \cdot (1 - y), \quad V = \frac{3}{4}.$	

Як бачимо, недостатньо замінити поліноміальну напрямну тригонометричною (моделі 1, 3), треба стиснути коноїд (моделі 4, 5). Зрозуміло, що зменшення  $V$  супроводжується зменшенням площі горизонтального перерізу, наприклад, на середньому рівні  $f(x, y) = 0,5$  (рис. 1, а). Саме середній переріз часто використовують при обчисленні об'єму (правило трьох перерізів Сімпсона). Криволінійна трапеція в горизонтальному перерізі коноїда заслуговує на увагу (рис. 1, б).

Зазначимо, що не завжди середній переріз реагує на зменшення об'єму тіла. У коноїдів (1) є такий нечутливий переріз  $x = 0$ . Якщо обчислювати об'єм коноїда за правилом Сімпсона, треба уважно перевіряти придатність (інформативність) перерізів. Неважко переконатися, що найбільш інформативним є горизонтальні перерізи коноїдів. На рис. 1, б зображено типовий приклад середнього перерізу коноїда.

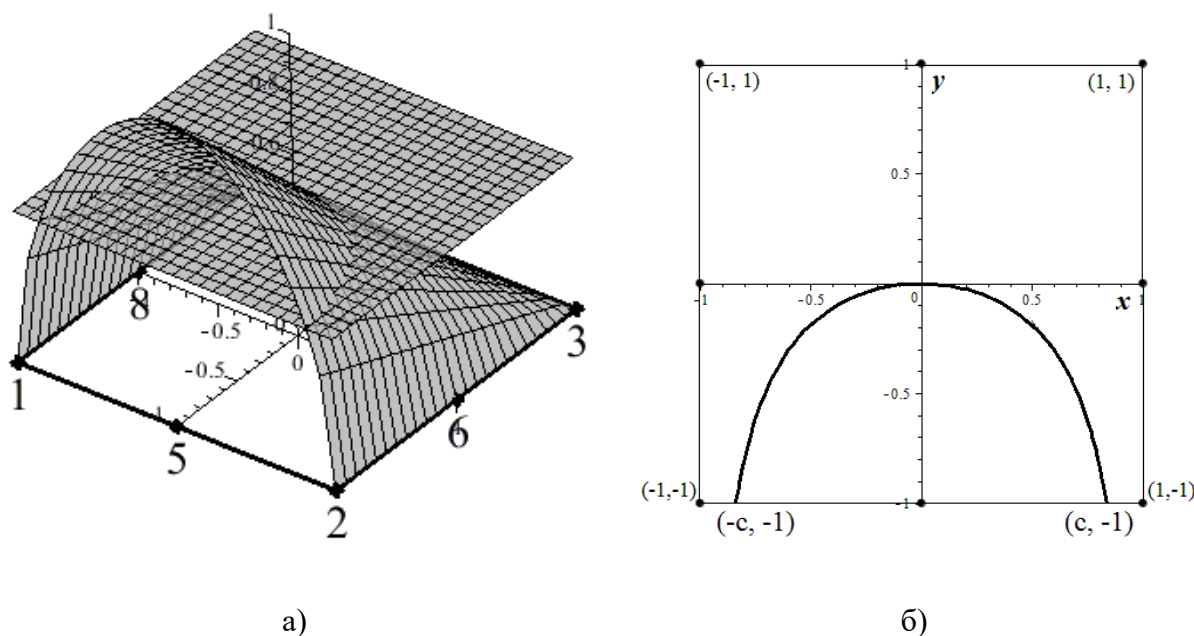


Рис. 1. Переріз коноїда (1) на рівні  $f(x, y) = 0,5$

На площу криволінійної трапеції впливає лише параметр  $c$ , який змінюється в залежності від моделі. Найбільше значення  $c = 0,84$  має модель 1, найменше значення  $c = 0,44$  має модель 5. На перший погляд задача обчислення площі криволінійної



трапеції здається зовсім простою, тому що контур нагадує фрагмент параболи або половину еліпса. Аналіз горизонтальних перерізів інших рівнів переконує, що коноїдні перерізи суттєво відрізняються від конічних перерізів. Вони мають більш складну конфігурацію. Це привід звернутися до експериментів метода Монте-Карло [9]. Порівняння з результатами метода Монте-Карло ( $10^6$  випадкових точок) показують, що в середньому перерізі парабола занижує результат, а еліпс завищує. Цікаво відшукати простий і наочний спосіб усереднення відхилень, який швидко і без комп'ютера наближає результати до експериментальних. Спочатку візьмемо просте правило Сімпсона (три вузли). Враховуючи, що із трьох вузлів (рис. 1, б) “працює” лише один (центральный), можна передбачити, що результат буде заниженим. Нагадаємо, що формула Сімпсона спирається на квадратичну параболу і має вигляд:

$$S_{cep} \approx 2c \left( \frac{1}{6} \cdot f(-c) + \frac{4}{6} \cdot f(0) + \frac{1}{6} \cdot f(c) \right). \quad (2)$$

Із (2) маємо просту формулу  $S_{cep} = \frac{4}{3}c$ , яка, на жаль, систематично занижує результат у порівнянні з процедурою Монте-Карло. Якщо виконати ретельно рис.2, то буде видно, що площа прямокутника з висотою  $2/3$  менша за площу криволінійної трапеції.

Тут потрібна квадратура з більш вагомим центральним вузлом. Таку квадратуру вдалося відшукати в [4]. Відповідну формулу використовував Коллатц для специфічного класу функцій. Формула Коллатца має вигляд:

$$S_{cep} \approx 2c \left( \frac{1}{12} \cdot f(-c) + \frac{5}{6} \cdot f(0) + \frac{1}{12} \cdot f(c) \right). \quad (3)$$

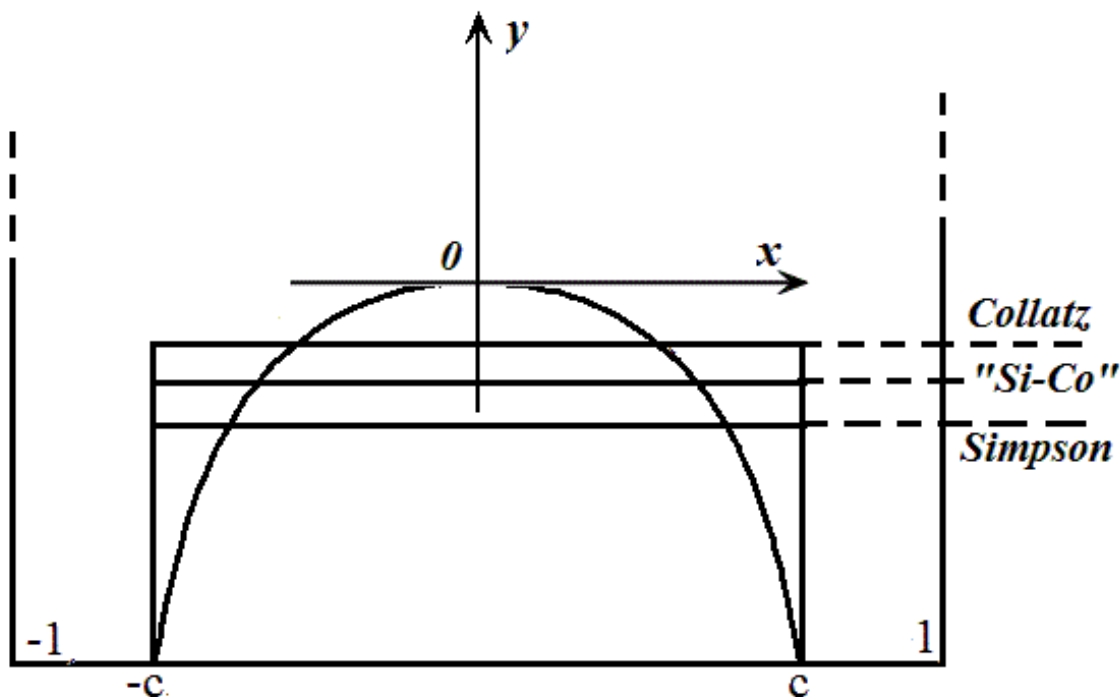


Рис. 2. Результати пошуку еквівалентного прямокутника "Si – Co"

Тепер  $S_{\text{сеп}} = \frac{5}{3}c$ . Виявляється, що формула (3) систематично завищує  $S_{\text{сеп}}$  коноїдів. Хто і як сконструював квадратуру Коллатца ми не знаємо, але переконалися, що її можна отримати із квадратури Гаусса-Лобатто (чотири вузли) шляхом об'єднання двох внутрішніх вузлів в один центральний. На рис. 2 площа прямокутника Коллатца з висотою  $5/6$  більша за площу криволінійної трапеції. Обставини підштовхують до арифметичного усереднення. Ми зробили усереднення квадратур Сімпсона і Коллатца і отримали гібридну квадратуру “Si – Ko” :

$$S_{\text{сеп}} \approx 2c \left( \frac{1}{8} \cdot f(-c) + \frac{3}{4} \cdot f(0) + \frac{1}{8} \cdot f(c) \right). \quad (4)$$

Тепер  $S_{\text{сеп}} = \frac{3}{2}c$ . Це краща оцінка площі середнього перерізу коноїда. На рис. 2 прямокутник “Si – Ko” і криволінійна трапеція еквівалентні.

Формула  $S_{\text{сеп}} = 1,5c$  викликає довіру, тому що її можна отримати різними способами. Наприклад, шляхом об'єднання двох внутрішніх вузлів квадратури Ньютона-Котеса (правило “3/8”) в один центральний, ми отримуємо (4). Інший спосіб полягає в арифметичному усередненні площ вписаного в криволінійну трапецію трикутника і описаного прямокутника. Тепер ми бачимо, що не варто було відмовлятися від формули площі половини еліпса  $S_{\text{сеп}} \approx \frac{1}{2} \pi \cdot c$  (рис. 1). Щоб наблизити завищений теоретичний результат до експериментального достатньо взяти  $\pi = 3$ . Лишається навести результати теорії і експериментів метода Монте-Карло (табл.1).

Табл. 1

Площа середнього перерізу		
Модель коноїда	Теорія	Експеримент
1	1,26	1,29
2	1,06	1,06
3	1,00	0,99
4	0,75	0,73
5	0,66	0,64

Вузлові навантаження, як завжди, обчислюються за формулами Ньютона-Котеса:

$$\gamma = \frac{1}{S} \iint_D f(x, y) dx dy, \quad \text{де } S - \text{площа носія.} \quad (5)$$

Обчислення за формулою (5) свідчать про те, що в кожному проміжному вузлі моделей 1-3 навантаження перевищує 0,25. Це означає, що в кутових вузлах виникає феномен “гравітаційного відштовхування” (парадокс Зенкевича [2]). Моделі 4 і 5 фізично адекватні. У моделі 4 одинична масова сила рівномірно розподілена між “проміжними” вузлами, а “кутові” вузли не навантажені. У моделі 5 кожний

“проміжний” вузол несе  $\frac{3}{16}$ , а кожний “кутовий” вузол  $\frac{1}{16}$  одиничної масової сили. До речі, “кутові” функції елемента  $Q8$  легко будуються за правилом Тейлора [3].

### Висновки

Бібліотека серендипових СЕ поповнилася новими моделями із фізично адекватними інтегральними характеристиками. Особливість нових моделей в тому, що в “проміжних” базисних поверхнях (коноїдах) замість “поліноміальних” напрямних вперше задіяні “тригонометричні” напрямні. Це іще один приклад “м’якого” математичного моделювання (за версією акад. В.І. Арнольда). На перспективу готується матеріал для тригонометричного конструювання “дугих” мод скінченного елемента  $Q9$ .

### Список використаної літератури

1. Ergatoudis I., Irons B.M., Zienkiewicz O. C. Curved isoperimetric “quadrilateral” elements for finite element analysis. *Internat. J. Solids Struct.* 1968, № 4. P. 31-42.
2. Zienkiewicz O. C. The Finite Element Method in Engineering Science. London: McGraw-Hill, 1971. 571 p.
3. Taylor R. L. On the Completeness of Shape Functions for Finite Element Analysis. *J. Num. Meth. Eng.* 1972. Vol. 4. № 1. P. 17–22.
4. Strang G., Fix G. J. An Analysis of the Finite Element Method. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc. 1973.
5. Norri D. H., de Vries G. An Introduction to Finite Element Analysis. London: Academic Press, 1978. 301 p.
6. Astionenko I.O., Litvinenko O.I., Osipova N.V., Tuluchenko G.Ya. and Khomchenko A.N.. Cognitive-graphic Method for Constructing of Hierarchical Form of Basic Functions of Biquadratic Finite Element. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences*. AIP Conference Proceedings report. 2016. V. 1773. P. 040002-1 – 040002-11. DOI: 10.1063/1.4964965.
7. Хомченко А.Н., Литвиненко О.І., Астіоненко І.О. Когнітивно-графічний аналіз ієрархічних базисів скінченних елементів: монографія. Херсон: ОЛДІ-плюс, 2019. 260 с.
8. Хомченко А.Н., Астіоненко І.А. Гауссова кривизна серендипових поверхностей или как прогнуть коноид. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2016, 3 (58). С. 444-447.
9. Шіллінг М. Ймовірність: від Монте-Карло до геометрії. *У світі математики*. 2000. Т. 6, вип. 3. С. 20-23.

### References

1. Ergatoudis, I., Irons, B.M. & Zienkiewicz, O. C. (1968). Curved isoperimetric “quadrilateral” elements for finite element analysis. *Internat. J. Solids Struct.* **4**, 31-42.
2. Zienkiewicz, O. C. (1971). The Finite Element Method in Engineering Science. London: McGraw-Hill.
3. Taylor, R. L. (1972). On the Completeness of Shape Functions for Finite Element Analysis. *J. Num. Meth. Eng.* **4**, 1, 17–22.
4. Strang, G., & Fix, G. J. (1973). An Analysis of the Finite Element Method. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
5. Norri, D. H. & de Vries, G. (1978). An Introduction to Finite Element Analysis. London: Academic Press.

6. Astionenko, I.O., Litvinenko, O.I., Osipova, N.V., Tuluchenko, G.Ya. & Khomchenko, A.N. (2016). Cognitive-graphic Method for Constructing of Hierarchical Form of Basic Functions of Biquadratic Finite Element. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences*. AIP Conference Proceedings report. **1773**, 040002-1 – 040002-11. DOI: 10.1063/1.4964965.
7. Khomchenko, A.N., Lytvynenko, O.I. & Astionenko, I.O. (2019). Kohnityvno-hrafichnyi analiz hierarkhichnykh bazysiv skinchennykh elementiv. Monohrafiia. Kherson: OLDI-plus.
8. Homchenko, A.N. & Astionenko, I.A. (2016). Gaussova krivizna serendipoviyh poverhnostey ili kak prognut konoid. *Visnyk Khersonskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu*. **3** (58), 444-447.
9. Shillinh, M. (2000). Ymovirnist: vid Monte-Karlo do heometrii. *U sviti matematyky*. **6**, 3, 20-23.

Хомченко Анатолій Никифорович – д.ф.-м.н., професор, професор кафедри інтелектуальних інформаційних систем Чорноморського національного університету ім. П. Могили, e-mail: [khan@chmnu.edu.ua](mailto:khan@chmnu.edu.ua), ORCID: 0000-0002-5053-388X.

Литвиненко Олена Іванівна – к.т.н., доцент, доцент кафедри інформаційних технологій та фізико-математичних дисциплін Херсонської філії Національного університету кораблебудування ім. адм. Макарова, e-mail: [mmkntu@gmail.com](mailto:mmkntu@gmail.com), ORCID: 0000-0001-9890-6959.

Карпова Світлана Олегівна – старший викладач кафедри інформаційних технологій та фізико-математичних дисциплін Херсонської філії Національного університету кораблебудування ім. адм. Макарова, e-mail: [sokarova@gmail.com](mailto:sokarova@gmail.com), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7208-3595>.

Астіоненко Ігор Олександрович – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри вищої математики і математичного моделювання Херсонського національного технічного університету, e-mail: [astia@ukr.net](mailto:astia@ukr.net), ORCID: 0000-0002-5831-6353.

УДК 539.3

Н.О. ЯРЕЦЬКА  
Хмельницький національний університет

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНОГО КІЛЬЦЕВОГО ШТАМПА ТА ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

*Стаття присвячена математичному моделюванню контактної взаємодії попередньо напруженого кільцевого штампa та пружного півпростору з початковими (залишковими) напруженнями. Представлено розв'язок для кільцевого пружного штампa, що враховує вплив початкових напружень. Задачу розв'язано у випадку рівних коренів визначального рівняння. Дослідження представлено в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій у рамках лінеаризованої теорії пружності при довільній структурі пружного потенціалу. Припускається, що початкові стани пружного кільцевого штампa та пружного півпростору однорідні та рівні. Дослідження проводиться в координатах початкового деформованого стану, які пов'язані з лагранжевими координатами (природного стану). Крім того, вплив кільцевого штампa викликає невеликі збурення відповідних величин основного напружено-деформованого стану. Також передбачається, що пружний кільцевий штамп та пружний півпростір виготовлені з різних ізотропних, трансверсально-ізотропних або композиційних матеріалів. Наведені загальні розв'язки основних диференціальних рівнянь лінеаризованої теорії пружності у випадку осесиметричної деформації для скінченної кільцевої області. У результаті, розв'язки поставленої задачі представлені у вигляді нескінченних рядів, коефіцієнти яких визначаються з нескінченної системи алгебраїчних рівнянь. Проведено дослідження впливу початкових (залишкових) напружень у півпросторі та кільцевому штампі на розподіл контактних характеристик в області контакту. У випадку рівних коренів та потенціалу Бартенєва-Хазановича наведено результати чисельного аналізу, що подані у вигляді графіків, які ілюструють достатньо значний вплив початкових напружень. Отже, вплив початкових напружень на напружено-деформований стан пружного кільцевого штампa, що втискається у пружний півпростір, полягає у тому, що: у випадку стиснення початкові напруження в півпросторі призводять до зменшення напружень у пружному штампі, а у випадку розтягу – до їх збільшення, а для переміщень – навпаки.*

*Ключові слова:* залишкові напруження, рівні корені, лінеаризована теорія пружності, потенціал Бартенєва-Хазановича, нестисливі тіла.

Н.А. ЯРЕЦКАЯ  
Хмельницький національний університет

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОГО КОЛЬЦЕВОГО ШТАМПА И УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

*Статья посвящена математическому моделированию контактного взаимодействия предварительно напряженного кольцевого штампа и упругого полупространства с начальными (остаточными) напряжениями. Представлено решение для кольцевого упругого штампа, учитывающее влияние начальных напряжений. Задача решена в случае равных корней определяющего уравнения. Исследование представлено в общем виде для теории больших начальных деформаций и двух вариантов теории малых начальных деформаций в рамках линеаризованной теории упругости при произвольной структуре упругого потенциала. Предполагается, что начальные состояния упругого кольцевого штампа и упругого полупространства однородные и равные. Исследование проведено в координатах начального деформированного состояния, которые связаны с лагранжевими координатами (естественного состояния). Кроме того, влияние кольцевого штампа вызывает небольшие возмущения соответствующих величин основного напряженно-деформированного состояния. Также предполагается, что упругий кольцевой штамп и упругое полупространство изготовлены из различных изотропных, трансверсально-изотропных или композиционных материалов. Приведены общие решения основных дифференциальных уравнений линеаризованной теории упругости в случае осесимметричной*

деформации для конечной кольцевой области. В результате, решения поставленной задачи представлены в виде бесконечных рядов, коэффициенты которых определяются с бесконечной системы алгебраических уравнений. Проведено исследование влияния начальных (остаточных) напряжений в полупространстве и кольцевом штампе на распределение контактных характеристик в области контакта. В случае равных корней и потенциала Бартенева-Хазановича приведены результаты численного анализа, представленные в виде графиков, иллюстрирующих достаточно значительное влияние начальных напряжений. Следовательно, влияние начальных напряжений на напряженно-деформированное состояние упругого кольцевого штампа, который вдавливается в упругое полупространство, заключается в том, что: в случае сжатия начальные напряжения в полупространстве приводят к уменьшению напряжений в упругом штампе, а в случае растяжения - к их увеличению, а для перемещений - наоборот.

Ключевые слова: остаточные напряжения, равные корни, линеаризованная теория упругости, потенциал Бартенева-Хазановича, несжимаемые тела.

N. O. YARETSKA  
Khmelnysky National University

### MATHEMATICAL MODELING OF CONTACT INTERACTION OF A PRE-STRESSED RING STAMP AND ELASTIC HALF-SPACE WITH INITIAL STRESSES

*The article is devoted to the mathematical modeling of the contact interaction of a pre-stressed annular die and an elastic half-space with initial (residual) stresses. The solution for annular elastic die is presented, which take into account the influence of initial stresses. The problem is solved in the case of equal roots of the defining equation. The study is presented in general for the theory of large initial deformations and two versions of the theory of small initial deformations in the framework of the linearized theory of elasticity for an arbitrary structure of the elastic potential. It is assumed that the initial states of the elastic annular die and the elastic half-space are homogeneous and equal. The study was carried out in the coordinates of the initial deformed state, which are associated with the Lagrangian coordinates (natural state). In addition, the effect of the annular die causes small perturbations of the corresponding values of the basic stress-strain state. It is also assumed that the elastic annular die and the elastic half-space are made of various isotropic, transversely isotropic, or composite materials. General solutions of the main differential equations of the linearized theory of elasticity in the case of axisymmetric deformation for a finite annular region are presented. As a result, the solutions to the problem posed are presented in the form of infinite series. The coefficients of this series are determined from an infinite system of algebraic equations. The study of the influence of the initial (residual) stresses in the half-space and the annular die on the distribution of contact characteristics in the contact area is carried out. In the case of equal roots and the Bartenev-Khazanovich's potential, the results of numerical analysis are presented. These results are presented in the form of graphs. They illustrate the rather significant influence of the initial stresses. Therefore, the effect of initial stresses on the stress-strain state of the elastic annular die, which is pressed into the elastic half-space, is that: in the case of compression, the initial stresses in the half-space lead to a decrease in stresses in the elastic die, and in the case of stretching - to their increase. But in the case of displacement is the opposite.*

*Key words: residual stresses, unequal roots, linearized theory of elasticity, Bartenev-Khazanovich's potential, incompressible bodies.*

#### Постановка проблеми

Дослідження та математичне моделювання процесів контактної взаємодії пружних тіл із врахуванням початкових (залишкових) напружень є частиною великої за обсягом та актуальної області механіки суцільних середовищ, що безперервно розвивається. Підтримкою цього слугує виступ академіка НАН України Л. Лобанова із доповіддю «Про виконання цільової програми наукових досліджень НАН України «Надійність і довговічність матеріалів, конструкцій, обладнання та споруд»» [1] від 09.12.2020 р.

Оскільки математичне моделювання фізичних та механічних процесів має достатньо вагомий вплив і дозволяє оптимізувати розрахунок витрат матеріалів, їх

економічну вартість, покращити експлуатаційні характеристики конструкцій та деталей машин, що додатково підкреслює важливість проведення досліджень з механіки твердого деформованого тіла.

Тому дана стаття присвячена дослідженню питання контактної взаємодії пружного кільцевого штампа на пружний півпростір з початковими (залишковими) напруженнями (без врахування сил тертя), які мають суттєвий вплив на контактні характеристики процесу [2].

### **Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Враховуючи актуальність дослідження наукових проблем з контактної взаємодії твердих деформованих тіл, а також невпинний розвиток у сучасному світі нових технологій, що стрімко розвиваються і вимагають залучення все складніших математичних розрахунків, кількість наукових публікацій, що охоплює висвітлення даного кола питань, також постійно зростає. Як наслідок, отримані результати із широкого кола питань, що представлені науковими працями [2–13]. Серед яких є ряд публікацій монографічного [3-6] та узагальнюючого [7-10] характеру, які повністю або частково пов'язані з тематикою даного дослідження.

Дослідження проведені в рамках лінеаризованої теорії пружності [4-5] для контактної взаємодії жорстких і пружних штампів із тілами з початковими напруженнями [8-9, 11 - 13].

Так, у статті [11] розглянуто розв'язок контактної задачі про тиск жорсткого кільцевого штампа на півпростір з початковими напруженнями. Вплив початкових напружень на вісесиметричну контактну взаємодію пружних кільцевого штампа та півпростору у випадку нерівних коренів визначального рівняння та потенціалу Трелоара представлено в роботі [12]. Також, числовий розв'язок контактних задач про тиск двох співвісних пружних циліндричних штампів на пружний шар, у якому є залишкові деформації та тиск одного попередньо напруженого циліндра на шар з початковими напруженнями розглянуто в статті [13].

Подібна контактна задача до даного випадку при відсутності початкових напружень (тобто у класичному випадку) розглянута в [6].

Проблема передачі навантаження від пружних стрингерів до несних елементів конструкції розглянуто у працях [8, 9].

А фундаментальні результати лінеаризованої теорії пружності, на яких оснований дослідження даної роботи, висвітлені у працях академіка НАН України професора О.М.Гузя [2,4,5,7], який зробив величезний внесок у розвиток сучасної теорії контактної взаємодії пружних тіл.

### **Мета дослідження**

Представити математичну модель, граничні умови та результати числового розв'язку задачі про контактну взаємодію пружного кільцевого штампа та пружного півпростору з початковими напруженнями в межах лінеаризованої теорії пружності без врахування сил тертя. Дослідження виконати у загальному вигляді для стислих і нестисливих тіл для теорії великих початкових деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу. Аналітичні результати представити для випадку рівних коренів визначального рівняння, а числові – для потенціалу Бартенєва-Хазановича. Зробити висновки про вплив початкових напружень на контактну взаємодію пружного кільцевого штампа та пружного півпростору з початковими напруженнями.

### Викладення основного матеріалу дослідження

У статті в рамках лінеаризованої теорії пружності досліджена статична контактна задача про тиск попередньо напруженого кільцевого штампа з плоскою основою на півпростір з початковими напруженнями без врахування сил тертя для випадку рівних коренів визначального рівняння [4, 5]. Дослідження виконано у загальному вигляді для стисливих та нестисливих тіл для теорії великих (кінцевих) початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу. Вважаємо, що початкові напружено-деформовані стани у штампі та півпросторі є однорідними та рівними. Величини, що відповідають пружному штампі, будемо записувати з верхнім індексом (1), а величини, які відносяться до попередньо напруженого півпростору – з верхнім індексом (2).

Нехай попередньо напружений кільцевий штамп скінченної висоти  $H$ , геометрична вісь симетрії якого співпадає з віссю  $y_3$  циліндричної системи координат  $(r, \theta, y_3)$  і направлена всередину пружного півпростору з початковими напруженнями. Причому, штамп тисне на півпростір з силою  $P$ . Величини  $R_1, R_2$  – відповідно внутрішній та зовнішній радіуси штампа. Вважаємо, що зовнішнє навантаження прикладене лише до вільного торця пружного штампа, під дією якого усі точки торця штампа переміщуються вздовж осі симетрії  $y_3$  на одну й ту ж величину  $\varepsilon$ . Будемо також вважати, що поверхні поза межею контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а на межі контакту переміщення та напруження – неперервні [12].

Для дослідження будемо використовувати координати початкового деформованого стану  $(y_1, y_2, y_3)$ , які пов'язані з лагранжевими координатами  $(x_1, x_2, x_3)$  співвідношеннями:  $y_i = \lambda_i x_i$ . Тут  $\lambda_i$  ( $i=1,2,3$ ) – коефіцієнти видовження, які визначають переміщення початкового стану. Причому, вісь  $y_3$  спрямована по нормалі до області контакту, а початкові напруження діють вздовж зони контакту.

Оскільки початковий деформований стан тіл є однорідним, зона контакту пружних тіл буде міститися у площині  $y_3 = const$ , а дія штампа викликатиме у півпросторі невелике збурення основного напруженого стану, для якого виконуються умови [12]:

$$S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0, \quad S_0^{33} = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3, \quad (1)$$

де  $S_0^{11}, S_0^{22}$  – компоненти симетричного тензора початкових напружень.

Враховуючи умови (1), розв'язок основних рівнянь у переміщеннях [4, 5, 12] для стисливих та нестисливих тіл представимо через функцію  $\chi$ , яка задовольняє рівняння

$$(\Delta_1 + \xi_2'^2 \partial^2 / \partial y_3^2)(\Delta_1 + \xi_3'^2 \partial^2 / \partial y_3^2)\chi = 0, \quad (2)$$

де  $\Delta_1 = \partial^2 / \partial r^2 + r^{-1} \partial / \partial r$ .

Як зазначалося вище, обмежимося випадком нерівних коренів ( $\xi_2'^2 \neq \xi_3'^2$ ) характеристичного рівняння (2).

У системі колових циліндричних координат  $(r, \theta, z_i)$ , де  $z_i = v_i^{-1} y_3$ ,  $v_i = \sqrt{n_i}$ , ( $i=1,2$ ),  $n_1 = \xi_2'^2$ ,  $n_2 = \xi_3'^2$  такій постановці відповідають граничні умови:

$$U_3^{(1)} = -\varepsilon, \quad Q_{3r}^{(1)} = 0 \quad (R_1 < r < R_2), \quad z_i = H v_i^{-1} \quad (i=1,2), \quad (3)$$

$$U_3^{(1)} = U_3^{(2)}; \quad \tilde{Q}_{33}^{(1)} = \tilde{Q}_{33}^{(2)}; \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad (R_1 < r < R_2), \quad z_i = 0 \quad (i=1,2), \quad (4)$$



$$\tilde{Q}_{33}^{(2)} = 0, \quad \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad (0 < r < R_1 \quad R_2 < r < \infty), \quad z_i = 0, \quad (i=1,2), \quad (5)$$

$$\tilde{Q}_{rr}^{(1)} = 0, \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = 0 \quad (0 \leq z_i \leq H\nu_i^{-1}), \quad r=R_1, \quad r=R_2. \quad (6)$$

Умова рівноваги, яка встановлює зв'язок між осіданням торця та рівнодійною навантаження  $P$ , має вигляд:

$$P = -2\pi \int_{R_1}^{R_2} r Q_{33}^{(2)}(0, r) dr. \quad (7)$$

Напружено-деформований стан у кільцевому штампі з початковими напруженнями визначимо, спираючись на лінеаризовані рівняння [4, 5]. Тоді загальний розв'язок для випадку рівних коренів визначального рівняння (2)  $\chi$  матиме вигляд

$$\begin{aligned} \chi = & \frac{\varepsilon \nu_1 z_1}{m_2 - 1} (1 + \nu_1 z_1) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( J_0(\alpha_k r) + \frac{J_1(\alpha_k r)}{Y_1(\alpha_k r)} Y_0(\alpha_k r) \right) \left[ \left( \tilde{E}_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) + \operatorname{ch}(\alpha_k z_1) \right) + \right. \\ & \left. + \nu_1 z_1 \left( \tilde{M}_k \operatorname{ch}(\alpha_k z_1) - \frac{\alpha_k (1 + m_1)}{\nu_1 (1 + m_2)} \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) \right) \right] F_k, \end{aligned} \quad (8)$$

де  $\alpha_k, \gamma_k$  – власні значення задачі (3) – (7),  $F_k$  – невідомі величини,  $J_\nu(x)$ ,  $I_\nu(x)$  – функції Бесселя дійсного та уявного аргументу,  $K_\nu(x)$  – функція Макдональда,  $Y_\nu(x)$  – функція Неймана, відповідно, значення  $m_1, m_2$  визначаються з [4],

$$\begin{aligned} \tilde{E}_k = & \frac{\alpha_k (1 + m_1) H}{\nu_1 (1 + m_2)} - \left[ H \operatorname{cth} \left( \frac{\alpha_k H}{\nu_1} \right) + \frac{\nu_1 (1 + m_2)}{\alpha_k (1 + m_1)} \right] \left[ \frac{\alpha_k (1 + m_1) H}{\nu_1 (1 + m_2)} + \left( \frac{1 + m_1}{1 + m_2} \right) \left[ \frac{1 - m_2}{m_1} - \frac{\alpha_k H}{\nu_1} \right] + \right. \\ & \left. + 1 \right] \operatorname{cth} \left( \frac{\alpha_k H}{\nu_1} \right) \left[ H \left( \operatorname{cth} \left( \frac{\alpha_k H}{\nu_1} \right) - 1 \right) + \frac{\nu_1 (1 + m_2)}{\alpha_k (1 + m_1)} + \frac{\nu_1 (1 - m_2)}{\alpha_k m_1} \right]^{-1}, \\ \tilde{M}_k = & \left\{ \frac{\alpha_k (1 + m_1) H}{\nu_1 (1 + m_2)} + \left[ \frac{1 + m_1}{1 + m_2} \right] \left[ \frac{1 - m_2}{m_1} - \frac{\alpha_k H}{\nu_1} \right] + 1 \right\} \operatorname{cth} \left( \frac{\alpha_k H}{\nu_1} \right) \times \\ & \times \left[ H \left( \operatorname{cth} \left( \frac{\alpha_k H}{\nu_1} \right) - 1 \right) + \frac{\nu_1 (1 + m_2)}{\alpha_k (1 + m_1)} + \frac{\nu_1 (1 - m_2)}{\alpha_k m_1} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Напружено-деформований стан у пружному кільцевому штампі з початковими напруженнями для стисливих та нестисливих тіл і рівних коренів (2), враховуючи граничні умови (3) – (7), представимо у вигляді

$$\begin{aligned} Q_{33}^{(1)} = & -C_{44} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^2}{\nu_1} \left( J_0(\alpha_k r) + \frac{J_1(\alpha_k r)}{Y_1(\alpha_k r)} Y_0(\alpha_k r) \right) \left( \alpha_k l_1 (1 + m_1) \left( \tilde{E}_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) + \operatorname{ch}(\alpha_k z_1) \right) + \right. \\ & \left. + \nu_1 (1 + m_2) \left( \tilde{M}_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) - \frac{\alpha_k (1 + m_1)}{\nu_1 (1 + m_2)} \operatorname{ch}(\alpha_k z_1) \right) \right) F_k, \end{aligned} \quad (9)$$

$$Q_{3r}^{(1)} = C_{44} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^2}{n_1} \left( J_0(\alpha_k r) + \frac{J_1(\alpha_k r)}{Y_1(\alpha_k r)} Y_0(\alpha_k r) \right) \left( \alpha_k (1+m_1) \left( \tilde{E}_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) + \operatorname{ch}(\alpha_k z_1) + \nu_1 z_1 \left( \tilde{M}_k \operatorname{ch}(\alpha_k z_1) - \frac{\alpha_k (1+m_1)}{\nu_1 (1+m_2)} \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) \right) \right) + \nu_1 (1+m_2) \left( \tilde{M}_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) - \frac{\alpha_k (1+m_1)}{\nu_1 (1+m_2)} \operatorname{ch}(\alpha_k z_1) \right) \right) F_k,$$

$$U_3^{(1)} = \frac{1}{\nu_1} \left\langle -\varepsilon \nu_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left( J_0(\alpha_k r) + \frac{J_1(\alpha_k r)}{Y_1(\alpha_k r)} Y_0(\alpha_k r) \right) \left( (1-m_2) \left( \tilde{M}_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) - \frac{\alpha_k (1+m_1)}{\nu_1 (1+m_2)} \operatorname{ch}(\alpha_k z_1) \right) - \frac{\alpha_k m_1}{\nu_1} \left( \tilde{E}_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) + \operatorname{ch}(\alpha_k z_1) + \nu_1 z_1 \left( \tilde{M}_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) - \frac{\alpha_k (1+m_1)}{\nu_1 (1+m_2)} \operatorname{ch}(\alpha_k z_1) \right) \right) \right) \right\rangle F_k,$$

$$U_r^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left( J_0(\alpha_k r) + \frac{J_1(\alpha_k r)}{Y_1(\alpha_k r)} Y_0(\alpha_k r) \right) \left( \left( \tilde{M}_k \operatorname{ch}(\alpha_k z_1) - \frac{\alpha_k (1+m_1)}{\nu_1 (1+m_2)} \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) \right) + \frac{\alpha_k}{\nu_1} \left( \tilde{E}_k \operatorname{ch}(\alpha_k z_1) + \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) + \nu_1 z_1 \left( \tilde{M}_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) - \frac{\alpha_k (1+m_1)}{\nu_1 (1+m_2)} \operatorname{ch}(\alpha_k z_1) \right) \right) \right) F_k.$$

Напружено-деформований стан у попередньо напруженому півпросторі для рівних коренів, з врахуванням (3) – (7) та  $z_1 = 0$ , представимо у вигляді [12]:

$$Q_{33}^{(2)} = \frac{\omega_3}{R_2 - R_1} \int_0^{\infty} F(\eta) J_0(\eta r) d\eta, \quad U_3^{(2)} = -\frac{1}{\omega_2} \int_0^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta r) d\eta, \quad U_r^{(2)} = \omega_1 \int_0^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta} J_1(\eta r) d\eta, \quad (10)$$

де,  $\omega_3 = c_{44} l_1 (1+m_1)(s-s_0)$ ,  $\omega_2 = \nu_1 (m_1 (s_3 - s_2))^{-1}$ ,  $\omega_1 = s_0 - 1$ ,  $s = s_0 l_2 l_1^{-1}$ ,  $s_2 = m_2 \nu_1 (m_1 \nu_2)^{-1}$ ,  $s_3 = (1+m_2) \nu_1 ((1+m_1) \nu_2)^{-1}$ ,  $F(\eta)$  – невідома функція,  $D_{44}, C_{44}, l_1, l_2, m_1, m_2, s_0$  визначаються з [4].

Використовуючи розв’язок для штампа (8) та задовольняючи другій умові (3), другій умові (6), знаходимо власні значення задачі (3) – (7) для  $n_1 = n_2$ :

$$\alpha_k = \frac{\mu_k R_2}{R_1} \quad (J_1(\mu_k) Y_1(\mu_k R_2 R_1^{-1}) - Y_1(\mu_k) J_1(\mu_k R_2 R_1^{-1}) = 0).$$

Також, задовольнивши першу умову (4), визначимо невідому функцію  $F(\eta)$  для (10) з потрібних інтегральних рівнянь:

$$\int_0^{\infty} F(\eta) J_0(\eta r) d\eta = 0 \quad (R_2 < r < \infty),$$

$$\int_0^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta r) d\eta = f(r) \quad (R_1 < r < R_2), \quad (11)$$

$$\int_0^{\infty} F(\eta) J_0(\eta r) d\eta = 0 \quad (0 < r < R_1),$$

$$\text{де } f(r) = \frac{\omega_2}{n_1} \left\{ \varepsilon n_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \left( J_0(\alpha_k r) + \frac{J_1(\alpha_k r)}{Y_1(\alpha_k r)} Y_0(\alpha_k r) \right) \left( \frac{(m_2 - 1)(1+m_1)}{(1+m_2)} - m_1 \right) F_k \right\}.$$

Спираючись на викладки [10, 12], інтегральні рівняння (11) зводимо до одного, використовуючи розривну функцію [10, 12]. А  $F(\eta)$  будемо шукати у вигляді [10]:

$$F(\eta) = R_2 \sum_{n=0}^{\infty} W_{2n} J_{2n}(0.5\eta(R_2 - R_1)) J_{2n}(0.5\eta(R_2 + R_1)), \quad (12)$$

де  $W_{2n}$  – невідомі константи.

Підставимо (12) у (11), отримаємо одне інтегральне рівняння

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_{2n} \int_0^{\infty} J_{2n}(0.5\eta(R_2 - R_1)) J_{2n}(0.5\eta(R_2 + R_1)) J_0(\eta r) d\eta = f(r). \quad (13)$$

Опустивши деякі перетворення [12] та проінтегрувавши (13) по  $r$ , задовольнивши при цьому другу граничну умову (4), одержимо:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} W_{2n} \int_0^{\infty} J_{2n}(0.5\eta(R_2 - R_1)) J_{2n}(0.5\eta(R_2 + R_1)) \int_{R_1}^{R_2} r J_0(\mu_k r) J_0(\eta r) dr d\eta = \\ & = \frac{C_{44}(R_1 - R_2)}{\omega_3} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \theta_{11} \left( G_J(\mu_k, \mu_n) + \frac{J_1(\alpha_k R_1)}{Y_1(\alpha_k R_1)} G_Y(\mu_k, \mu_n) \right) F_k, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{де } G_J(\mu_k, \mu_n) = \int_{R_1}^{R_2} r J_0(\mu_n r) J_0(\mu_k r) dr, \quad G_Y(\mu_k, \mu_n) = \int_{R_1}^{R_2} r J_0(\mu_n r) Y_0(\mu_k r) dr.$$

Для визначення сталих  $F_i$ ,  $W_{2i}$  ( $i=0,1,2,\dots$ ), які входять до (9) – (11), отримаємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь, що складається із (14) та (13). Після визначення яких, обчислюємо переміщення та напруження як у пружному кільцевому штампі, так і у пружному півпросторі з початковими напруженнями за формулами (9) – (10). В результаті, розв’язок отримуємо у вигляді рядів через нескінченну систему констант, що визначаються методом редукції із нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Для апробації дослідження було проведені числові розрахунки для потенціалу Бартенсва-Хазановича при наступних значеннях параметрів:  $R_1 = 2 \cdot 10^{-2}$  м,  $R_2 = 3 \cdot 10^{-2}$  м,  $\varepsilon = 10^{-5}$ ,  $E = 8 \cdot 10^5$  МПа,  $\lambda_1 = 0.7; 0.8; 0.9; 1; 1.1; 1.2$ , де  $R_1 \leq r \leq R_2$ . Алгоритм розв’язку реалізовано у вигляді програми у пакеті Maple 15.

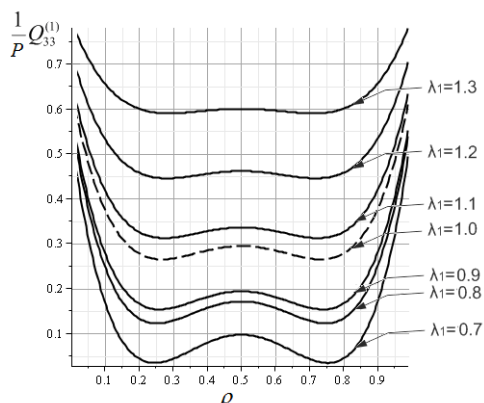


Рис. 1. Контактні напруження для потенціалу Бартенсва-Хазановича

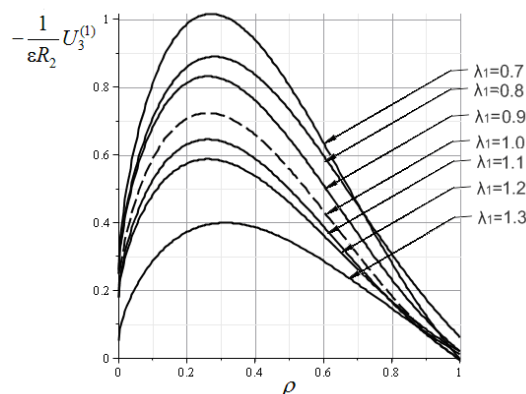


Рис. 2. Контактні переміщення для потенціалу Бартенсва-Хазановича

На рис. 1, 2 у безрозмірних координатах представлені розподіли нормального контактного напруження  $P^{-1}Q_{33}^{(1)}$  та переміщення  $-(\varepsilon R_2)^{-1}U_3^{(1)}$  під кільцевим штампом на межі контакту. Пунктирна крива відповідає півпростору без початкових напружень ( $\lambda_1=1$ ), а суцільна – з початковими напруженнями.

### Висновки

Отже, враховуючи проведене математичне моделювання та дослідження процесу контактної взаємодії пружного кільцевого штампа на півпростір з початковими напруженнями, був виявлений достатньо суттєвий вплив початкових напружень на контактні характеристики розподілу зусиль. Причому, у випадку відсутності початкових напружень ( $\lambda_1=1$ ) графіки розподілів контактних напружень та переміщень відповідають відомим раніше розв'язкам задачі про тиск кільцевого штампа на півпростір [6]. Тому, отримані результати з урахуванням попередньо напруженого стану при контактній взаємодії тіл можуть бути використані для регулювання контактних напружень і переміщень при розрахунках конструкцій на міцність, що безпосередньо впливатиме на їх економічну складову.

### Список використаної літератури

1. Національна академія наук України: Повідомлення НАН України. URL: <http://www.nas.gov.ua/UA/Messages/Pages/View.aspx?MessageID=7263>.
2. Guz A. N., Vagno A. M. Influence of Prestresses on Normal Waves in an Elastic Compressible Half-Space Interacting with a Layer of a Compressible Ideal Fluid. *International Applied Mechanics*. 2019. Vol. 55. No 6. P. 585–595.
3. Ярецька Н.О. Математична модель передачі навантаження від попередньо напруженого циліндричного штампа до пружного шару з початковими напруженнями. *Physical and mathematical justification of scientific achievements: collective monograph*. Boston : Primedia eLaunch, 2020. P. 60–80. <https://doi.org/10.46299/ISG.2020.MONO.PHYSICAL.III>
4. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. Германия : Saarbrücken LAPLAMBERT Academic Publishing, 2015. 468 с.
5. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Рудницький В.Б. Контактное взаимодействие упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. *Развитие идей Л. А. Галина в механике* : сб. науч. труд к столетию со дня рождения ученого / отв. ред. И. Г. Горячева. Москва-Ижевск : Ин-т компьютер. исслед. 2013. С. 188–244.
6. Грилицкий Д.В., Кизыма Я.М. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости. Львов: Вища школа, 1981. 136 с.
7. Guz A. N. Nonclassical Problems of Fracture/Failure Mechanics: On the Occasion of the 50th Anniversary of Research (Review). III. *International Applied Mechanics*. 2019. Vol. 55. No 4. P. 343–415.
8. Babich. S. Yu., Dikhtyaruk N. N. Load transfer from an infinite inhomogeneous stringer to an elastic strip clamped by one face with initial stresses. *International Applied Mechanics*. 2020. Vol. 56. No 6. P. 346–356.
9. Babich. S. Yu., Dikhtyaruk N. N., Degtyar S. V. Contact Problem for Two Identical Strips Reinforced by Periodically Arranged Fasteners with Initial Stresses. *International Applied Mechanics*. 2019. Vol. 55. No 6. P. 629–635.
10. Босаков С. В. Две контактные задачи о вдавлении кольцевого штампа в упругое полупространство. *Наука и техника*. 2018. № 6(17). С. 458–464. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2018-17-6-458-464>.

11. Yaretskaya N. F. Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *Int. Appl. Mech. Rew.* 2018. Vol. 54. No 5. P. 539–543. <https://doi.org/10.1007/s10778-018-0906-y>
12. Бабич С.Ю., Ярецька Н.О. Контактна взаємодія попередньо напружених кільцевого штампу і півпростору. *Доповіді НАН України.* 2020. № 11. С. 24–30 <https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.11.024>
13. Рудницький В.Б., Ярецька Н.О., Венгер В.О. Застосування ІТ технологій в механіці деформованого твердого тіла. *Проблеми трибології (Problems of Tribology).* 2017. № 2(84). С. 32–40.

#### References

1. Natsionalna akademiia nauk Ukrainy: Povidomlennia NAN Ukrainy. URL:<http://www.nas.gov.ua/UA/Messages/Pages/View.aspx?MessageID=7263>
2. Guz, A. N. , & Bagno A. M. (2019). Influence of Prestresses on Normal Waves in an Elastic Compressible Half-Space Interacting with a Layer of a Compressible Ideal Fluid. *International Applied Mechanics.* **55**(6), 585–595.
3. Yaretska, N.O. (2020). Matematychna model peredachi navantazhennia vid poperedno napruzhenoho tsylindrychnoho shtampa do pruzhnoho sharu z pochatkovymy napruzheniamy. *Physical and mathematical justification of scientific achievements: collective monograph.* International Science Group.
4. Guz, A.N., Babich, S.Yu., & Glukhov, Yu.P. (2015). Smeshannyye zadachi dlya uprugogo osnovaniya s nachalnymi napryazheniyami. Germaniya: Saarbrücken LAPLAMBERT Academic Publishing.
5. Guz, A.N., Babich, S.Yu., & Rudnitskiy, V.B. (2013). Kontaktnoe vzaimodeystvie uprugih tel s nachalnymi (ostatochnymi) napryazheniyami. *Razvitie idey L. A. Galina v mehanike* : sb. nauch. trudov k stoletiyu so dnya rozhdeniya uchenogo / otv. red. I. G. Goryacheva. Moskva Izhevsk : In-t komp'yuter. issled. pp. 188–244.
6. Grilitskiy, D.V., & Kizyima, Ya.M. (1981). Osesimmetrichnyie kontaknyie zadachi teorii uprugosti i termouprugosti. Lvov: Vischa shkola.
7. Guz, A. N. (2019). Nonclassical Problems of Fracture/Failure Mechanics: On the Occasion of the 50th Anniversary of Research (Review). *III. International Applied Mechanics.* **55**(4), 343–415.
8. Babich, S. Yu., & Dikhtyaruk, N. N. (2020). Load transfer from an infinite inhomogeneous stringer to an elastic strip clamped by one face with initial stresses. *International Applied Mechanics.* **56**(6). 346–356.
9. Babich, S. Yu., Dikhtyaruk, N. N., & Degtyar S. V. (2019). Contact Problem for Two Identical Strips Reinforced by Periodically Arranged Fasteners with Initial Stresses. *International Applied Mechanics.* **55**(6), 629–635.
10. Bosakov, S. V. (2018). Dve kontaknyie zadachi o vdavlivanii koltsevoogo shtampa v uprugoe poluprostranstvo. *Nauka i tehnika.* **6**(17), 458–464.
11. Yaretskaya, N. A. (2018). Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *Int. Appl. Mech. Rew.* **54**(5), 539–543.
12. Babych, S.Yu., & Yaretska N.O. (2020). Kontaktna vzaiemodiia poperedno napruzhenykh kiltsevoogo shtampu i pivprostoru. *Dopovidi NAN Ukrainy.* **11**, 24–30.
13. Rudnytskyi, V.B., Yaretska, N.O., & Venher, V.O. (2017). Zastosuvannia IT tekhnolohii v mekhanitsi deformovanoho tverdoho tila. *Problems of Tribology.* **2**(84). 32–40.

Ярецька Наталія Олександрівна – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань Хмельницького національного університету, e-mail: [massacran2@ukr.net](mailto:massacran2@ukr.net), ORCID: 0000-0002-3726

**ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ СТАТТІ  
до наукового журналу  
«Прикладні питання математичного моделювання»**

**Параметри файлу:**

**Рукопис** повинен бути підготовлений за допомогою Microsoft Word-2003/2016; **формат сторінки** – А4, **орієнтація сторінки** – "книжкова"; **границі**: ліва – 2,5 см; права – 2,5 см; верхня – 2,5 см; нижня – 2,5 см; **інтервал між рядками** – 1,0; **інтервал між абзацами** "до", "після" – 0 пт.; **відступи** "ліворуч", "праворуч" – 0 пт.; **відступ першого рядка** – 1,25 см.

**Обов'язкові елементи статті:**

**УВАГА!** Блок «Відомості про авторів», «Назва статті», «Анотація» та «Перелік ключових слів» подається ТРЬОМА мовами (українською, англійською, російською) послідовно з однаковим форматкуванням.  
Перша анотація подається мовою статті.  
Текст анотацій всіма трьома мовами має бути ідентичний.  
Розмір кожної анотації не менше 1800 знаків без пробілів.

- **індекс УДК** у верхньому лівому куті сторінки (Times New Roman, 12 пт.), **вказується один раз**;
- **ініціали і прізвище автора (авторів)** великими літерами (Times New Roman, 12 пт., вирівнювання – по правому краю) (на англійську ПІБ авторів перекладається з української мови);
- **повна назва організації**, де працює автор (Times New Roman, 10 пт., по правому краю);
- *пустий рядок* (Times New Roman, 12 пт.);
- **назва статті** великими літерами, по центру (Times New Roman, 12 пт., жирний);
- *пустий рядок* (Times New Roman, 12 пт.);
- **анотація** (Times New Roman, 12 пт., курсив);
- **перелік ключових слів**, який починається зі слів: "Ключові слова:" (або "Ключевые слова:", "Keywords:") (Times New Roman, 12 пт., курсив);
- *пустий рядок* (Times New Roman, 12 пт.).

**Викладення основного матеріалу дослідження**

Основний текст статті (Times New Roman, 12 пт.), який, у відповідності до вимог МОН України, **обов'язково** повинен містити такі виділені елементи:

- Постановка проблеми;
- Аналіз останніх досліджень і публікацій;
- Мета дослідження;
- Викладення основного матеріалу дослідження;
- Висновки;
- Список використаної літератури;
- References.
- **інформацію про авторів (див. Зразок оформлення статті).**

**Додаткові вимоги до елементів статті:**

- **Рисунки**: підписи під рисунками – Times New Roman, 10 пт., жирний;
- **Формули**: для набору використовувати редактор формул Microsoft Equation 3.0 або MathType; формули по центру; нумерація формул – по правому краю;  
*Розміри формул за замовчуванням*: звичайний символ – 12 пт; великий індекс – 7 пт; маленький індекс – 5 пт; великий символ – 18 пт; маленький символ – 12 пт.
- **Програми**: для набору фрагментів використовувати шрифти Courier New (Courier);
- **Список літератури**: оформлюється у відповідності до вимог ДСТУ 8302:2015 "Інформація та документація. Бібліографічне посилання. Загальні вимоги та правила складання"; (<http://lib.pu.if.ua/files/dstu-8302-2015.pdf>);
- **References**: оформлюються за правилами транслітерації англійською мовою з української/російської мов.

Для транслітерації пропонуємо скористатися наступними ресурсами:

- транслітерація з російської мови: <http://translate.meta.ua/ru/translit/>
- транслітерація з української мови: <http://ukrlit.org/transliteratsiia>

## **ЗРАЗОК ОФОРМЛЕННЯ СТАТТІ**

(Зразок складено з уривків окремих публікацій, автори є вигаданими особами)

УДК XXX.XX

В.В. КРАВЧЕНКО, С.В. ОНОПЕНКО  
Херсонський національний технічний університет  
О.І. КОВАЛЕНКО  
Херсонський державний університет

### **ВЛАСТИВОСТІ ПРОЦЕДУРИ ПОБУДОВИ РОЗКЛАДУ**

*Розглянуті властивості процедури побудови розкладу, яка формалізує картковий метод ручної побудови розкладу. У загальній постановці вона є процесом упорядкування деякої скінченної множини подій в часі за умов ресурсних та інших обмежень...*

*Ключові слова: процедура побудови розкладу, картковий метод...*

В.В. КРАВЧЕНКО, С.В. ОНОПЕНКО  
Херсонский национальный технический университет  
А.И. КОВАЛЕНКО  
Херсонский государственный университет

### **СВОЙСТВА ПРОЦЕДУРЫ ПОСТРОЕНИЯ РАСПИСАНИЯ**

*Рассмотрены свойства процедуры построения расписания, которая формализует карточный метод ручного составления расписаний. В общей постановке она является процессом упорядочивания некоторого конечного множества событий во времени в условиях ресурсных и других ограничений ...*

*Ключевые слова: процедура построения расписания, карточный метод...*

V.V. KRAVCHENKO, S.V. ONOPENKO  
Kherson National Technical University  
O.I. KOVALENKO  
Kherson State University

### **THE PROPERTIES OF SCHEDULE CONSTRUCTION PROCEDURE**

*The properties of the schedule construction procedure, which formalizes the card method for manual scheduling, are considered. In the general formulation it is a process of ordering a certain finite set of events in time under resource and other constraints ...*

*Keywords: the schedule construction procedure, card method...*

### **Постановка проблеми**

Задача складання розкладу є однією з найбільш розповсюджених задач, які вирішує кожна людина практично кожний день. У загальній постановці вона є процесом упорядкування деякої скінченної множини подій в часі за умов ресурсних та інших обмежень.

### **Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Аналіз існуючих методів розв'язання задачі складання розкладу занять показує, що розв'язання задач теорії розкладів має відому складність. За змістом ці задачі відносяться до класу комбінаторних, для яких суттєве значення має розмірність...

### Мета дослідження

Метою даного дослідження є автоматизація складання розкладу занять для системи дистанційного навчання з врахуванням завантаженості викладацького складу. Якість навчання, його економічна ефективність, зручність навчання студентів і роботи професорсько-викладацького складу залежить від вдало складеного розкладу.

...

### Висновки

Під час виконання роботи було розроблено власний математичний метод для складання розкладу, а саме було визначено ряд обмежень, які враховуються при складанні розкладу, створено цільову функцію для оцінки придатності ...

### Список використаної літератури

1. Мокін Б. І., Мокін В. Б., Мокін О. Б. Математичні методи ідентифікації динамічних систем. Вінниця : ВНТУ, 2010. 260 с.
2. Квасниця Г., Шинкаренко Г. Адаптивні апроксимації методу скінченних елементів для задач еластостатики. *Вісник Львівського університету. Серія: Прикладна математика та інформатика*. 2002. Вип. 5. С. 95–106.
3. Тимофієва Н. К. Один спосіб моделювання інтелекту людини з використанням комбінаторного аналізу. *Інтелектуальні системи прийняття рішень та проблеми обчислювального інтелекту. (ISDMCI'2014): матеріали X Міжнародної наукової конференції (Залізний Порт, 1923 травня 2014 р.)*. Херсон, 2014. С. 180-182.
4. Тимофієва Н. К. Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації: автореф. дис... д-ра. техн. наук. Київ, 2007. 32 с.

### References

1. Mokin, B. I., Mokin, V. B., & Mokin, O. B. (2010). Matematychni metody identyfikatsii dynamichnykh system. Vinnytsia: VNTU.
2. Kvasnytsia, H., & Shynkarenko, H. (2002). Adaptivni aproksymatsii metodu skinchennykh elementiv dlia zadach elastostatyky. *Visnyk Lvivskoho universytetu. Seria: Prykladna matematyka ta informatyka*. 5, 95–106.
3. Tymofiieva, N. K. (2014) Odyn sposib modeliuвання intelektu liudyny z vykorystanniam kombinatornoho analiz. Proceedings of the *Intelektualni systemy pryiniattia rishen ta problemy obchysliuvalnoho intelektu. (ISDMCI'2014) : materialy X Mizhnarodnoi naukovoї konferentsii*. (Ukraine, Zaliznyi Port, May 28-31, 2014), Kherson, pp. 180–182.
4. Tymofiieva, N. K. (2007). Teoretyko-chyslovi metody rozv'iazannia zadach kombinatornoi optymizatsii. (Extended abstract of Doctor's thesis), Kyiv: In-t kibernetiky im. V.M. Hlushkova NAN Ukrainy.

Кравченко Віктор Вікторович – д.ф.-м.н., професор, професор кафедри математичного моделювання Херсонського національного технічного університету, e-mail: [kravchenko@gmail.com](mailto:kravchenko@gmail.com), ORCID: 0000-0002-4107-8141.

Онопенко Сергій Васильович – аспірант кафедри технічної кібернетики Херсонського національного технічного університету, e-mail: [onopenko@ukr.net](mailto:onopenko@ukr.net), ORCID: 0000-0002-5196-5301.

Коваленко Олександр Іванович – к.т.н., доцент, доцент кафедри інформатики Херсонського державного університету, e-mail: [kovalenko@i.ua](mailto:kovalenko@i.ua), ORCID: 0000-0002-6196-540.



**ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЬИ**  
**для научного журнала**  
**«Прикладные вопросы математического моделирования»**

**Параметры файла:**

**Рукопись** должна быть подготовлена за помощью Microsoft Word-2003/2016; **формат страницы** – А4, **ориентация страницы** – "книжная"; **границы:** левая – 2,5 см; правая – 2,5 см; верхняя – 2,5 см; нижняя – 2,5 см; **интервал между строками** – 1,0; **интервал между абзацами** "до", "после" – 0 пт.; **отступы** "слева", "справа" – 0 пт.; **отступ первой строки** – 1,25 см.

**Обязательные элементы статьи:**

Внимание! Блок «Сведения об авторах», «Название статьи», «Аннотация» и «Список ключевых слов» представляется на ТРЕХ языках (украинском, английском, русском) последовательно с одинаковым форматированием.  
Первая аннотация дается на языке статьи.  
Текст аннотаций на всех трех языках должен быть идентичным.  
Размер каждой аннотации – не меньше 1800 знаков без пробелов.

- **индекс УДК** в верхнем левом углу страницы (Times New Roman, 12 пт.), **указывается один раз**;
- **инициалы и фамилия автора (авторов)** большими буквами на языке статьи (Times New Roman, 12 пт., выравнивание – по правому краю) (на английский язык ФИО авторов переводится с украинского языка);
- **полное название организации**, где работает автор (Times New Roman, 10 пт., по правому краю);
- *пустая строка* (Times New Roman, 12 пт.);
- **название статьи** большими буквами, по центру (Times New Roman, 12 пт., жирный);
- *пустая строка* (Times New Roman, 12 пт.);
- **аннотация** (Times New Roman, 12 пт., курсив);
- **список ключевых слов**, который начинается со слов: "Ключевые слова:" (или "Ключові слова:") (Times New Roman, 12 пт., курсив);
- *пустая строка* (Times New Roman, 12 пт.);

**Изложение основного материала исследования**

Основной текст статьи (Times New Roman, 12 пт.), который, согласно требований МОН Украины, **обязательно** должен содержать такие выделенные элементы:

- Постановка проблемы;
- Анализ последних исследований и публикаций;
- Цель исследования;
- Изложение основного материала исследования;
- Выводы;
- Список использованной литературы;
- References.
- **информацию об авторах (см. Образец оформления статьи).**

**Дополнительные требования к элементам статьи:**

- **Рисунки:** подписи под рисунками – Times New Roman, 10 пт., жирный;
- **Формулы:** для набора использовать редактор формул Microsoft Equation 3.0 или MathType; формулы по центру; нумерация формул – по правому краю;  
*Размеры по умолчанию: обычный символ – 12 пт; большой индекс – 7 пт; маленький индекс – 5 пт; большой символ – 18 пт; маленький символ – 12 пт.*
- **Программы:** для набора фрагментов использовать шрифты Courier New (Courier);
- **Список литературы:** оформляется согласно требований ДСТУ 8302:2015 "Информация и документация. Библиографические ссылки. Общие требования и правила составления"; (<http://lib.pu.if.ua/files/dstu-8302-2015.pdf>)
- **References:** оформляются по правилам транслитерации с украинского/русского языка на английский язык.
  - Для транслитерации предлагаем воспользоваться такими ресурсами:
  - транслитерация с русского языка: <http://translate.meta.ua/ru/translit/>
  - транслитерация с украинского языка: <http://ukrlit.org/transliteratsiia>

## **ОБРАЗЕЦ ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЬИ**

(Образец составлен из отрывков разных публикаций, авторы являются вымышленными личностями)

УДК XXX.XX

В.В. КРАВЧЕНКО, С.В. ОНОПЕНКО  
Херсонский национальный технический университет  
А.И. КОВАЛЕНКО  
Херсонский государственный университет

### **СВОЙСТВА ПРОЦЕДУРЫ ПОСТРОЕНИЯ РАСПИСАНИЯ**

*Рассмотрены свойства процедуры построения расписания, которая формализует карточный метод ручного составления расписаний. В общей постановке она является процессом упорядочивания некоторого конечного множества событий во времени в условиях ресурсных и других ограничений ...*

*Ключевые слова: процедура построения расписания, карточный метод...*

В.В. КРАВЧЕНКО, С.В. ОНОПЕНКО  
Херсонський національний технічний університет  
О.І. КОВАЛЕНКО  
Херсонський державний університет

### **ВЛАСТИВОСТІ ПРОЦЕДУРИ ПОБУДОВИ РОЗКЛАДУ**

*Розглянуті властивості процедури побудови розкладу, яка формалізує картковий метод ручної побудови розкладу. У загальній постановці вона є процесом упорядкування деякої скінченної множини подій в часі за умов ресурсних та інших обмежень...*

*Ключові слова: процедура побудови розкладу, картковий метод...*

V.V. KRAVCHENKO, S.V. ONOPENKO  
Kherson National Technical University  
O.I. KOVALENKO  
Kherson State University

### **THE PROPERTIES OF SCHEDULE CONSTRUCTION PROCEDURE**

*The properties of the schedule construction procedure, which formalizes the card method for manual scheduling, are considered. In the general formulation it is a process of ordering a certain finite set of events in time under resource and other constraints ...*

*Keywords: the schedule construction procedure, card method...*

#### **Постановка проблемы**

Задача составления расписания является одной из наиболее распространенных задач, которые решает каждый человек практически каждый день. В общей постановке она является процессом упорядочения некоторого конечного множества событий во времени в условиях ресурсных и других ограничений.

### Анализ последних исследований и публикаций

Анализ существующих методов решения задачи составления расписания занятий показывает, что решение задач теории расписаний имеет известную сложность. По содержанию эти задачи относятся к классу комбинаторных, для которых существенное значение имеет размерность ...

### Цель исследования

Целью данного исследования является автоматизация составления расписания занятий для системы дистанционного обучения с учетом загруженности преподавательского состава. Качество обучения, его экономическая эффективность, удобство обучения студентов и работы профессорско-преподавательского состава зависит от удачно составленного расписания.

...

### Выводы

Во время выполнения работы был разработан собственный математический метод для составления расписания, а именно был определен ряд ограничений, которые учитываются при составлении расписания, создана целевая функция для оценки пригодности ...

### Список использованной литературы

1. Мокін Б. І., Мокін В. Б., Мокін О. Б. Математичні методи ідентифікації динамічних систем. Вінниця : ВНТУ, 2010. 260 с.
2. Квасниця Г., Шинкаренко Г. Адаптивні апроксимації методу скінченних елементів для задач еластостатики. *Вісник Львівського університету. Серія: Прикладна математика та інформатика*. 2002. Вип. 5. С. 95–106.
3. Тимофієва Н. К. Один спосіб моделювання інтелекту людини з використанням комбінаторного аналізу. *Інтелектуальні системи прийняття рішень та проблеми обчислювального інтелекту. (ISDMCI'2014)*: матеріали X Міжнародної наукової конференції (Залізний Порт, 1923 травня 2014 р.). Херсон, 2014. С. 180-182.
4. Тимофієва Н. К. Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації: автореф. дис... д-ра. техн. наук. Київ, 2007. 32 с.

### References

1. Mokin, B. I., Mokin, V. B., & Mokin, O. B. (2010). *Matematychni metody identyfikatsii dynamichnykh system*. Vinnytsia: VNTU.
2. Kvasnytsia, H., & Shynkarenko, H. (2002). *Adaptyvni aproksymatsii metodu skinchennykh elementiv dlia zadach elastostatyky. Visnyk Lvivskoho universytetu. Seria: Prykladna matematyka ta informatyka*. 5, 95–106.
3. Tymofiiieva, N. K. (2014) *Odyn sposib modeliuвання intelektu liudyny z vykorystanniam kombinatornoho analiz. Proceedings of the Intelektualni systemy pryiniattia rishen ta problemy obchysliuvalnoho intelektu. (ISDMCI'2014) : materialy X Mizhnarodnoi naukovoї konferentsii. (Ukraine, Zaliznyi Port, May 28-31, 2014), Kherson, pp. 180–182.*
4. Tymofiiieva, N. K. (2007). *Teoretyko-chyslovi metody rozv'iazannia zadach kombinatornoї optyimizatsii. (Extended abstract of Doctor's thesis)*, Kyiv: In-t kibernetiky im. V.M. Hlushkova NAN Ukrainy.

Кравченко Виктор Викторович – д.ф.-м.н., профессор. профессор кафедры математического моделирования Херсонского национального технического университета, e-mail: [kravchenko@gmail.com](mailto:kravchenko@gmail.com), ORCID: 0000-0002-4107-8141.

Онопенко Сергей Васильевич – аспирант кафедры технической кибернетики Херсонского национального технического университета, e-mail: [onopenko@ukr.net](mailto:onopenko@ukr.net), ORCID: 0000-0002-5196-5301.

Коваленко Александр Иванович – к.т.н., доцент, доцент кафедры информатики Херсонского государственного университета, e-mail: [kovalenko@i.ua](mailto:kovalenko@i.ua), ORCID: 0000-0002-6196-540.

**ARTICLE SUBMISSION GUIDELINES**  
for scientific journal  
**'Applied Questions of Mathematical Modelling'**

**File parameters:**

**The manuscript** must be prepared with help of Microsoft Word-2003/2016; **page format** – A4, **page orientation** – "book"; **boundaries:** left – 2,5 cm; right – 2,5 cm; top – 2,5 cm; bottom – 2,5 cm; **line spacing** – 1,0; **interval between paragraphs** "before", "after" – 0 pt.; **ident** "left", "right" – 0 pt.; **ident of first line** – 1,25 cm.

**Required elements of the article:**

Attention! Unit 'Authors Details', 'Article Title', 'Abstract', and 'Keyword Lis't are presented in THREE languages (Ukrainian, English, Russian) in the same format.  
The first abstract is given in the language of the article.  
The text of the annotations in all three languages should be identical.  
Annotation size is at least 1800 characters without spaces.

- **index UDK** in the top left corner of the page (Times New Roman, 12 pt.), **is specified once**;
- **the initials and surname of author (authors)** in capital letters by article language (Times New Roman, 12 pt., alignment – right-aligned) (The authors' full name is translated from Ukrainian into English);
- **full name of the organization**, in which author works (Times New Roman, 10 pt., right-aligned);
- *empty line* (Times New Roman, 12 pt.);
- **the title of the article** in capital letters, centered (Times New Roman, 12 pt., bold);
- *empty line* (Times New Roman, 12 pt.);
- **abstract** in article language no less than 500 symbols (Times New Roman, 12 pt., italic);
- **a list of key words** that begins with the words: "Keywords:" (Times New Roman, 12 pt., italic);
- *empty line* (Times New Roman, 12 pt.);

**Description of Main Material of Research**

The main text (Times New Roman, 12 pt.), which, in accordance with the requirements of MES of Ukraine, must contain the following selected items:

- Problem Statement;
- Analysis of Recent Researches and Publications;
- Purpose of the Study;
- Description of Main Material of Research;
- Conclusions;
- References.
- **information about the authors (see A Sample of the Article).**

**Додаткові вимоги до елементів статті:**

- **Pictures:** the captions under the pictures – Times New Roman, 10 pt., bold;
- **Formulas:** for typing formulas use only equation editor Microsoft Equation 3.0 or MathType; formula is on the line center; the numbering of formulas is on the right edge.  
*Sizes by default: Full – 12 pt; Subscript/Superscript – 7 pt; Sub-Subscript/Superscript – 5 pt; Symbol – 18 pt; Sub-symbol – 12 pt.*
- **Programs:** for a set of fragments of the programs one should use the fonts Courier New (Courier);
- **References:** references for article in English is made in accordance with APA Style.

We suggest you use the following resources for transliteration:

- transliteration from Ukrainian: <http://ukrlit.org/transliteratsiia>
- transliteration from Russian: <http://translate.meta.ua/ru/translit/>

## **A SAMPLE OF THE ARTICLE**

(The sample is composed of excerpts from various publications, the authors are fictitious personalities)

UDC XXX.XX

V.V. KRAVCHENKO, S.V. ONOPENKO  
Kherson National Technical University  
O.I. KOVALENKO  
Kherson State University

### **THE PROPERTIES OF SCHEDULE CONSTRUCTION PROCEDURE**

*The properties of the schedule construction procedure, which formalizes the card method for manual scheduling, are considered. In the general formulation it is a process of ordering a certain finite set of events in time under resource and other constraints ...*

*Keywords: the schedule construction procedure, card method...*

В.В. КРАВЧЕНКО, С.В. ОНОПЕНКО  
Херсонський національний технічний університет  
О.І. КОВАЛЕНКО  
Херсонський державний університет

### **ВЛАСТИВОСТІ ПРОЦЕДУРИ ПОБУДОВИ РОЗКЛАДУ**

*Розглянуті властивості процедури побудови розкладу, яка формалізує картковий метод ручної побудови розкладу. У загальній постановці вона є процесом упорядкування деякої скінченної множини подій в часі за умов ресурсних та інших обмежень...*

*Ключові слова: процедура побудови розкладу, картковий метод...*

В.В. КРАВЧЕНКО, С.В. ОНОПЕНКО  
Херсонський національний технічний університет  
А.І. КОВАЛЕНКО  
Херсонський державний університет

### **СВОЙСТВА ПРОЦЕДУРЫ ПОСТРОЕНИЯ РАСПИСАНИЯ**

*Рассмотрены свойства процедуры построения расписания, которая формализует карточный метод ручного составления расписаний. В общей постановке она является процессом упорядочивания некоторого конечного множества событий во времени в условиях ресурсных и других ограничений ...*

*Ключевые слова: процедура построения расписания, карточный метод...*

#### **Problem Statement**

The task of scheduling is one of the most common tasks that every person solves almost every day. In a general setting, it is a process of ordering a finite set of events over time under resource and other constraints.

#### **Analysis of Recent Researches and Publications**

An analysis of existing methods for solving the problem of classes scheduling shows that the solution of tasks from the theory of schedules has a known complexity. In content, these tasks belong to the class of combinatorial ones, for which dimension is essential ...

### **Purpose of the Study**

The purpose of this study is an automation of classes scheduling for the distance learning system, taking into account the workload of the teaching staff. The quality of training, its economic efficiency, the convenience of students teaching and the work of the faculty members depends on a well-established schedule.

...

### **Conclusions**

During the execution of the research, our own mathematical method was developed for scheduling, namely, a number of restrictions were determined that are taken into account when scheduling, the objective function was created to assess suitability ...

### **References**

1. Ibrahim, R. (2005). *Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications*. Cambridge University Press.
2. Bochkarev, S. A., Lekomtsev, S. V., & Matveenko, V. P. (2015). Natural vibrations of loaded noncircular cylindrical shells containing a quiescent fluid. *Thin-Walled Structures*, **90**, 12–22. DOI: 10.1142/S0219455415500765
3. Gultom, J. H., Harsono, M., Khameswara, T. D., & Santoso, H. (2017). Smart IoT Water Sprinkle and Monitoring System for Chili Plant. Proceedings of the *International Conference on Electrical Engineering and Computer Science (ICECOS)*. (Indonesia, Palembang, August 22-23, 2017). Palembang: Book Publishing, pp. 212–216. DOI: 10.1109/ICECOS.2017.8167136
4. Tymofiiieva, N. K. (2007). *Theoretical and Numerical Methods for Solving Combinatorial Optimization Problems*. (Extended abstract of Doctor's thesis), Kyiv: V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine.

...

Kravchenko Victor Viktorovich – Doctor of Engineering Science, professor, professor at the Department of Mathematical Modelling of Kherson National Technical University, [kravchenko@gmail.com](mailto:kravchenko@gmail.com), ORCID: 0000-0002-4107-8141.

Onopenko Serhii Vasylovych – postgraduate student at the Department of Technical Cybernetics of Kherson National Technical University, [onopenko@ukr.net](mailto:onopenko@ukr.net), ORCID: 0000-0002-5196-5301.

Kovalenko Oleksandr Ivanovych – PhD, Associate Professor, Associate Professor at the Department of the Informatics of Kherson State University, [kovalenko@yandex.ua](mailto:kovalenko@yandex.ua), ORCID: 0000-0002-6196-540.

# ПРИКЛАДНІ ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Відповідальний за випуск	Хомченко Анатолій Никифорович, д.ф.-м.н., професор, заслужений діяч науки і техніки України
Технічний редактор	Литвиненко Олена Іванівна к.т.н., доцент
Макетування	Омельчук Антон Анатолійович

Свідоцтво про державну реєстрацію засобу масової інформації –  
серія КВ № 23529-13369Р от 03.08.2018

Підписано до друку 29.06.2021 р. Формат 60x84/8 Папір офсетний.  
Ум. друк. аркушів 31,6. Замовлення № 9/0820. Наклад 120 прим.

© Херсонський національний технічний університет 2020

---

Адреса редакції: 73008, м. Херсон, Бериславське шосе, 24, корп. 3,  
каб. 425, тел. (0552) 32-69-95. E-mail: aqmm@kntu.net.ua

Видавництво та друк: «ОЛДІ-ПЛЮС»  
73034, м. Херсон, вул. Паровозна, 46-а  
E-mail: office@oldiplus.com  
Свід. ДК № 6532 від 13.12.2018 р.